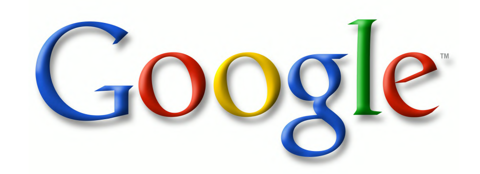
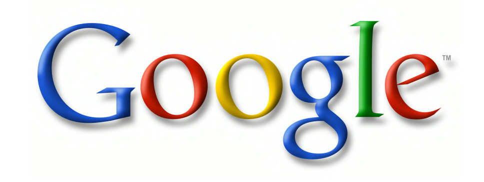
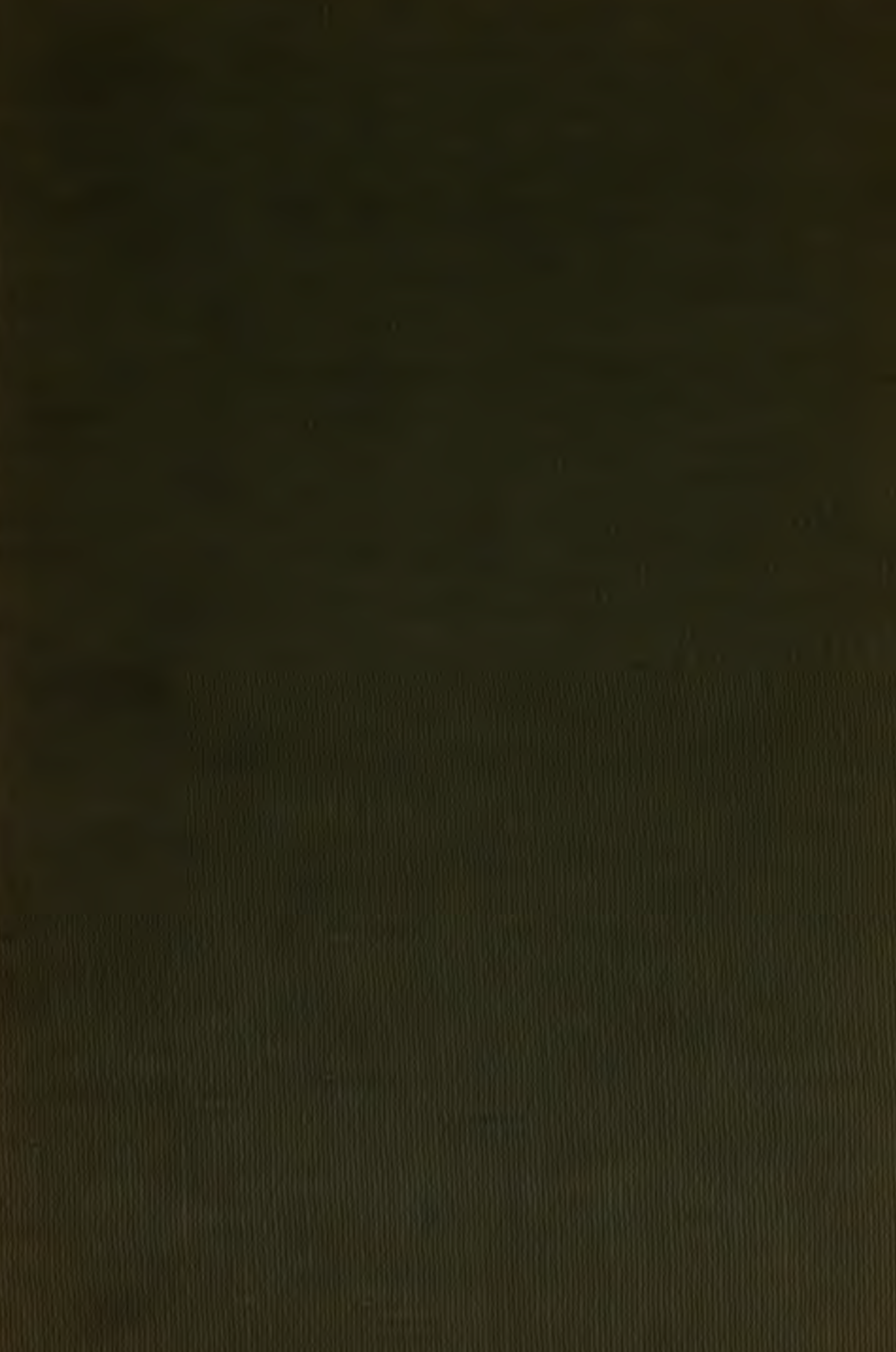
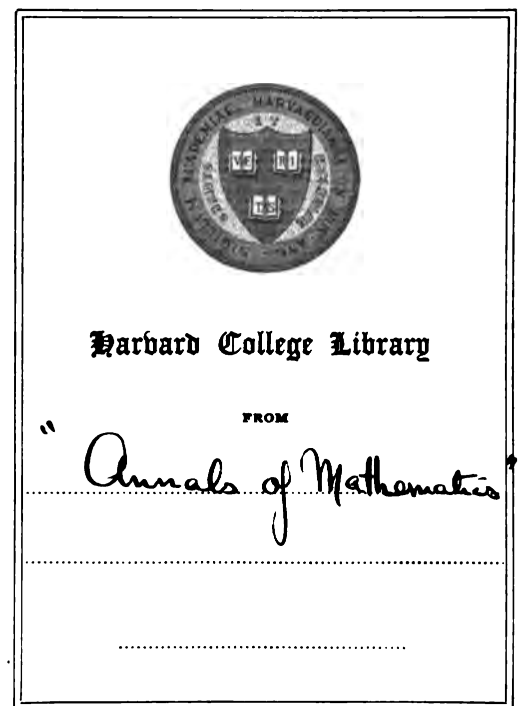







Harvard College Library
FROM
"Annals of Mathematics"



Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ VIII.



ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1904.





На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, 25-го Октября 1904 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

VIII-го тома.

TABLE DES MATIÈRES

du tome VIII.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му октября 1904 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: В. А. Стекловъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. П. Грузинцевъ и В. П. Алексѣевскій.
3. Секретарь А. П. Пшеборскій.

B. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго универс.
2. P. Appell, проф. Парижскаго университета, академикъ.
3. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. университета св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго университета.
6. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. университета.
7. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. университета, академикъ.
9. E. Picard, проф. Парижскаго университета, академикъ.
10. H. Poincaré, проф. Парижскаго университета, академикъ.
11. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. электро-техн. ин.
12. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьков. универс.

C. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Харьковскаго универ.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
5. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. университета св. Владиміра.

6. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инстит.
7. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумскаго реальнаго училища.
8. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьковскаго университета.
9. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьковскаго универс.
10. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. универ.
11. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, дирек. Кіев. политехн. инст.
12. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. технологич. института.
13. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф. СПБ.
14. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежскаго кадет. корпуса.
15. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимназіи.
16. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьковскаго технолог. инст.
17. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьковской гимн.
18. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. нар. учил. Курск. губ.
19. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
20. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, бывш. проф. Харьк. технол. инст.
21. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго университета.
22. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьк.
23. Маевскій Андрей Васильевичъ, преп. 3-й Харьковской гимназіи.
24. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал уч.
25. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго техн. института.
26. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьковскаго техн. инст.
27. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, бывш. проф. Харьк. техн. ин.
28. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьковскаго техн. инст.
29. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
30. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, приватъ-доцентъ Харьков. универс.
31. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
32. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьковскаго учебн. окр.
33. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьковск. универ.
34. Роговской Евгеній Александровичъ, проф. Харьковскаго универс.
35. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, бывш. преп. Урюпинск. реал. учил.
36. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
37. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, преп. Изюмскаго реальн. училища.
38. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
39. Синцовъ Дмитріи Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго университета.
40. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьковской гимназіи.
41. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьковскаго университета.
42. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьковскаго университета.
43. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьковск. унив.
44. Флоровъ Петръ Степановичъ, дирек. Усть-Медвѣд. реальн. училища.
45. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьков. гимназ.
46. Шиллеръ Николай Николаевичъ, дирек. Харьковскаго техн. инст.

47. **Шимковъ** Андрей Петровичъ, бывш. проф. Харьковскаго универс.
48. **Шиховъ** Василій Васильевичъ, дирек. Харьковскаго реал. училища.
49. **Штукаревъ** Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьковской гимн.
50. **Черпай** Николай Александровичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.

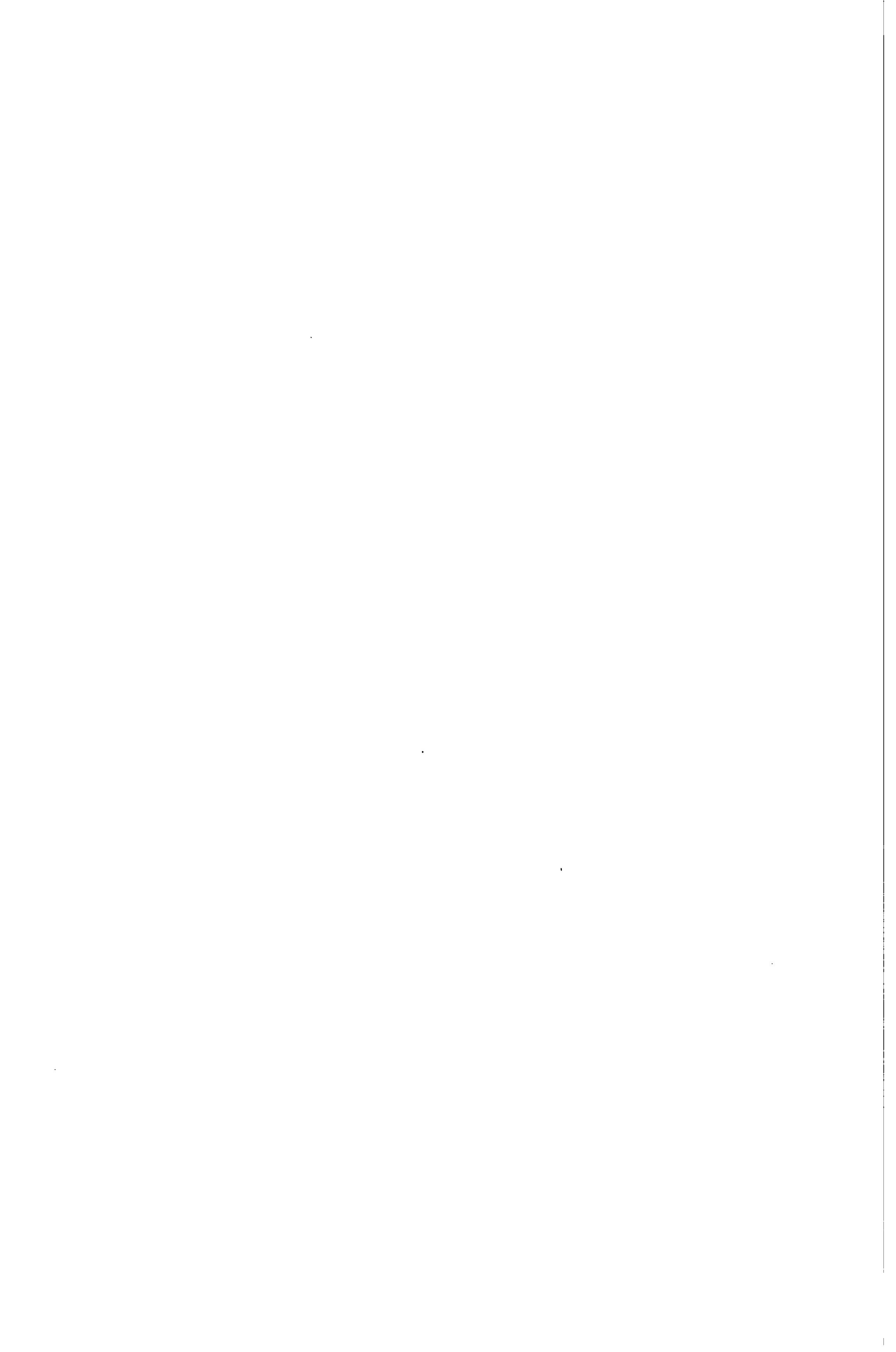
D. Члены-корреспонденты.

a) русскіе:

1. **Васильевъ** Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго университ.
2. **Вороной** Георгій Өедосѣевичъ, проф. Варшавскаго университета.
3. **Котельниковъ** Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго университ.
4. **Некрасовъ** Павелъ Алексѣевичъ, попеч. Московскаго учебн. округа.
5. **Пташицкій** Иванъ Львовичъ. проф. СПБ. университета.
6. **Сомовъ** Павелъ Осиповичъ, проф. горнаго института.
7. **Тороповъ** Константинъ Александровичъ, преп. Пермской гимназіи.

b) иностранные:

1. **Cosserat** E., проф. Тулузскаго университета.
2. **Hadamard** J., проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
3. **Hurwitz** A., проф. политехникума въ Цюрихѣ.
4. **Kneser** A., проф. Берлинской горной академіи (Bergakademie).
5. **Korn** A., проф. Мюнхенскаго университета.
6. **Zaremba** S., проф. Краковскаго университета.



Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 1.

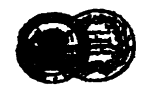
СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 1.





ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1902.



удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right),$$

$$f_1(x^2) = -f_1\left(\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right),$$

$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

При этихъ условіяхъ приведеніе выполняется подставками

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Классъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи обнимаетъ интегралы Эрмита, причемъ только что упомянутый результатъ, полученный довольно сложнымъ путемъ Эрмитомъ, выводится, какъ простое слѣдствіе изслѣдованій Раффи. Кромѣ того, какъ я ниже покажу, изслѣдованія Эйлера, Реалиса [1]), Малле[2]) и Буняковскаго [3]) являются тоже слѣдствіями тѣхъ же изслѣдованій.

Раффи доказываетъ, что, если раціональная функція $f(x)$ такова, что при x и y, удовлетворяющихъ Эйлеровскому уравненію

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0,$$

гдѣ

$$R(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$f(x)$ удовлетворяетъ условію

$$f(x) + f(y) = 0,$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

---

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques, p. 389, 1882.

[2]) Mallet. Two theorems in integration. Annali di matematica pura ed applicata, t. V, p. 252.

[3]) Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости. Приложеніе къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

есть интегралъ псевдо-эллиптическій, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи.

Здѣсь особенно интересенъ тотъ фактъ, что при вышеупомянутыхъ условіяхъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}},$$

или, по терминологіи Раффи, эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, такъ что теорема Раффи формулируется еще такъ: если эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

интегралъ псевдо-эллиптическій.

Изъ этого обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи выдѣляетъ группу, которой соотвѣтствуетъ преобразованіе типа

$$Nxy = L(x+y) + M$$

(гдѣ L, M, N постоянныя), которой занимался съ нѣкоторой другой точки зрѣнія также Гурза [1]).

Для интеграловъ этой группы Раффи даетъ общую формулу: для $a+b$ не равно $c+d$

$$\int \left(x - \frac{Lx+M}{x-L}\right) \varphi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

$$L = \frac{ab-cd}{(a+b)-(c+d)},$$

$$M = \frac{(a+b)\,cd - (c+d)\,ab}{(a+b)-(c+d)},$$

[1]] Goursat. Note sur quelques integrales pseudo-elliptiques. Bulletin de la Société Mathématique, t. XV.

а Ψ означаетъ раціональную функцію. Для $a+b=c+d$ на основаніи изслѣдованій Раффи получаемъ формулу

$$\int \frac{x^2-M}{x}\,\Psi\left(\frac{x^2+M}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ у $R(x)$ и Ψ тѣже значенія, а

$$M=a+b=c+d.$$

Мы беремъ болѣе общій случай, когда подъ радикаломъ стоитъ полиномъ какой угодно степени (не ниже 3-ей) и вмѣсто дифференціальнаго уравненія Эйлера, служащаго основой изслѣдованій Раффи, беремъ систему дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\cdots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0, \\
\frac{x_1dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2dx_2}{\sqrt{X_2}}+\cdots+\frac{x_ndx_n}{\sqrt{X_n}}=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}}+\cdots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,
\end{gathered} \tag{1}$$

гдѣ

$$X_i=a_{2n}x_i^{2n}+a_{2n-1}x_i^{2n-1}+\cdots+a_1x_i+a_0,$$

которую можно писать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)},\quad \ldots,\frac{dx_n}{dt}=\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}, \tag{2}$$

если

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Понятіе объ инваріантномъ преобразованіи обобщается такъ: Ультраэллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, если для x и y, удовлетворяющихъ уравненіямъ Якоби, имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\ldots+\frac{1}{f(x_n)}=0,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)}+\frac{x_2}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n}{f(x_n)}=0, \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)}=0$$

или, что тоже,

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}=\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}=\ldots=\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \qquad (4)$$

причемъ, конечно, исключаются рѣшенія

$$x_1=\text{const.},\qquad x_2=\text{const.},\ldots,x_n=\text{const.},$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ исключается случай, когда

$$F'(x_i)=0,$$

такъ какъ тогда

$$x_i=x_k=\text{const.},\qquad x_1=\text{const.},\ldots,x_n=\text{const.}$$

Обобщенная теорема Раффи будетъ состоять въ томъ, что дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

допускающій инваріантное преобразованіе въ только что указанномъ смыслѣ, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Кромѣ того, мы въ нѣкоторомъ частномъ случаѣ, соотвѣтствующемъ вышеупомянутому инволюціонному преобразованію для эллиптическихъ интеграловъ, даемъ общую формулу для псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ.

§ 2. Весьма важно для нашей цѣли знать общія рѣшенія дифференціальныхъ уравненій Якоби. Въ этомъ отношеніи замѣчателенъ мемуаръ Якоби [1]), въ которомъ онъ даетъ общія рѣшенія этой системы

---

[1]) Jacobi. Uber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 32, p. 200—226. Verke, Bd. 2, p. 135.

уравненій въ особенной и для нашей цѣли весьма полезной формѣ. Мы приводимъ теорему Якоби, сдѣлавъ необходимое, по нашему мнѣнію, дополненіе къ его доказательству.

Теорема I.

Рѣшенія $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы конечныхъ уравненій

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{Y_1}{Y}, \\ p_2 &= \frac{Y_2}{Y}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n &= \frac{Y_n}{Y}, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n &= x_1 x_2 \ldots x_n \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} Y &= r_n y^2 + 2 s_n y + t_n, \\ Y_1 &= r_{n-1} y^2 + 2 s_{n-1} y + t_{n-1}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_n &= r_0 y^2 + 2 s_0 y + t_0 \end{aligned} \tag{7}$$

полиномы 2-ой степени относительно y, суть общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ &\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{x_1^{n-2} dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2} dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2} dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

если коэффиціенты r_n, s_n, t_n, r_{n-1}, s_{n-1}, $t_{n-1}, \dots, r_0$, s_0, t_0 удовлетворяютъ $2n+1$ уравненіямъ, получающимся отъ приравниванія коэффиціентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ тождества:

$$[s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n s_0]^2 - [r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n r_0]$$
$$[t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n t_0] = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если принять обозначенія (6), то x_1, $x_2, \dots, x_n$ должны быть корнями уравненія

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots (-1)^n p_n = 0.$$

Если x_1, $x_2, \dots, x_n$ рѣшенія системы уравненій (5), то уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$Yx^n - Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n Y_n = 0, \tag{8}$$

гдѣ Y, Y_1, $Y_2 \dots Y_n$ имѣютъ значенія (7).

Расположенное по нисходящимъ степенямъ y, это уравненіе представляется еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ry^2 + 2Sy + T = 0, \tag{9}$$

$$R = r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} r_1 x + (-1)^n r_0,$$
$$S = s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} s_1 x + (-1)^n s_0, \tag{10}$$
$$T = t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} t_1 x + (-1)^n t_0.$$

Мы докажемъ, что всѣ корни уравненія (8) представляютъ изъ себя рѣшенія: x_1, $x_2, \dots, x_n$ уравненій (1), если мы имѣемъ тождественно

$$S^2 - RT = a_{2n} x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 = X$$

при всякомъ x, т. е. если имѣютъ мѣсто тѣ $2n+1$ уравненій, которыя получаются отъ приравниванія коэффиціентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ.

Для доказательства дифференцируемъ уравненіе (8).

Тогда на основаніи тождества

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots (-1)^n Y_n$$

получаемъ

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Y_1x^{n-2}+\ldots(-1)^{n-1}Y_{n-1}}=0,$$

или, вводя обозначеніе

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0. \tag{12}$$

Замѣчая, что по условію

$$Ry+S=\pm\sqrt{S^2-RT},$$

или, условившись подразумѣвать оба значенія радикала,

$$Ry+S=\sqrt{S^2-RT}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{\sqrt{S^2-RT}}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0.$$

Но по условію

$$S^2-RT=X \tag{11}$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0.$$

Подобное уравненіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ корней уравненія (8) $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Мы можемъ, значитъ, написать

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}}+\frac{2dy}{YF'(x_i)}=0. \qquad (i=1,2,3\ldots n) \tag{12}$$

Суммируя эти уравненія, умноживъ, предварительно, каждое на x_i^k, получаемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^k\,dx_i}{\sqrt{X_i}}=0$$

для $k=0,1,2,3,\ldots,n-2$, такъ какъ для этихъ значеній k

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k}{F'(x_i)} = 0.$$

Такимъ образомъ корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравненія (8) или, что тоже, рѣшенія системы (4) удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ Якоби (1).

Теперь покажемъ, что полиномы R, S, T могутъ существовать при всѣхъ X и что уравненіе (8) даетъ общія рѣшенія системы (1), т. е. рѣшенія, въ которыя входитъ ровно $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Такъ какъ R, S, T полиномы n-ой степени, то число коэффиціентовъ, въ нихъ входящихъ $3(n+1)$. Съ коэффиціентами: $a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_1, a_0$ они связаны числомъ уравненій, равнымъ числу этихъ послѣднихъ; $3(n+1)-(2n+1)=(n+2)$ коэффиціента остаются неопредѣленными. Якоби показываетъ, что хотя произвольныхъ величинъ входитъ $n+2$, но онѣ сводятся къ $n-1$, такъ что число произвольныхъ постоянныхъ будетъ не болѣе $n-1$, какъ слѣдовало ожидать. Однако отсюда еще не слѣдуетъ, что найденныя рѣшенія суть общія, можно воображать, что и эти $n-1$ произвольныя постоянныя сводятся еще къ меньшему числу. Мы докажемъ, что рѣшенія дѣйствительно общія, если будетъ нами доказано, что для коэффиціентовъ r, s, t можно всегда найти значенія, согласныя съ условіемъ (11) и такія, что для $x_1 = a_1$ величины $x_2, x_3, \ldots, x_n$ принимаютъ напередъ назначенныя значенія, напримѣръ, $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Принимаемъ за a_1 значеніе x_1 для $y=0$.

Но для

$$y=0 \qquad s_i = \sqrt{X_i},$$

или

$$s_n a_i^n - s_{n-1} a_i^{n-1} + \ldots (-1)^n s_0 = \sqrt{X_i}, \qquad (i=2 \ldots n)$$

изъ этихъ $n-1$ уравненій опредѣляемъ $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_0$, причемъ даже можемъ положить для простоты

$$s_n = 0, \qquad s_{n-1} = 0.$$

При всевозможныхъ значеніяхъ $a_2, a_3, \ldots, a_n$, при которыхъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2^{n-1} a_2^{n-2} \ldots 1 \\ a_3^{n-1} a_3^{n-2} \ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n^{n-1} a_n^{n-2} \ldots 1 \end{vmatrix} = (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \ldots (a_{n-1} - a_n)$$

не равенъ нулю, система уравненій даетъ опредѣленныя значенія для s_{n-2}, $s_{n-3}, \ldots, s_0$, при $\Delta = 0$ нѣсколько уравненій будутъ тождественны, столько же величинъ s могутъ получить произвольныя значенія. Остальныя величины опредѣлятся изъ полученной системы уравненій.

По s_n, $s_{n-1}, \ldots, s_0$ опредѣлятся коэффиціенты $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_0$, $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0$, если разложимъ $S^2 - X$ на два множителя степени n каждый. Сколько такихъ разложеній, столько получимъ системъ значеній, причемъ одному коэффиціенту, напримѣръ r_n, можно придать произвольное значеніе.

Теорема II-я.

Общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ системѣ конечныхъ уравненій 2-й степени относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(k)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0, \\
&\alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_2^{(k)} p_1 + 2\delta_2^{(k)} p_k p_2 + \varepsilon_2^{(k)} p_k^2 + \zeta_2^{(k)} p_2^2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (13) \\
&\alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} + 2\delta_{k-1}^{(k)} p_k p_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^{(k)} p_k^2 + \zeta_{k-1} p_{k-1}^2 = 0, \\
&\alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k+1} + 2\delta_{k+1}^{(k)} p_k p_{k+1} + \varepsilon_{k+1}^{(k)} p_k^2 + \zeta_{k+1} p_{k+1}^2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n + 2\delta_n^{(k)} p_k p_n + \varepsilon_n^{(k)} p_k^2 + \zeta_n^{(k)} p_n^2 = 0.
\end{aligned}$$

Такъ какъ $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ полиномы 2-й степени относительно y, то

$$Y^2, \quad p_k Y^2 = Y Y_k, \quad p_1 Y^2 = Y_1 Y, \quad p_1 p_k Y^2 = Y_1 Y_k,$$
$$p_k^2 Y^2 = Y_k^2 \quad \text{и} \quad p_k^2 Y^2 = Y_1^2$$

будутъ 4-ой степени относительно y.

Мы всегда можемъ опредѣлить въ зависимости отъ коэффиціентовъ этихъ полиномовъ постоянныя

$$\alpha_1^{(k)}, \ 2\beta_1^{(k)}, \ 2\gamma_1^{(k)}, \ 2\delta_1^{(k)}, \ \varepsilon_1^{(k)}, \ \zeta_1^{(k)}$$

такъ, что

$$\alpha_1^{(k)} Y^2 + 2\beta_1^{(k)} p_k Y^2 + 2\gamma_1^{(k)} p_1 Y^2 + 2\delta_1^{(k)} p_1 p_k Y^2 + \\ + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 Y^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 Y^2 = 0. \qquad (a)$$

Дѣйствительно, приравнявъ коэффиціенты при y^4, y^3, y^2, y, y^0 нулю, получимъ 5 уравненій линейныхъ и однородныхъ относительно $\alpha_1^{(n)}, 2\beta_1^{(k)}$, и т. д. Сокращая же на Y^2 уравненіе (a) имѣемъ:

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(n)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0.$$

Такимъ же образомъ получаемъ и остальныя уравненія (13). Эти уравненія, опредѣляющія $p_1, p_2, \dots, p_n$, въ функціи отъ p_k, а по нимъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, независимы другъ отъ друга, если только заразъ не равны нулю: $\gamma_s^{(k)}, \delta_s^{(k)}, \zeta_s^{(k)}, \gamma_m^{(k)}, \delta_m^{(k)}, \zeta_m^{(k)}$, т. е. когда p_k не равно постоянному, ибо тогда въ каждое уравненіе будетъ входить по новой буквѣ.

При нѣкоторыхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ можетъ случиться, что

$$\delta_1^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} = \zeta_1^{(k)} = 0,$$

$$\delta_2^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} = \zeta_2^{(k)} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta_n^{(k)} = \varepsilon_n^{(k)} = \zeta_n^{(k)} = 0$$

и уравненія (13) обращаются тогда въ слѣдующія:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 = 0,\\
&\alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} = 0,\\
&\alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k-1} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Рѣшимъ вопросъ, при всякихъ ли значеніяхъ коэффиціентовъ полинома X это возможно, и найдемъ въ случаѣ возможности значенія коэффиціентовъ α, β, γ въ уравненіяхъ (14).

Если

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{Y_1}{Y},\\
p_2 &= \frac{Y_2}{Y},\\
&\dots\dots\\
p_n &= \frac{Y_n}{Y},
\end{aligned} \tag{5}$$

то уравненія (14) можно написать такимъ образомъ:

$$\alpha_i^{(k)} Y + 2\beta_i^{(k)} Y_k + 2\gamma_i^{(k)} Y_i = 0. \qquad (i=1,2,3,\ldots,k-1,n+1,n)$$

Значенія $\alpha_i^{(k)}$, $2\beta_i^{(k)}$, $2\gamma_i^{(k)}$ получаемъ, приравнивая нулю коэффиціенты при y^2, y, y^0 въ лѣвой части, т. е. изъ уравненій

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} r_n + 2\beta_i^{(k)} r_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} r_{n-i} = 0\,, \\ \alpha_i^{(k)} s_n + 2\beta_i^{(k)} s_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} s_{n-i} = 0\,, \\ \alpha_i^{(k)} t_n + 2\beta_i^{(k)} t_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} t_{n-i} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Не нарушая общности рѣшенія, можемъ, какъ выше замѣтили, положить

$$s_n = 0, \qquad s_{n-1} = 0.$$

Но тогда также и $s_{n-k} = 0$, а потому и

$$s_{n-2} = 0, \qquad s_{n-3} = 0, \ldots, s_1 = 0, \qquad s_0 = 0. \tag{16}$$

$$p_1 = \frac{r_{n-1} y^2 + t_{n-1}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$p_2 = \frac{r_{n-2} y^2 + t_{n-2}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{r_0 y^2 + t_0}{r_n y^2 + t_n}.$$

Для того, чтобы эти значенія удовлетворяли системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби, необходимо и достаточно, чтобы

$$S^2 - RT = X,$$

а такъ какъ $S = 0$, то

$$RT = -X,$$

или

$$RT = -a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{2n}),$$

откуда

$$r_n t_n = -a_{2n}$$

и

$$\frac{1}{r_n} R = x^n - \frac{r_{n-1}}{r_n} x^{n-1} + \frac{r_{n-2}}{r_n} x^{n-2} \ldots \pm \frac{r_0}{r_n} =$$

$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

$$\frac{1}{t_n} R = x^n - \frac{t_{n-1}}{t_n} x^{n-1} + \frac{t_{n-2}}{t_n} x^{n-2} \ldots \pm \frac{t_0}{t_n} =$$

$$= (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \ldots (x - \alpha_{2n}).$$

Принимая обозначенія

$$\begin{aligned}
\pi'_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n, \\
\pi'_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pi'_n &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n; \\
\pi''_1 &= \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} + \ldots \alpha_{2n}, \\
\pi''_2 &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1}\alpha_{n+3} + \ldots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pi''_n &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n},
\end{aligned} \tag{17}$$

получаемъ

$$\begin{aligned}
&\frac{r_{n-1}}{r_n} = \pi'_1, \quad \frac{r_{n-2}}{r_n} = \pi'_2, \ldots, \frac{r_{n-k}}{r_n} = \pi'_k, \ldots, \frac{r_0}{r_n} = \pi'_n; \\
&\frac{t_{n-1}}{t_n} = \pi''_1, \quad \frac{t_{n-2}}{t_n} = \pi''_2, \ldots, \frac{t_{n-k}}{t_n} = \pi''_k, \ldots, \frac{t_0}{t_n} = \pi''_n.
\end{aligned} \tag{18}$$

Очевидно, для каждой изъ этихъ величинъ будетъ столько значеній, сколько существуетъ сочетаній изъ $2n$ корней X по n элементовъ т. е.

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Такъ что, если уравненія (14) имѣютъ мѣсто, то s имѣютъ значенія (16), а r, t значенія (18).

Найдемъ теперь соотвѣтствующія значенія коэффиціентовъ $\alpha_i^{(k)}$, $\beta_i^{(k)}$, $\gamma_i^{(k)}$.

Изъ уравненій (15) получаемъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{r_{n-k}t_{n-i}-t_{n-k}r_{n-i}}=\frac{2\beta_i^{(k)}}{-(r_n t_{n-i}-r_{n-i}t_n)}=\frac{2\gamma_i^{(k)}}{(r_n t_{n-k}-t_n r_{n-1})}.$$

Эти уравненія, по раздѣленіи знаменателя каждаго члена на r_n и t_n, на основаніи уравненія (18) переобразовываются такъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}=\frac{2\beta_i^{(k)}}{-(\pi''_i-\pi''_i)}=\frac{2\gamma_i^{(k)}}{(\pi''_k-\pi'_k)}.$$

Откуда

$$p_i=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}p_k+\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k},$$

или, какъ мы условимся впредь обозначать

$$p_i=L_i^{(k)}p_k+M_i^{(k)}, \tag{19}$$

гдѣ

$$L_i^{(k)}=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}, \tag{20}$$

$$M_i^{(k)}=\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k}. \tag{21}$$

Такимъ образомъ имѣетъ мѣсто

Теорема III-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненіямъ вида:

$$p_i=a_i^{(k)}p_k+b_i,$$

то

$$a_i^{(k)}=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}=L_i^{(k)},$$

$$b_i^{(k)}=\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k}=M_i^{(k)},$$

гдѣ $\pi'_i, \pi''_i, \pi'_k, \pi''_k$ имѣютъ значенія (17).

Посмотримъ, каково должно быть условіе, чтобы уравненіе

$$p_i=L_i^{(k)}p_k+M_i^{(k)}$$

обращалось въ

$$p_i = M_i^{(k)} = \text{const}. \tag{22}$$

Для этого, какъ это видно изъ уравненія (19), необходимо и достаточно, чтобы

$$L_i^{(k)} = 0\,,$$

или по (20)

$$\pi_i' = \pi_i''. \tag{23}$$

Если мы имѣемъ

$$\pi_i' = \pi_i'' \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,, k+1, \ldots, n\,,$$

то уравненія (19) обращаются въ слѣдующія

$$p_i = M_i^{(k)} \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\ k+1, \ldots, n\,;$$

отсюда получаемъ теорему:

Теорема IV-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби таковы, что

$$p_i = \text{const}. \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\ k+1, \ldots, n\,,$$

то, во первыхъ, корни полинома X таковы, что имѣютъ мѣсто между ними соотношенія

$$\pi_i' = \pi_i'' \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\ k+1, \ldots, n\,;$$

во вторыхъ

$$p_i = M_i^{(k)}\,,$$

гдѣ

$$M_i^{(k)} = \pi_i' = \pi_i''.$$

Отмѣтимъ въ заключеніе одно интересное свойство рѣшеній Якобіевскихъ уравненій, вытекающее изъ предыдущей теоріи.

Теорема V-я.

Всякая симметрическая функція рѣшеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Якобіевскихъ уравненій выражается раціонально черезъ $\sqrt{X_i}$ и x_i.

Дѣйствительно, мы имѣемъ по теоремѣ I

$$p_k = \frac{r_{n-k}y^2 + 2s_{n-k}y + t_{n-k}}{r_ny^2 + 2s_n + t_n},$$

но изъ уравненія

$$R_iy^2 + 2S_iy + T_i = 0,$$

въ которомъ R_i, S_i, T_i значенія R, S, T при $x = x_i$,

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{S_i^2 - R_iT_i}}{R_i};$$

но $S_i^2 - R_iT_i = X_i$, слѣдовательно

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{X_i}}{R_i}. \tag{24}$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе p_k, получаемъ

$$p_k = \frac{M_k + N_k\sqrt{X_i}}{M_n + N_n\sqrt{X_i}} \qquad (k=1,2,3\ldots n)$$

въ видѣ раціональной функціи отъ x_i и $\sqrt{X_i}$.

Такъ какъ всякая симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ выражается раціонально черезъ $p_1, p_2, \cdots, p_n$, то теорема такимъ образомъ доказана.

---

§ 3. Существеннымъ добавленіемъ къ изслѣдованіямъ Якоби являются прекрасныя изслѣдованія Ришло [1]), давшаго два интеграла Якобіевскихъ уравненій, подобныхъ интегралу Эйлеровскаго уравненія [2])

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

---

[1]) Richelot. Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 23, стр. 361. Richelot. Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 25.

[2]) Lagrange. Oeuvres Complétes, t. II, p. 18.

въ формѣ

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=(x_2-x_1)\sqrt{a_4p_1^2+a_3p_1+C},$$

гдѣ $p_1=x_1+x_2$, имѣющему важное значеніе въ изслѣдованіяхъ Раффи.

Теорема Ришло состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема VI-я.

Рѣшенія Якобіевскихъ уравненій

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,\\
&\frac{x_1dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_ndx_n}{\sqrt{X_n}}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)\\
&\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0
\end{aligned}$$

удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}+\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)}+\ldots+\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}=\sqrt{K}, \qquad (25)$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C, \qquad (26)$$

C произвольная постоянная,

$$p_1=x_1+x_2+\cdots x_n,$$

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Для доказательства систему Якобіевскихъ уравненій (1) замѣняемъ слѣдующей, ей равносильной

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)},\ldots,\frac{dx_n}{dt}=\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}, \qquad (2)$$

гдѣ

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Дифференцируя по t и замѣняя $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ ихъ выраженiями (2), получаемъ

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\frac{X_1}{F'(x_1)^2}\right)}{\partial x_1}\right] + \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}\sum_{k=2}^{k=n}\frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}\frac{1}{x_1 - x_k}$$

и т. д.

Складывая эти уравненiя, получаемъ по сокращенiи

$$2\frac{d^2p_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right)}{\partial x_k}. \tag{27}$$

Черезъ сложенiе же уравненiй (2)

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}. \tag{28}$$

Разлагая дробь $\frac{X}{F(x)^2}$ на простѣйшiя, получаемъ

$$\frac{X}{F(x)^2} - a_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\frac{1}{(x-x_k)^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial\left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right)}{\partial x_k}\right]\frac{1}{x-x}.$$

Разлагая обѣ части этого тождества по нисходящимъ степенямъ x и приравнивая коэффицiенты при $\frac{1}{x}$, получаемъ

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\left[\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right]}{\partial x_k},$$

или, на основанiи (27),

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = 2\frac{d^2p_1}{dt^2}.$$

Умножая на $\frac{dp_1}{dt}$ и интегрируя, получаемъ

$$\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

или

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{K}. \tag{29}$$

Отсюда, по замѣнѣ $\frac{dp_1}{dt}$ его выраженіемъ (28), получаемъ формулу (25).

Перейдемъ теперь къ нѣкоторымъ характернымъ свойствамъ Якобіевскихъ уравненій, позволяющимъ вывести изъ только что найденнаго интеграла остальные $n-2$ интеграла, а въ томъ числѣ и второй интегралъ Ришло.

Лемма.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяютъ системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k dx_i}{\sqrt{X_i}} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-2) \tag{1}$$

то $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанныя съ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соотношеніями

$$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \qquad (i=1,2,3,\ldots,n) \tag{30}$$

удовлетворяютъ системѣ аналогичныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-2) \tag{31}$$

гдѣ

$$Y_i = b_{2n}y^{2n} + b_{2n-1}y^{2n-1} + \ldots b_1 y + b_0 = a_{2n}(dy-b)^{2n} +$$
$$+ a_{2n-1}(dy-b)^{2n-1}(-cy+a) + \ldots, a_0(-cy+a)^{2n}. \tag{32}$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи (30),

$$\frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc-ad)(cx_i+d)^{n-k-2}(ax_i+b)^k dx_i}{\sqrt{X_i}},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \sum_{i=1}^{k=n} \frac{g_0^{(k)} + g_1^{(k)}x_i + \ldots g_{n-2}^{(k)}x_i^{n-2}}{\sqrt{X_i}} dx_i,$$

или, на основаніи уравненія (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0. \qquad (\text{при } k=0, 1, 2, \ldots, n-2) \qquad (31)$$

Теорема VII-я.

Рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}, \qquad (32)$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d} dt, \qquad (33)$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma, \qquad (34)$$

Γ произвольная постоянная, а $b_{2n}, b_{2n-1}, \ldots, b, a$ имѣютъ тоже значеніе, что въ леммѣ; t связано съ t соотношеніемъ

$$dt_1 = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)}, \qquad (35)$$

$$\Pi(x) = (cx_1 + d)(cx_2 + d) \ldots (cx_n + d). \qquad (36)$$

По леммѣ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанныя съ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соотношеніями (30), когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рѣшенія Якобіевскихъ уравненій, удовлетворяютъ уравненіямъ (31), получающимся замѣной $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Но $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя уравненіямъ Якоби (1), удовлетворяютъ, по теоремѣ VI, вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C}. \qquad (29)$$

Значитъ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющіе тоже уравненіямъ Якоби (31), удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma}, \qquad (32)$$

получаемому замѣной $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Дѣйствительно, при такой замѣнѣ p_1 должна перейти въ q_1, опредѣляемой формулой (33).

Для того же, чтобы узнать, во что переходитъ t, преобразуемъ уравненія

$$\frac{\Phi'(y_1)dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \frac{\Phi'(y_2)dy_2}{\sqrt{Y_2}} = \ldots = \frac{\Phi'(y_n)dy_n}{\sqrt{Y_n}} = dt_1, \tag{37}$$

$$\Phi(y) = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n),$$

равносильныя уравненіямъ (31), подставивъ въ нихъ вмѣсто y ихъ выраженія (30) въ x.

Тогда получимъ

$$\Phi'(y_i) = \frac{(bc-ad)^{n-1}F'(x_i)}{(cx_i+d)^{n-1}(cx_1+d)(cx_2+d)\ldots(cx_{i-1}+d)(cx_{i+1}+d)\ldots(cx_n+d)},$$

и

$$dy_i = \frac{(bc-ad)}{(cx_i+d)^2}dx_i,$$

$$dt_1 = \frac{\Phi'(y_i)dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc-ad)^n}{\Pi(x)}dt, \tag{35}$$

гдѣ

$$\Pi(x) = (cx_1+d)(cx_2+d)\ldots(cx_n+d). \tag{36}$$

Уравненіе (32), на основаніи соотношенія (35), можно еще написать такимъ образомъ

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{(bc-ad)^n}{\Pi(x)}\sqrt{L}, \tag{38}$$

или, такъ какъ по (33),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{(bc-ad)}{(cx_i+d)^2}\frac{dx_i}{dt},$$

или, по уравненіямъ (2),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i+d)^2F'(x_i)},$$

то

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i + d)^2 F'(x_i)} = \frac{(bc - ad)^{n-1}}{\Pi(x)^2} \sqrt{F}, \tag{39}$$

полагая $L = \frac{F}{\Pi(x)^2}$, гдѣ F будетъ очевидно цѣлой симметрической функціей отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Полагая

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1,$$

получаемъ первый интегралъ Ришло (25).

Полагая

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 0,$$

получаемъ второй интегралъ Ришло

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{x_i^2 F'(x_i)} = \frac{\sqrt{a_0 p_{n-1}^2 + a_1 p_n p_{n-1} + B p_n^2}}{p_n^2},$$

гдѣ B произвольная постоянная.

Замѣтимъ здѣсь, мимоходомъ, что, если мы возьмемъ $n-1$ системъ значеній a, d, c, d такихъ, что не имѣютъ мѣсто равенства

$$a_i d_i - b_i c_i = 0;$$

и

$$\frac{d_i}{c_i} = \frac{d_k}{c_k},$$

то $n-1$ уравненій (39), соотвѣтствующихъ имъ, представятъ $n-1$ независимыхъ интеграловъ уравненій Якоби. Впрочемъ это замѣчаніе въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ не понадобится.

§ 4. На основаніи теоремы Ришло можно вывести важный результатъ, служащій развитіемъ §-а 2-ого.

Теорема VIII-я.

Всякая раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражается раціонально черезъ

$$p_1 = x_1 + x_2 + \cdots x_n$$

и $\sqrt{K}$, гдѣ

$$K = a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C.$$

Для доказательства возьмемъ уравненіе §-а 2-ого

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}} - \frac{2\,dy}{YF'(x_i)} = 0\,, \tag{12}$$

или

$$dx_i - \frac{2\sqrt{X_i}\,dy}{YF'(x_i)} = 0\,. \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Складывая эти уравненія, получаемъ

$$dp_1 - 2\left(\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}\right)\frac{dy}{Y}\,,$$

или, такъ какъ по теоремѣ Ришло (25)

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)} = \sqrt{K}\,,$$

гдѣ

$$K = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C\,,$$

то получаемъ

$$\frac{dp_1}{\sqrt{K_1}} = \frac{2\,dy}{Y}.$$

Отсюда

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = 2\int\frac{dy}{Y} + \Gamma. \tag{40}$$

Если a_{2n} не равно нулю, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\lg\left(\frac{2\,a_{2n}p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K}\right). \tag{41}$$

Если $a_{2n} = 0$ и a_{2n-1} не равно нулю, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{2}{a_{2n-1}}\sqrt{K}\,, \tag{42}$$

и, наконецъ, если $a_{2n} = 0$ и $a_{2n-1} = 0$, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{p_1}{\sqrt{K}}. \tag{43}$$

Если мы положимъ, какъ въ §-ѣ 2-омъ,

$$R = r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n s_0,$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n t_0,$$

то, подставляя эти выраженія въ тождество

$$S^2 - RT = X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

получимъ въ лѣвой части

$$S^2 - RT = (s_n^2 - r_n t_n) x^{2n} + (-2 s_n s_{n-1} + r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n) x^{2n-1} + \dots,$$

а въ правой части

$$X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

получимъ

$$a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n: \tag{44}$$

кромѣ того

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots (-1)^n Y_n,$$

откуда

$$Y = r_n y^2 + 2 s_n y + t_n,$$

или

$$Y = r_n (y - \xi)(y - \eta),$$

гдѣ

$$\xi = \frac{-s_n + \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n},$$

$$\eta = \frac{-s_n - \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n}.$$

Принимая во вниманіе равенство (44), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{-s_n + \sqrt{a_{2n}}}{r_n}, \\ \eta &= \frac{-s_n - \sqrt{a_{2n}}}{r_n}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Когда $a_{2n}=s_n^2-r_n t_n$ не нуль, то ξ не равно η,

$$\frac{1}{Y}=\frac{1}{r_n(\xi-\eta)}\,\frac{1}{y-\xi}+\frac{1}{r_n(\eta-\xi)}\,\frac{1}{y-\eta}. \tag{46}$$

Но по уравненіямъ (45)

$$r_n(\xi-\eta)=2\sqrt{a_{2n}}\,.$$

Поэтому уравненіе (46) напишется такъ

$$\frac{1}{Y}=\frac{1}{2\sqrt{a_{2n}}}\left(\frac{1}{y-\xi}-\frac{1}{y-\eta}\right).$$

Умножая на dy и интегрируя, получаемъ

$$\int\frac{dy}{Y}=\frac{1}{2\sqrt{a_{1n}}}\lg\frac{y-\xi}{y-\eta}. \tag{47}$$

Подставляя въ уравненіе (40) значенія обоихъ интеграловъ, въ него входящихъ, изъ уравненій (41) и (47) и полагая

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\lg A\,,$$

гдѣ A новая произвольная постоянная, получимъ для случая, когда a_{2n} не равно нулю,

$$A\frac{y-\xi}{y-\eta}=\frac{2a_{2n}p_1+a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}}+\sqrt{K}. \tag{48}$$

Изъ этого уравненія ясно, что y есть раціональная функція p_1 и $\sqrt{K}$.

Если $a_{2n}=0$, но a_{2n-1} не нуль, то по уравненію (45) $\xi=\eta$.

Уравненіе (46) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{1}{Y}=\frac{1}{r_n(y-\xi)^2}, \tag{49}$$

а уравненіе (47) слѣдующимъ

$$\int\frac{dy}{Y}=-\frac{1}{r_n(y-\xi)}, \tag{50}$$

на основаніи котораго, а равно и (42), выводимъ изъ (40)

$$\frac{2}{a_{2n-1}}\sqrt{K} = -\frac{2}{r_n(y-\xi)} + \Gamma. \tag{51}$$

Это уравненіе тоже даетъ y въ раціональной функціи отъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Для случая же, когда и $a_{2n-1} = 0$, послѣднее уравненіе (51) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{p_1}{\sqrt{K}} = -\frac{2}{r_n(y-\xi)} + \Gamma, \tag{52}$$

тоже дающимъ, какъ и въ предыдущихъ двухъ случаяхъ, y въ раціональной функціи отъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Но на основаніи §-а 2-ого мы имѣемъ

$$p_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad p_2 = \frac{Y_2}{Y}, \ldots, p_n = \frac{Y_n}{Y}, \tag{7}$$

гдѣ Y, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ цѣлыя функціи 2-ой степени относительно y. Слѣдовательно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ выражаются раціонально черезъ y, а такъ какъ, мы только что доказали, y выражается раціонально черезъ p_1 и $\sqrt{K}$, то такимъ же образомъ выражаются $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и всякая раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такъ какъ послѣдняя можетъ быть всегда раціонально выражена черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Послѣдняя теорема даетъ возможность доказать интересное свойство дифференціала $\frac{f(x)}{\sqrt{X}}dx$, допускающаго инваріантное преобразованіе.

Теорема IX-я.

Дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, допускающій инваріантное преобразованіе, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Не вводя термина: „инваріантное преобразованіе", теорему можно формулировать такъ:

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

$$\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \qquad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_2^{n-2} dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2} dx_2}{\sqrt{X_3}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2} dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

удовлетворяютъ также еще слѣдующимъ уравненіямъ

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0, \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0,$$

то

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдоультраэллиптическій, выражающійся черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи.

При доказательствѣ будемъ различать два случая:

1) p_1 не равно постоянному,

2) $p_1 = \text{const}$.

Уравненія (3) перепишемъ такъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \qquad (4)$$

гдѣ

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Тогда

$$n\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}.$$

Умножая обѣ части на $\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$, имѣемъ

$$n\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\right)\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{53}$$

Но по теоремѣ VI (Ришло)

$$\frac{dp_1}{dt}=\sqrt{K}, \tag{29}$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C, \tag{26}$$

или, такъ какъ $\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}$, то, по раздѣленіи на это послѣднее уравненіе,

$$\frac{dp_1}{dx_1}=F'(x_1)\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X_1}},$$

или (54)

$$\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}}=\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

По подстановкѣ этого выраженія въ уравненіе (53) получаемъ

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{F'(x_1)\sqrt{X_1}}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\right)\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=R\frac{dp_1}{\sqrt{K}}, \tag{55}$$

гдѣ

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

есть раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$, и, слѣдовательно, раціональная функція отъ $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Но такая функція, по предыдущей теоремѣ VIII, выражается раціонально черезъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Пусть

$$R=\varphi(p_1, \sqrt{K}).$$

Подставляя въ уравненіе (55), получаемъ

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(p_1, \sqrt{R})\frac{dp_1}{\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \psi(p_1, \sqrt{K})\,dp_1,$$

гдѣ ψ раціональная функція отъ p и $\sqrt{K}$.

Интегрируя обѣ части послѣдняго равенства, имѣемъ

$$\int\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int\psi(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})\,dp_1. \tag{56}$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, берется въ конечномъ видѣ, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи

$$p_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{K} = \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C}.$$

Въ получаемомъ по интегрированіи выраженіи

$$\Phi_1(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})$$

слѣдуетъ произвести замѣну

$$p_1 \quad \text{на} \quad \frac{Y_1}{Y}, \qquad \text{(форм. 5)}$$

$$\sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C} \quad \text{на} \quad A\frac{y-\xi}{y-\eta} - \frac{2a_{2n}Y_1 + a_{2n-1}Y}{2\sqrt{a_{2n}}\,Y}. \qquad \text{(форм. 48)}$$

Затѣмъ въ полученномъ выраженіи замѣнить Y на

$$Y = \frac{-S_1 + \sqrt{X_1}}{R_1}. \tag{24}$$

Тогда получимъ

$$\int\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \Phi_2(x_1, \sqrt{X_1}) \tag{57}$$

въ видѣ суммы алгебраической раціональной функціи отъ x_1 и $\sqrt{X_1}$ и логариѳмовъ подобныхъ функцій.

Теперь переходимъ ко второму случаю, когда

$$p_1 = \text{const.},$$

и прежде всего замѣтимъ, что всегда существуютъ такія значенія a, b, c, d, при которыхъ

$$q_1^{(j)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_j x_i + b_j}{c_j x_i + d_j}$$

не равно постоянному.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія

$$\frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 0, \quad \frac{dq_1^{(2)}}{dt} = 0, \ldots, \frac{dq_1^{(n)}}{dt} = 0$$

равносильны слѣдующимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(c_j x_i + d_j)^2} \frac{dx_i}{dt} = 0. \quad (\text{для } j = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{58}$$

Очевидно, опредѣлитель этой системы уравненій не обращается въ нуль тождественно при всѣхъ $c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n$; если бы это предположеніе имѣло мѣсто, то

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = 0,$$

или

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \ldots, x_n = \text{const.},$$

а этотъ случай нами исключенъ (§ 1) изъ понятія инваріантнаго преобразованія.

Беремъ тѣ значенія для a, b, c, d, при которыхъ q_1 не равно постоянному.

На основаніи теоремы VII

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}, \tag{32}$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \tag{33}$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma. \tag{34}$$

По леммѣ §-а 3-aго $y_1, y_2, \dots, y_n$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\sqrt{Y_1}}{\Phi'(y_1)}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\sqrt{Y_2}}{\Phi'(y_2)}, \dots, \frac{dy_n}{dt} = \frac{\sqrt{Y_n}}{\Phi'(y_n)}, \tag{37}$$

гдѣ

$$\Phi(y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n).$$

Уравненія же (3) обращаются въ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Theta(y_1)} + \frac{1}{\Theta(y_2)} + \dots + \frac{1}{\Theta(y_n)} = 0, \\ &\frac{y_1}{\Theta(y_1)} + \frac{y_2}{\Theta(y_2)} + \dots + \frac{y_n}{\Theta(y_n)} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{y_1^{n-2}}{\Theta(y_1)} + \frac{y_2^{n-2}}{\Theta(y_2)} + \dots + \frac{y_n^{n-2}}{\Theta(y_n)} = 0, \end{aligned} \tag{59}$$

гдѣ

$$\Theta(y) = \frac{f\left(\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right)}{(cx + d)^{n-2}} = \frac{(\gamma y + \delta)^{n-2} f\left(\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right)}{(ad - bc)^{n-1}}, \tag{60}$$

если

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{а} \quad x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ при доказательствѣ леммы §-а 3-aго, убѣждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k}{\Theta(y_i)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_0^{(k)} + h_1^{(k)} x_i + \dots g_{n-2}^{(k)} x_i^{n-2}}{f(x_i)},$$

откуда на основаніи уравненій (3) и получаемъ систему уравненій (59).

Какъ изъ уравненій (2), (4) и (29) вывели (55), такъ изъ (37), (59) и (32) выводимъ

$$\frac{\Theta(y_1) dy_1}{\sqrt{Y_1}} = S \frac{dq_1}{\sqrt{L}}, \tag{61}$$

гдѣ S раціональная симметрическая функція отъ $y_1, y_2, \dots, y_n$, и, слѣдовательно, раціональная функція отъ $q_1, q_2, \dots, q_n$, гдѣ $q_1, q_2, \dots, q_n$ такія же

функціи отъ $y_1, y_2, \ldots, y_n$, какъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Примѣняя же теорему VIII къ уравненіямъ Якоби (31) или (37), заключаемъ, что $S = \chi(q_1, \sqrt{L})$ раціональная функція отъ q_1 и $\sqrt{L}$.

Изъ уравненія (62) имѣемъ

$$\frac{\Theta(y_1)dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \chi(q_1, \sqrt{L})\frac{dq_1}{\sqrt{L}},$$

откуда

$$\int \frac{\Theta(y_1)}{\sqrt{Y_1}}\,dy_1 = \int \omega(q_1, \sqrt{b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma})\,dq_1, \tag{62}$$

гдѣ ω раціональная функція отъ

$$q_1 \text{ и } \sqrt{L} = \sqrt{b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma}.$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи q_1 и $\sqrt{L}$.

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, сведемъ результатъ, получаемый по интегрированіи, къ функціи

$$\Phi_2(y_1, \sqrt{Y_1}).$$

Остается только замѣнить y_1 на

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \sqrt{Y_1} \quad \text{на} \quad \frac{\sqrt{X_1}}{(cx_1 + d)^n}.$$

§ 5. Замѣтимъ, что систему дифференціальныхъ уравненій Якоби (1) на основаніи теоремы 2-ой можемъ замѣнить системой конечныхъ уравненій

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(k)} p_k p_1 + \varepsilon^{(k)} p_k^2 + s_1^{(k)} p_1^2 = 0,$$

. . . .

$$\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n + 2\gamma_n^{(k)} p_k p_n + \varepsilon^{(k)} p_k^2 + \varepsilon_n^{(k)} p_n^2 = 0.$$

Наиболѣе поддается изслѣдованію случай теоремы III, когда эти уравненія обращаются въ линейныя

$$p_l = L_l^{(k)} p_k + M_l^{(k)} \quad {\scriptstyle (l=1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n)} \tag{19}$$

гдѣ, какъ мы доказали въ §-ѣ 2-омъ (Теорема III) $L_l^{(k)}$, $M_l^{(k)}$ могутъ имѣть только слѣдующія значенія

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k}, \tag{20}$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k}. \tag{21}$$

Такимъ образомъ получаемъ, какъ частный случай теоремы IX, слѣдующую теорему:

Теорема X.

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя уравненіямъ

$$p_l = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k} p_k + \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi'_l}, \tag{19}$$

удовлетворяютъ еще уравненіямъ

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0, \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптическій.

Эта теорема можетъ быть доказана и независимо отъ вышеизложеннаго, хотя тогда не на столько ясна связь ея съ теоріей Якобіевскихъ уравненій, а главное то, что она составляетъ частный случай болѣе общей теоремы.

Для доказательства разобьемъ

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{2n})$$

на два множителя

$$X' = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

$$X'' = (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \dots (x - \alpha_{2n}).$$

Тогда

$$X = a_{2n} X' X''.$$

Принимая обозначенія (17)

$$X' = x^n - \pi'_1 x^{n-1} + \pi'_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n \pi'_n, \tag{63}$$

$$X'' = x^n - \pi''_1 x^{n-1} + \pi''_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n \pi''_n, \tag{64}$$

мы имѣемъ тождества

$$\pi'_l = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k} \pi'_k + \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k},$$

$$\pi''_l = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k} \pi''_k + \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k},$$

или, принимая обозначенія (20) и (21),

$$\pi'_l = L_l^{(k)} \pi'_k + M_l^{(k)}, \tag{65}$$

$$\pi''_l = L_l^{(k)} \pi''_k + M_l^{(k)}. \tag{66}$$

Подставляя эти выраженія π'_l, π''_l въ уравненія (63) и (64), получаемъ

$$\begin{aligned} X' = x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \dots (-1)^{k-1} M_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ + (-1)^k M_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} M_{n+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \dots (-1)^n M_n^{(k)} + \\ + \pi'_k \big(- L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} - \dots (-1)^{k-1} L_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ + (-1)^k L_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} L_{k+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \dots (-1)^n L_k^{(k)}\big), \end{aligned} \tag{67}$$

гдѣ

$$L_k^{(k)} = 1, \qquad M_k^{(k)} = 0,$$

что вполнѣ согласно съ формулами (20) и (21).

Полагая

$$x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \dots (-1)^n M_n^{(k)} = \mu, \tag{68}$$

$$- L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n L_n^{(k)} = \lambda, \tag{69}$$

можно написать уравненіе (67) и другое, такимъ же образомъ получаемое изъ (64), такъ

$$X' = \mu + \lambda \pi'_k, \tag{70}$$

$$X'' = \mu + \lambda \pi''_k. \tag{71}$$

Изъ уравненій (3) имѣемъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{nf(x_1)}{F'(x_1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

и

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{72}$$

Такъ какъ

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ то она вмѣстѣ съ тѣмъ раціональная функція отъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Такъ какъ, по уравненіямъ (19), $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть раціональныя функціи отъ p_k, то и R есть такая же функція отъ p_k. Означимъ R черезъ $\varphi(p_k)$.

Преобразуемъ теперь уравненіе (72) или, что тоже, уравненіе

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = R\frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{73}$$

На основаніи уравненій (19) имѣемъ

$$F'(x_1) = nx_1^{n-1} - (n-1)p_1 x_1^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n =$$

$$= nx_1^{n-2} - (n-1) M_1^{(k)} x_1^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} M_{n-1}^{(k)} +$$

$$+ p_k\left(-L_1^{(k)}(n-1)x_1^{n-2} + (n-2)L_2^{(k)}x_1^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}L_{n-1}^{(k)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_{x=x_1} + p_k\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{x=x_1}, \tag{74}$$

$$F'(x_1) = \mu_1 + \lambda_1 p_k,$$

гдѣ

$$\mu_1 = (\mu)_{x=x_1}, \qquad \lambda_1 = (\lambda)_{x=x_1}.$$

Такъ какъ $F(x_1) = 0$, то $\mu_1 + \lambda_1 p_k = 0$, откуда

$$p_k = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}. \tag{75}$$

Подставляя въ уравненіе (74) это выраженіе p_k', имѣемъ

$$F'(x_1) = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} - \mu_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}}{\lambda_1}. \tag{76}$$

Подставляя въ уравненіе (73) вмѣсто $X = a_{2n} X' X''$, на основаніи уравненій (70), (71),

$$a_{2n}(\mu_1 + \lambda_1 \pi_k')(\mu_1 + \lambda_1 \pi_k''),$$

а вмѣсто $F'(x_1)$ его выраженіе (76) и опуская для краткости значки, имѣемъ

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{\varphi(p_k) \frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda^2}}{\sqrt{a_{2n}\left(\pi_k' + \frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\pi_k'' + \frac{\mu}{\lambda}\right)}} dx,$$

или, по уравненію (75),

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{-\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' - p_k)(\pi_k'' - p_k)}}. \tag{77}$$

Отсюда

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = -\int \frac{\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' - p_k)(\pi_k'' - p_k')}}. \tag{78}$$

Такъ какъ интегралъ, стоящій въ правой части этого уравненія (78), берется въ конечномъ видѣ, то тоже относится и къ интегралу

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}.$$

После́ совершенія интегрированія

$$\int \frac{\varphi(p_k)\,dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p_k)}}$$

въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить p_k на

$$-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Слѣдствіе.

Такъ какъ p_k есть симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то вторая часть равенства (77) будетъ оставаться равной одной и той же величинѣ при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Значитъ

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{f(x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{f(x_n)dx_n}{\sqrt{X_n}}.$$

Такъ какъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

то

$$\frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{F'(x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{F'(x_n)dx_n}{\sqrt{X_n}},$$

откуда выводятся уравненія Якоби (1).

Такимъ образомъ интегралы, о которыхъ идетъ рѣчь въ этой теоремѣ, суть именно тѣ, дифференціалы которыхъ допускаютъ инваріантное преобразованіе, и заключеніе это мы вывели независимо отъ сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ.

Примѣняя эту теорему къ случаю, когда $L_k^{(l)} = 0$ $(l \gtrless k)$, что какъ мы показали въ теоремѣ IV будетъ только при

$$\pi'_l = \pi''_l \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, n),$$

получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XI.

Если корни полинома

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{2n}),$$

удовлетворяютъ условіямъ

$$\pi_1' = \pi_1'', \ \pi_2' = \pi_2'', \dots,$$
$$\pi_{k-1}' = \pi_{k-1}'', \ \pi_{k+1}' = \pi_{k+1}'', \dots, \pi_n' = \pi_n'', \tag{23}$$

и раціональная функція $f(x)$ такова, что при $x_1 . x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$p_1 = \pi_1', \ p_2 = \pi_2', \dots,$$
$$p_{k-1} = \pi_{k-1}', \ p_{k+1} = \pi_{k+1}', \dots, p_n = \pi_n', \tag{22}$$

имѣютъ мѣсто уравненія

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)} = 0,$$
$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \dots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots \tag{3}$$
$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \dots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0,$$

то интегралъ

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптическій.

Докажемъ, что для случая линейной зависимости между $p_1, p_2, \dots, p_n$ функція, удовлетворяющая условіямъ предыдущихъ теоремъ, существуетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ общій типъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, соотвѣтствующій таковой зависимости.

Теорема XII.

Общій типъ интеграловъ, удовлетворяющихъ условіямъ теоремы X-ой, есть

$$\int \lambda \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{79}$$

гдѣ

$$\mu = x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(k)},$$

$$\lambda = \quad - L_1^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)},$$

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi_k' \pi_l'' - \pi_k'' \pi_l'}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$\pi_1' = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad \pi_1'' = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{2n},$$

. . . .

$$\pi_n' = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \qquad \pi_n'' = \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}},$$

удовлетворяя условіямъ теоремы X-ой, опредѣляется по уравненіямъ (77) и (75) формулой

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

такъ какъ

$$\frac{-\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' - p_k)(\pi_k'' - p_k)}} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k'\lambda + \mu)(\pi_k''\lambda + \mu)}} dx = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{X}} dx.$$

Обратно, если

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

то имѣютъ мѣсто уравненія (19) и (3).

Дѣйствительно, если уравненія (19) удовлетворяются при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, то, какъ мы показали при доказательствѣ теоремы X,

$$\frac{\mu}{\lambda} = -p_k,$$

$$\lambda \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx_1} = F'(x),$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(-p_k) \frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

или

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \varphi(-p_k),$$

откуда

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

и, наконецъ,

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0, \tag{3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0.$$

Полагая $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, мы для каждаго значенія k будемъ имѣть самый типъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ

$$\int \left(L_1^{(1)} x^{n-1} - L_2^{(1)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(1)}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{L_1^{(1)} x^{n-1} - L_2^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(1)}}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{L_1^{(1)} x^{n-1} - L_2^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(1)}}\right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \left(L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} L_n^{(2)} \right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(2)}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(2)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (80)$$

$$\int \left(L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)} \right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}}{L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}}{L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$L_1^{(k)} = L_2^{(k)} = L_3^{(k)} = \ldots = L_{k-1}^{(k)} = L_{k+1}^{(k)} = \ldots = L_n^{(k)} = 0,$$

а, слѣдовательно, корни связаны уравненіями

$$\pi_i' = \pi_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n),$$

n типовъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ будутъ

$$\int x^{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{x^{n-1}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{x^{n-1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x^{n-2} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{x^{n-2}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{x^{n-1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (81)$$

$$\int x\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(x^n - M_1^{(n)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}\right)$$

$$\varphi\left(x^n - M_1^{(n)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Для случая эллиптическихъ интеграловъ формулы (80) даютъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, слѣдующую интересную форму псевдоэллиптическихъ интеграловъ, указанную Раффи.

А именно, въ формулѣ

$$\int \frac{x^2 - 2Lx - M}{x - L}\varphi\left(\frac{x^2 + M}{x - L}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}} \tag{82}$$

(гдѣ для простоты откидываемъ значки) полагаемъ

$$\varphi\left(\frac{x^2 + M}{x - L}\right) = \psi\left(\frac{\frac{x^2 + M}{x - L} - 2\xi}{\frac{x^2 + M}{x - L} - 2\eta}\right)\left(\frac{x^2 + M}{x - L} - 2\xi\right),$$

гдѣ ξ и η корни уравненія

$$x^2 - 2Lx - M = 0, \tag{83}$$

такъ что

$$x^2 - 2Lx - M = (x - \xi)(x - \eta), \tag{84}$$

$$\xi = L + \sqrt{L^2 + M},$$

$$\eta = L - \sqrt{L^2 + M}.$$

Но

$$\frac{x^2 + M - 2\xi(x - L)}{x^2 + M - 2\eta(x - L)} = \left[\frac{x - L - \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}}\right]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi\left(\frac{x^2 + M}{x - L}\right) = \frac{x - L}{(x - L - \sqrt{L^2 + M})^2}\chi\left(\frac{x - L - \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}}\right),$$

гдѣ χ означаетъ раціональную дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой четныя функціи.

Подставивъ это выраженіе функціи φ въ формулу (82) и произведя сокращенія на основаніи формулы (84), получимъ псевдо-эллиптическій интегралъ вида

$$\int \frac{x-L+\sqrt{L^2+M}}{x-L-\sqrt{L^2+M}} \chi\left(\frac{x-L+\sqrt{L^2+M}}{x-L-\sqrt{L^2+M}}\right) dx, \tag{85}$$

гдѣ $\chi(x)$ имѣетъ вышеуказанное значеніе.

Замѣтимъ, что наши разсужденія имѣютъ силу не только въ томъ случаѣ, когда a_{2n} отлично отъ нуля, но и когда $a_{2n}=0$ и полиномъ X нечетной степени

$$X = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-1}x^{2n-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{86}$$

причемъ мы пока предполагаемъ, что a_{2n-1} не равно нулю.

Положимъ

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_0' = 1, & \varepsilon_0'' = 1, \\ \varepsilon_1' = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n, & \varepsilon_1'' = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{2n}, \\ \varepsilon_2' = \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, & \varepsilon_2'' = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{n-1}' = \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n, & \varepsilon_n'' = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{2n}. \end{array} \tag{87}$$

Тогда

$$\pi_l' = \varepsilon_l' + \alpha_1\varepsilon_{l-1} \qquad \pi_l'' = \varepsilon_l'',$$

$$\frac{\pi_l'}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_l'}{\alpha_1} + \varepsilon_{l-1}'.$$

$$\left[\frac{\pi_l'}{\alpha_1}\right]_{\alpha_1=\infty} = \varepsilon_{l-1}', \qquad \left[\frac{\pi_l''}{\alpha_1}\right]_{\alpha_1=\infty} = 0. \tag{88}$$

На этомъ основаніи для случая, когда $a_{2n}=0$ или когда одинъ изъ корней, напримѣръ, $\alpha_1=\infty$, получаемъ изъ формулъ (20) и (21)

$$L_l^{(k)} = \frac{\dfrac{\pi'_l}{\alpha_1} - \dfrac{\pi''}{\alpha_1}}{\dfrac{\pi'_k}{\alpha_1} - \dfrac{\pi''}{\alpha_1}},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\dfrac{\pi'_k}{\alpha_1}\pi''_l - \pi''_k\dfrac{\pi'_l}{\alpha_1}}{\dfrac{\pi'_k}{\alpha_1} - \dfrac{\pi''}{\alpha_1}},$$

откуда, при $\alpha_1 = \infty$,

$$L_l^{(k)} = \frac{\varepsilon'_{l-1}}{\varepsilon'_{k-1}}, \tag{89}$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\varepsilon'_{k-1}\varepsilon''_{l-1} - \varepsilon''_k\varepsilon'_{l-1}}{\varepsilon'_{k-1}}. \tag{90}$$

Эти значенія $L_l^{(k)}$ и $M_l^{(k)}$ и слѣдуетъ, въ случаѣ полинома (86), подставить въ формулы (80) и (81).

Замѣтимъ еще, что наши разсужденія не предполагаютъ неравенства корней X; корни X могутъ быть и кратными и радикалъ $\sqrt{X}$ можетъ привестись къ виду

$$\sqrt{X} = (b_\alpha x^\alpha + b_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \ldots + b_1 x + b_0) =$$
$$= \sqrt{c_\beta x^\beta + c_{\beta-1}x^{\beta-1} + \ldots + c_1 x + c_0},$$

гдѣ

$$\beta + 2\alpha = 2n \quad \text{или} \quad \beta + 2\alpha = 2n - 1 \quad [\text{въ случаѣ } a_{2n} = 0].$$

---

§ 6. Интегралы Эйлера [1]).

Интегралы Эйлера

$$\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}, \tag{91}$$

$$\int \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}, \tag{92}$$

---

[1] Euleri Inst. Calculi Integralis. 1776, т. IV, стр. 36.

входятъ, какъ довольной простой частный случай, въ первую изъ формулъ (81).

Первому интегралу соотвѣтствуетъ разложеніе на два множителя

$$1 + x^4 = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1),$$

такъ что

$$M_2^{(1)} = \pi_2' = \pi_2'' = 1 \qquad L_2^{(1)} = 0,$$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\int x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1}\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Къ интегралу (91) можно примѣнить подстановку

$$\frac{x^2+1}{x} = z \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2+1} = t. \tag{93}$$

Интегралу (92) соотвѣтствуетъ разложеніе

$$(1 + x^4) = (x^2 + \sqrt{-2}\,x - 1)(x^2 - \sqrt{-2}\,x - 1),$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$M_2^{(1)} = \pi_2' = \pi_2'' = -1,$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\int x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{-1}\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Этому интегралу соотвѣтствуетъ подстановка

$$\frac{x^2-1}{x} = z \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2-1} = t. \tag{94}$$

Замѣтимъ, что интегралъ (91) можетъ быть найденъ при помощи подстановки (94), а интегралъ (92) при помощи подстановки (93); только функція φ, входящая въ формулы (81), для этого случая будетъ много сложнѣе.

Дѣйствительно,

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\int \frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^2+4}\cdot\frac{x\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\int \frac{\dfrac{x^2+1}{x}}{\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2-4}\cdot\frac{x\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)}{\sqrt{X}}.$$

Третій интегралъ Эйлера тоже принадлежитъ къ изслѣдуемому классу и находится при помощи подстановокъ (93) и (94), если имѣть ввиду, что

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Отсюда или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}+\frac{\frac{x^2+1}{x}}{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-4}\right]\frac{x\frac{d\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}{dx}}{\sqrt{X}},$$

или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}+\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+4}\right]\frac{x\frac{d\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}{dx}}{\sqrt{X}}.$$

Иинтегралъ Реалиса

$$\int\frac{1\pm x^n}{1\mp x^n}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}} \tag{96}$$

служитъ обобщеніемъ этихъ трехъ интеграловъ Эйлера и тоже принадлежитъ къ типу интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (81), какъ ниже увидимъ изъ изслѣдованія интеграловъ Буняковскаго, частнымъ случаемъ которыхъ является интегралъ Реалиса.

Интегралы Буняковскаго.

Основаніемъ изслѣдованій Буняковскаго служитъ тотъ фактъ, что всякій эллиптическій интегралъ

$$\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}} \tag{97}$$

---

[1]) Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала

$$\frac{x+C_1}{x+C_2}\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

и другихъ выраженій подобнаго вида. Приложеніе къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

приводится къ формѣ

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1}}\,dx \tag{98}$$

подстановкой

$$x = \alpha y + \beta.$$

Псевдо-эллиптическими интегралами (97) по Буняковскому будутъ тѣ, для которыхъ

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

или, по терминологіи Буняковскаго, раціональная функція $f(x)$ есть функція возвратная знакоперемѣнная.

Легко видѣть, что интегралы Буняковскаго подходятъ, какъ частный случай, подъ типъ интеграловъ Раффи.

Въ самомъ дѣлѣ, условія теоремы IX удовлетворены, ибо, если

$$x_1 x_2 = 1, \tag{99}$$

то, во первыхъ,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1^4 + Ax_1^3 + Bx_1^2 + Ax_1 + 1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{x_2^4 + Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + 1}} = 0,$$

и, во вторыхъ,

$$f(x_1) + f(x_2) = 0.$$

Такимъ образомъ, интегралъ (98) удовлетворяетъ условіямъ теоремы IX, а такъ какъ зависимость между x_1 и x_2 (99) типа (22), то онъ удовлетворяетъ и условіямъ теоремы XI, а потому заключается въ формулахъ (81).

Далѣе, если

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta,$$

$$x_2 = \alpha y_2 + \beta,$$

то, по леммѣ, при

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0,$$

имѣемъ также

$$\frac{dy_1}{\sqrt{Y_1}} + \frac{dy_2}{\sqrt{Y_2}} = 0;$$

кромѣ того, если

$$\varphi(y) = f(\alpha y + \beta),$$

то при

$$f(x_1) + f(x_2 = 0,$$

будемъ имѣть также

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = 0.$$

Интегралъ (97) тоже допускаетъ инваріантное преобразованіе.

Такъ какъ, кромѣ того, обозначая

$$q_1 = y_1 + y_2,$$

$$q_2 = y_1 y_2,$$

имѣемъ

$$p_1 = \alpha q_1 + \beta \qquad p_2 = \alpha q_2 + \alpha\beta q_1 + \beta^2,$$

то зависимость между q_1 и q_2 будетъ линейная, а по теоремѣ III не иначе, какъ типа (19). Интегралъ (97) подходитъ подъ формулы (80).

Способъ интегрированія Буняковскаго или, вѣрнѣе, выводъ изъ изслѣдованнаго класса другого болѣе обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ можетъ быть излагаемъ въ болѣе общей формѣ, чѣмъ это дѣлаетъ Буняковскій.

Изъ соотношенія [рав. (75) для $k = 1$ и $n = 2$]

$$p_1 = \frac{x^2 + M}{x - L}$$

опредѣляемъ x

$$x = \frac{p_1 \pm \sqrt{N}}{2},$$

гдѣ

$$N = p_1^2 - 4(Lp_1 + M), \tag{99}$$

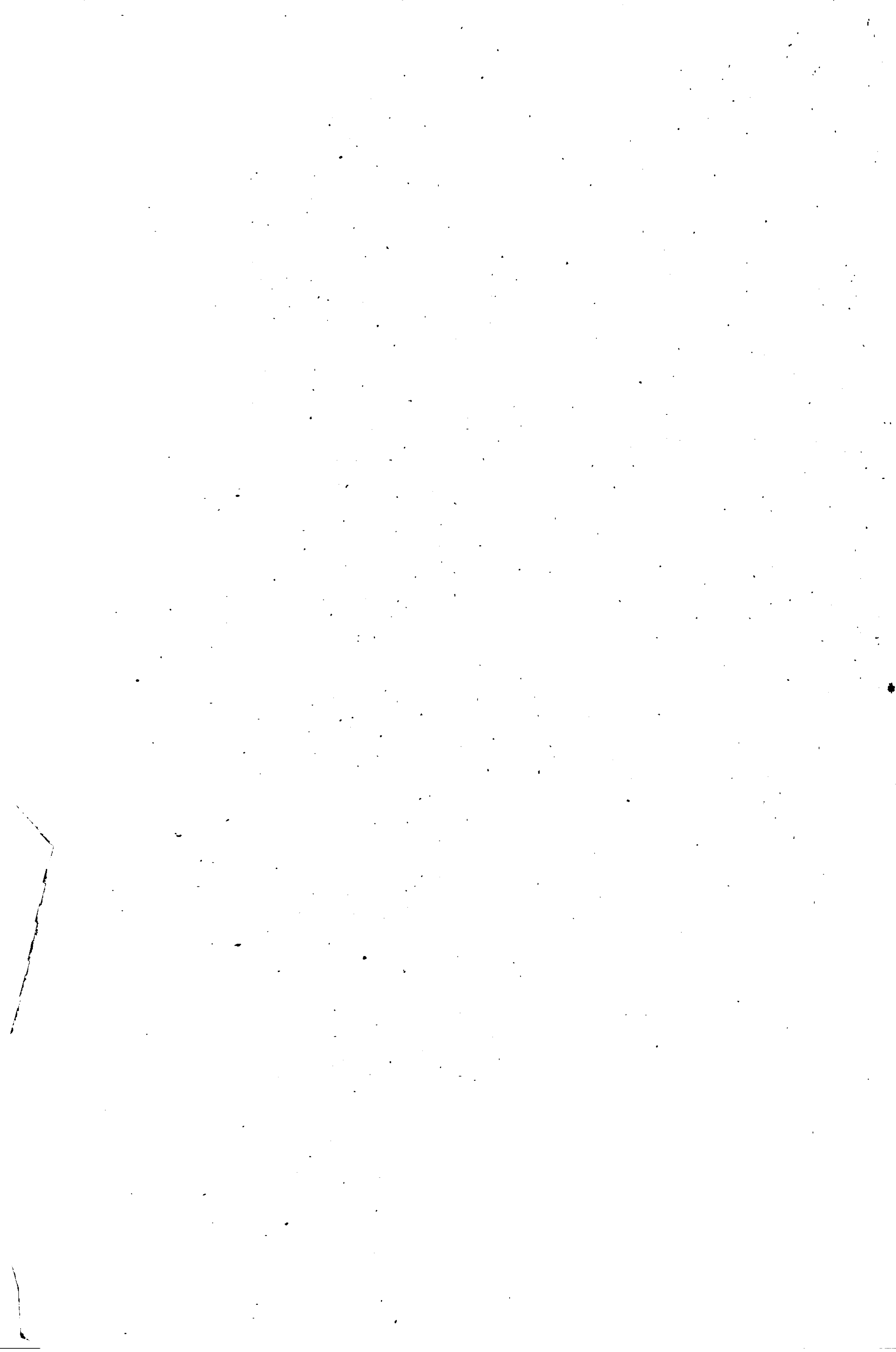
такъ что

$$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt{N}}{2},$$

$$x_2 = \frac{p_1 - \sqrt{N}}{2},$$

$$F'(x_1) = x_1 - x_2 = \sqrt{N},$$

$$F'(x_2) = x_2 - x_1 = -\sqrt{N}.$$



Томъ VIII, № 1.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

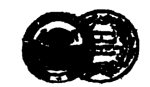
Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-a série, Tome VIII, № 2 и 3.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 2 и 3.



ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1902.



На основанiи § 9-го устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается: 17-го декабря 1903 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества *В. Стекловъ*.

Если $\varphi(x)$ означаетъ раціональную функцію отъ x, то

$$\varphi(x_1)=\varphi\left(\frac{p_1+\sqrt{N}}{2}\right)=\chi(p_1)+\omega(p_1)\sqrt{N}, \tag{100}$$

$$\varphi(x_2)=\varphi\left(\frac{p_1-\sqrt{N}}{2}\right)=\chi(p_1)-\omega(p_1)\sqrt{N}, \tag{101}$$

$$\frac{\varphi(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{\chi(p_1)+\omega(p_1)\sqrt{N}}{\sqrt{X_1}}dx. \tag{102}$$

Но, по формулѣ (54),

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K_1}}=\frac{dp_1}{\sqrt{KN}} \tag{103}$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C,$$

или, точнѣе,

$$K=a_{2n}(\pi_1'-p_1)(\pi_1''-p_1).$$

Принимая во вниманіе (99), заключаемъ, что $P=KN$ есть полиномъ четвертой степени относительно p_1, какъ X_1 относительно x_1.

На основаніи равенства (103), равенство (102) напишется такъ (опуская значки)

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}=\int\frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}+\int\frac{\omega(p)dp}{\sqrt{K}}. \tag{104}$$

Второй интегралъ можетъ быть взятъ въ конечномъ видѣ; тоже будетъ относиться и къ

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

если

$$\chi(p)=0,$$

т. е. [уравненія (100) и (101)] когда

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=0,$$

т. е. когда

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе.

Если $\chi(p)$ не равно нулю, то поступаемъ съ интеграломъ

$$\int \frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}$$

совершенно также, какъ поступали съ интеграломъ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Тогда, полагая

$$q_1 = p_1 + p_2,$$

гдѣ p_1 и p_2 удовлетворяютъ Эйлерову уравненію

$$\frac{dp_1}{\sqrt{P_1}} = -\frac{dp_2}{\sqrt{P_2}},$$

получимъ

$$\int \frac{\chi(p_1)dp_1}{\sqrt{P_1}} = \int \frac{\Theta(q_1)dq_1}{\sqrt{Q_1}} + \int \frac{\omega_1(q_1)dq_1}{\sqrt{L}},$$

гдѣ Q_1 полиномъ четвертой, L второй степени относительно q_1, а $\Theta(q_1)$ и $\omega_1(q_1)$ нѣкоторыя раціональныя функціи отъ q_1.

При $\Theta(q_1) = 0$, т. е. когда

$$\frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, получаемъ второй случай интегрируемости, такъ какъ оба интеграла, входящіе въ формулу (104), выражаются въ конечномъ видѣ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\omega_1(q_1)\,dq_1}{\sqrt{L}} + \int \frac{\omega(p)\,dp}{\sqrt{K}}.$$

Въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить q черезъ p, p черезъ x.

Третій случай интегрируемости получимъ, производя тѣже дѣйствія надъ

$$\int \frac{\Theta(q)\,dq}{\sqrt{Q}}$$

и т. д.

Интегралы Малле [1]).

Даемъ новыя доказательства двумъ теоремамъ Малле, относящимся къ псевдо-эллиптическимъ интеграламъ, принадлежащимъ, какъ ниже покажемъ, къ изслѣдуемому классу Раффи.

Теорема XIII.

Если положить

$$X = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)(1 + dx), \tag{105}$$

$$\lambda' = \frac{ab - cd}{cd(a + b) - ab(c + d)},$$

$$\lambda'' = \frac{ac - bd}{bd(a + c) - ac(b + d)}, \tag{106}$$

$$\lambda''' = \frac{ad - bc}{bc(a + d) - ad(b + c)},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{x - \lambda'} + \frac{1}{x - \lambda''} + \frac{1}{x - \lambda'''}\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{107}$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Положимъ

$$\frac{1}{a} = -\alpha_1,\ \frac{1}{b} = -\alpha_2,\ \frac{1}{c} = -\alpha_3,\ \frac{1}{d} = -\alpha_4,$$

$$\sqrt{X_1} = \sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)} = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{abcd}}, \tag{109}$$

$$\lambda' = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4}{(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_4)} = L_1^{(2)}, \tag{110}$$

или, опуская значки для краткости,

$$\lambda' = L,\quad \frac{dx}{(x - \lambda')\sqrt{X}} = \frac{dx}{(x - L)\sqrt{X}}.$$

Другія двѣ дроби, изъ суммы которыхъ (6) состоитъ разсматриваемый дифференціалъ (107), получаются такимъ же образомъ при двухъ другихъ дѣленіяхъ на двѣ группы корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ полинома X_1. Обозначимъ значенія L въ трехъ подобныхъ случаяхъ черезъ L', L'', L'''.

---

[1]) Malet. Two theorems in integration (Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI, p. 252).

Полагая въ первой изъ формулъ (80) $n=2$, $\varphi=1$, получимъ

$$J=\int\frac{x^2-2Lx-M}{x-L}\frac{dx}{\sqrt{X_1}}=\int\frac{x-L}{\sqrt{X_1}}dx-(M+L^2)\int\frac{dx}{(x-L)\sqrt{X_1}},$$

гдѣ J выражается черезъ

$$\lg\frac{P+Q\sqrt{X_1}}{P-Q\sqrt{X_1}},$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи отъ x [1]).

Отсюда получаемъ

$$\int\left(\frac{1}{x-L'}+\frac{1}{x-L''}+\frac{1}{x-L'''}\right)\frac{dx}{\sqrt{X_1}}=$$

$$=\alpha\int\frac{xdx}{\sqrt{X_1}}-\beta\int\frac{dx}{\sqrt{X_1}}+J'+J''+J''', \tag{111}$$

гдѣ J', J'', J''' представляютъ три логариѳма упомянутаго типа, а

$$\alpha=\frac{1}{L'^2+M'}+\frac{1}{L''^2+M''}+\frac{1}{L'''^2+M'''},$$

$$\beta=\frac{L'}{L'^2+M'}+\frac{L''}{L''^2+M''}+\frac{L'''}{L'''^2+M'''}.$$

Черезъ простое вычисленіе легко убѣдиться, что

$$L'^2+M'^2=(L'-L'')(L'-L''')=\varphi'(L'),$$

гдѣ

$$\varphi(L)=(L-L')(L-L'')(L'-L''').$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{1}{\varphi'(L')}+\frac{1}{\varphi'(L'')}+\frac{1}{\varphi'(L''')}=0, \tag{112}$$

$$\beta=\frac{L'}{\varphi'(L')}+\frac{L''}{\varphi'(L'')}+\frac{L'''}{\varphi'(L''')}=0. \tag{113}$$

---

[1]) Это новый выводъ формулы Абеля для выраженія

$$\int\frac{k+k'x}{\sqrt{R}}dx \quad\text{черезъ}\quad \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \quad\text{и логариѳмъ.}$$

Abel. Théorie des transcendantes elliptiques. T. II, p. 110.

На основаніи полученныхъ равенствъ (111), (112) и (113) и принимая во вниманіе (109) и (110), получимъ

$$\int\left(\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}+\frac{1}{x-\lambda'''}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{abcd}}\lg\frac{M+N\sqrt{X}}{M-N\sqrt{X}}+C, \quad (114)$$

гдѣ M и N цѣлыя функціи отъ x, которыя легко вычислить на основаніи вышесказаннаго.

Вторая теорема Малле состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема XIV.

Если положить

$$X=(1+ax)(1+bx)(1+cx), \quad (115)$$

$$\mu'=\frac{bc}{a-b-c},$$

$$\mu''=\frac{ac}{b-a-c}, \quad (116)$$

$$\mu'''=\frac{ab}{c-a-b},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{1-\mu'x}+\frac{1}{1-\mu''x}+\frac{1}{1-\mu'''x}\right]\frac{xdx}{\sqrt{X}} \quad (117)$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Эту теорему можно разсматривать, между прочимъ, какъ частный случай предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x=\frac{1}{z},$$

получаемъ

$$\sqrt{X}=\frac{\sqrt{Z}}{z^2},$$

гдѣ

$$Z=(z+a)(z+b)(z+c)(z),$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\frac{dz}{z\sqrt{Z}}.$$

Дифференціалъ (117) преобразовывается въ слѣдующее выраженіе

$$-\left[\frac{1}{z-\mu'}+\frac{1}{z-\mu''}+\frac{1}{z-\mu'''}\right]\frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad (118)$$

гдѣ μ', μ'', μ''' выраженія (110) при

$$\alpha_1 = , \; -a\,, \; \alpha_2 = 0\,, \; \alpha_3 = b \quad \alpha_4 = C.$$

Дифференціалъ (118) есть, въ сущности, частный случай (107).

Ограничиваясь разборомъ этихъ наиболѣе извѣстныхъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, мы не будемъ заниматься составленіями имъ подобныхъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, что легко сдѣлать по формуламъ (80). Но въ заключеніе приведемъ примѣръ одного дифференціала довольно общаго характера, допускающаго инваріантное преобразованіе. Предположимъ, что дифференціалъ $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}}$ таковъ, что

$$\int\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2}\lg\frac{-S+\sqrt{X}}{-S-\sqrt{X}} + C$$

и

$$S^2 - X = \alpha, \qquad (119)$$

гдѣ α постоянное, или, что тоже

$$\int\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \lg\frac{-S+\sqrt{X}}{R} + C, \qquad (120)$$

гдѣ R постоянное, которое затѣмъ надлежащимъ образомъ выберемъ.

Равенство (119) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = X, \qquad (11)$$

гдѣ полагаемъ

$$T = 1\,, \quad R = \alpha. \qquad (121)$$

Тогда уравненіе

$$\frac{-S+\sqrt{X}}{R} = y\,,$$

при условіи (11), будетъ опредѣлять рѣшенія $x_1, x_2, \cdots, x_n$ системы дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

а при условіяхъ (121), т. е. при

$$r_n=0\,,\ r_{n-1}=0\,,\ldots,r_1=0\,,\ r_0=\alpha\,,$$

$$t_n=0\,,\ t_{n-1}=0\,,\ldots,t_1=0\,,\ t_0=1\,,$$

по уравненіямъ (5) и (7) эти рѣшенія будутъ таковы, что

$$p_1=\text{const.},\ p_2=\text{const.},\ldots,p_{n-1}=\text{const.},$$

а по теоремѣ IV должны имѣть

$$p_1=\pi_1',\ p_2=\pi_2',\ldots,p_{n-1}=\pi_{n-1}', \qquad (22)$$

при условіяхъ относительно корней полинома X

$$\pi_i'=\pi_i''. \qquad (i=1,2,\ldots,n-1) \qquad (23)$$

Съ другой стороны, означая черезъ S_i, R_i, T_i, X_i значенія S, R, T, X при $x=x_i$,

$$\frac{-S_1+\sqrt{X_1}}{R_1}=\frac{-S_2+\sqrt{X_2}}{R_2}=\ldots=\frac{-S_n+\sqrt{X_n}}{R_n}=y.$$

Отсюда

$$\int\frac{\varrho_1dx_1}{\sqrt{X_1}}=\int\frac{\varrho_2dx_2}{\sqrt{X_2}}=\ldots=\int\frac{\varrho_ndx_n}{\sqrt{X_n}},$$

или

$$\frac{\varrho_1dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{\varrho_2dx_2}{\sqrt{X_2}}=\ldots=\frac{\varrho_ndx_n}{\sqrt{X_n}}.$$

Такъ какъ, по уравненіямъ (1),

$$\frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{F'(x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}}=\ldots=\frac{F'(x_n)dx_n}{\sqrt{X_n}}, \qquad (2)$$

то

$$\frac{\varrho_1}{F'(x_1)} = \frac{\varrho_2}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{\varrho_n}{F'(x_n)},$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_n} = 0, \\
&\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n}{\varrho_n} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{x_1^{n-2}}{\varrho_1} + \frac{x_2^{n-2}}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{\varrho_n} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

т. е. $\frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$ допускаетъ инваріантное преобразованіе и именно характера (22). Слѣдовательно, $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$, при условіи (120), подходитъ подъ первую изъ формулъ (81) и, какъ легко убѣдиться, тогда въ этой формулѣ слѣдуетъ положить $\varphi = 1$.

§ 7. Интегралы (80) приводятся къ

$$\int \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}, \tag{123}$$

гдѣ $\varphi(\xi)$ раціональная функція, при помощи подстановки

$$\frac{\lambda}{\mu} = \xi,$$

гдѣ λ и μ цѣлыя функціи $n^{\text{-ой}}$ и $(n-1)^{\text{-ой}}$ степеней

$$\left.\begin{aligned}
M &= x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} - \ldots - (-1)^n M_n^{(k)}, \\
\lambda &= \quad - L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)},
\end{aligned}\right\} \tag{124}$$

а $L_i^{(k)}$ и $M_i^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Можно доказать, что всѣ интегралы вида $\int \frac{f(x)}{\sqrt{X}} dx$, приводящіеся къ интегралу (123) подстановкой

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \xi,$$

гдѣ ϱ и σ цѣлыя функціи степени не выше n-ой каждая, заключаются въ формулахъ (80).

Положимъ

$$\eta = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}.$$

Тогда интегралъ (123) обратится въ другой интегралъ того же типа

$$\int \frac{\Psi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{a\eta^2 + b\eta + c}},$$

$$\eta = \frac{\alpha\varrho + \beta\sigma}{\gamma\varrho + \delta\sigma}.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \varrho_n x^n + \varrho_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varrho_1 x + \varrho_0, \\ \sigma &= \sigma_n x^n + \sigma_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \sigma_1 x + \sigma_0, \end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

выберемъ α, β, γ, δ такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} \alpha\varrho_n \quad + \beta\delta_n \quad &= 1, \\ \alpha\varrho_{n-k} + \beta\delta_{n-k} &= 0, \\ \gamma\varrho_n \quad + \delta\sigma_n \quad &= 0, \\ \gamma\varrho_{n-k} + \delta\sigma_{n-k} &= (-1)^k. \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

При нѣкоторыхъ значеніяхъ k можно опредѣлить α, β, γ, δ, удовлетворяющія этой системѣ уравненій, ибо не можетъ для всѣхъ значеній k опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \varrho_n & \sigma_{n-1} \\ \varrho_k & \sigma_{n-k} \end{vmatrix}$$

равняться нулю или, что тоже, не могутъ имѣть равенства

$$\frac{\varrho_n}{\sigma_n} = \frac{\varrho_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = \ldots = \frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\varrho_0}{\sigma_0},$$

ибо тогда

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \text{const.}$$

Слѣдовательно, если $\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ приводится къ дифференціалу

$$\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$$

подстановкой $\xi = \frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ, σ имѣютъ значенія (125), то тотъ же дифференціалъ приводится къ

$$\frac{\Psi(\eta)d\eta}{\sqrt{A'\eta^2 + B'\eta + C'}}$$

подстановкой

$$\eta = \frac{\varrho'}{\sigma'},$$

гдѣ

$$\varrho' = \varrho'_n x^n + \varrho'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varrho'_1 x + \varrho'_0,$$

$$\sigma' = \sigma'_n x^n + \sigma'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \sigma'_1 x + \sigma'_0,$$

$$\sigma'_n = 0, \quad \varrho'_n = 1, \quad \sigma'_{n-k} = (-1)^k, \quad \varrho'_{n-k} = 0. \tag{127}$$

Положимъ сперва A' отличнымъ отъ нуля. Тогда

$$A'\eta^2 + B'\eta + C' = A'(\eta + \alpha)(\eta + \beta),$$

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sigma'\varphi\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)\frac{d\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}}\sqrt{(\varrho + \sigma\alpha)(\varrho + \sigma\beta)}}\,dx.$$

Отсюда

$\frac{\sqrt{(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma\beta)}}{\sqrt{X}} =$ раціональной функціи отъ x, или

$$\omega_1^2(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma'\beta) = \omega_2^2 X, \tag{128}$$

гдѣ ω_1 и ω_2 цѣлые полиномы, которые можно предположить взаимно-простыми.

Если предположить, что у полинома X нѣтъ кратныхъ корней, а потому X не можетъ дѣлиться на квадратъ ω_1^2, то

$$\omega_1 = 1.$$

Такъ какъ $(\varrho + \sigma\alpha)(\varrho + \sigma\beta)$ той же степени, что и X въ случаѣ, если X степени $2n$-ой, т. е. a_{2n} не равно нулю, то $\omega_2^2 = \text{const}$. Сравнивая при этомъ коэффиціенты при высшихъ степеняхъ, получаемъ

$$\omega_2^2 = a_{2n}.$$

Въ случаѣ $a_{2n}=0$, равенства (121) быть не можетъ при конечныхъ значеніяхъ α и β, ибо въ лѣвой части полиномъ четной степени, въ правой нечетной.

Полагая же $A'=0$ [или, что тоже, $\beta=\infty$, $A'\beta=B'$], получимъ

$$B'(\varrho'+\sigma'\alpha)\sigma'=X, \tag{129}$$

равенство возможное только въ случаѣ $a_{2n}=0$.

Изъ тождества (128), которое по вышедоказанному можно написать такъ

$$\begin{gathered}(\varrho'+\sigma'\alpha)(\varrho'+\sigma'\beta)=X=\\ =(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})\ldots(x-\alpha_{2n}),\end{gathered} \tag{130}$$

имѣемъ

$$\begin{gathered}\varrho'_n\quad+\sigma'_n\alpha=1,\ \varrho'_n\quad+\sigma'_n\beta=1,\\ \varrho'_{n-1}+\sigma'_{n-1}\alpha=-\pi'_1,\ \varrho'_{n-1}+\sigma'_{n-1}\beta=-\pi''_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varrho'_{n-k}+\sigma'_{n-k}\alpha=(-1)^k\pi'_k,\ \varrho'_{n-k}+\sigma'_{n-k}\beta=(-1)^k\pi''_k,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varrho'_0+\sigma'_0\alpha=(-1)^n\pi'_k,\ \varrho'_0+\sigma'_0\beta=(-1)^n\pi''_n.\end{gathered}$$

Легко видѣть, что изъ этихъ условій при значеніяхъ $\sigma'_n, \varrho'_n, \sigma'_{n-k}, \varrho'_{n-k}$ (127) получаемъ

$$\alpha=\pi'_k,\ \beta=\pi''_k$$

$$\varrho'_{n-l}=(-1)^l M_l^{(k)},\ \sigma'_{n-l}=(=1)^l L_l^{(k)}, \tag{131}$$

гдѣ $M_l^{(k)}$, $L_l^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Исходя изъ тождества (129), придемъ къ тому же результату (131), только $L_k^{(l)}$, $M_k^{(l)}$ будутъ имѣть значенія не (20) и (21), а (89) и (90).

Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Теорема XV.

Всякій интегралъ $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\int\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{A\xi^2+B\xi+C}}$ раціональной подстановкой $\xi=\frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ и σ полиномы каждый сте-

нени не ниже n, если X есть полиномъ степени $2n$ или $2n-1$, не имѣющій кратныхъ корней, заключается въ классѣ интеграловъ, опредѣляемомъ формулами (80), и дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ допускаетъ инваріантное преобразованіе (19).

Интегралы $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, приводящіеся къ интегралу (123) подстановками

$$\xi = \frac{\varrho}{\sigma},$$

въ которыхъ ϱ и σ полиномы степеней высшихъ n, уже не опредѣляются формулами (80), но для этихъ интеграловъ можно установить точку зрѣнія, подобную предыдущей. Можно разсматривать $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, какъ дифференціалъ $\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\Phi}}$, гдѣ Φ полиномъ высшей степени, чѣмъ X, имѣющій кратныя корни, такъ что

$$\Phi = X\Theta^2,$$

$$\varphi(x) = f(x)\Theta,$$

гдѣ Θ цѣлая функція. При надлежащемъ выборѣ Θ дифференціалъ $\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\Phi}}$ будетъ дифференціаломъ, допускающимъ инваріантное преобразованіе, т. е. допускающимъ совмѣстное существованіе двухъ системъ дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{\Phi_2}} + \ldots + \frac{dx_m}{\sqrt{\Phi_m}} = 0, \\
&\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{\Phi_2}} + \ldots + \frac{x_m\,dx_m}{\sqrt{\Phi_m}} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (132) \\
&\frac{x_1^{m-2}dx_1}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{x_2^{m-2}dx_2}{\sqrt{\Phi_2}} + \ldots + \frac{x_m^{m-2}dx_m}{\sqrt{\Phi_m}} = 0,
\end{aligned}$$

гдѣ степень Φ равна $2m$, и обыкновенныхъ

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\psi(x_1)} + \frac{1}{\psi(x_2)} + \ldots + \frac{1}{\psi(x_m)} = 0, \\
&\frac{x_1}{\psi(x_1)} + \frac{x_2}{\psi(x_2)} + \ldots + \frac{x_m}{\psi(x_m)} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{x_1^{m-2}}{\psi(x_1)} + \frac{x_2^{m-2}}{\psi(x_2)} + \ldots + \frac{x_m^{m-2}}{\psi(x_m)} = 0.
\end{aligned}
\tag{133}
$$

Разсуждая, какъ при доказательствѣ предыдущей теоремы, выводимъ тождество (128). въ которомъ, въ предположеніи, что X не имѣетъ кратныхъ корней, должны положить $\omega_1 = 1$. Полагая $\omega_2 = \Theta$, докажемъ совмѣстное существованіе равенствъ (132) и (133).

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma'\beta) = \Theta^2 X = \Phi, \tag{134}$$

когда a_{2n} не равно нулю, и

$$B'(\varrho' + \sigma'\alpha)\sigma' = \Theta^2 X = \Phi \tag{135}$$

въ противномъ случаѣ.

Какъ выше, докажемъ, что можно всегда предполагать

$$\sigma'_n = 0, \quad \varrho'_n = 1, \quad \sigma'_{n-k} = (-1)^k, \quad \varrho'_{n-k} = 0, \tag{127}$$

откуда, пользуясь равенствами (134) и (135), выведемъ для коэффиціентовъ ϱ' и σ' выраженія, точно такъ же составленныя изъ корней полинома

$$\Phi = \Theta^2 X = (x-a)(x-a)(x-b)(x-b)\ldots(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}),$$

какъ выраженія (131) составлены изъ корней

$$X = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}.$$

Въ настоящемъ случаѣ интегралъ $\int \frac{f(x)}{\sqrt{X}} dx$ опредѣляется формулами (80), но при условіи, что полиномъ X замѣненъ черезъ $\Phi = \Theta^2 X$, а потому дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ можетъ быть представленъ въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)}{\sqrt{\Phi}} dx$, допускающаго инваріантное преобразованіе или, что тоже, совмѣстное существованіе уравненій (132) и (133).

Такимъ образомъ выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XVI.

Всякій интегралъ $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\int \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2+B\xi+C}}$ подстановкой $\xi=\frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ и σ полиномы какой угодно степени, принадлежитъ къ классу псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (80), но относящимися не къ $\sqrt{X}$, а къ $\sqrt{\Phi}$, гдѣ $\Phi=\Theta^2 X$, а Θ нѣкоторая цѣлая функція, и дифференціалъ $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ всегда можетъ быть представленъ въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инваріантное преобразованіе.

Къ этому типу интеграловъ принадлежатъ всѣ интегралы вида

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}},$$

гдѣ ϱ цѣлая функція $(n-1)$-ой степени, X цѣлая функція $2n$-ой степени, интегрируемые въ конечномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изслѣдованія Чебышева [1]) показываютъ, что если интегралъ $\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}}$ находится въ конечномъ видѣ, то

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \beta \lg\left(\frac{-S+\Theta\sqrt{X}}{-S-\Theta\sqrt{X}}\right)+C, \tag{137}$$

гдѣ

$$S^2-\Theta^2 X=\alpha,$$

а α и β постоянныя, или на основаніи этого послѣдняго равенства

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \beta \lg\left(\frac{-S+\Theta\sqrt{X}}{R}\right)+C,$$

гдѣ R какое угодно постоянное, напримѣръ,

$$R=\alpha.$$

---

[1]) П. Л. Чебышевъ. Объ интегрированіи ирраціональныхъ дифференціаловъ. Сочиненія, т. I, ст. 145.

Равенство (136) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = \Theta^2 X,$$

гдѣ

$$R = a, \quad T = -1,$$

или

$$S^2 - RT = \Phi. \tag{138}$$

Изъ этого послѣдняго равенства и изъ (137), представленнаго въ слѣдующемъ видѣ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\psi(x)dx}{\sqrt{\Phi}} = \beta \lg\left(\frac{-S+\sqrt{\Phi}}{R}\right) + C, \tag{139}$$

выводимъ такимъ же образомъ, какъ въ концѣ §-а 6-ого изъ (120) и (11) вывели совмѣстное существованіе уравненій (1) и (122), слѣдующую теорему:

Теорема XVII.

Всякій дифференціалъ $\frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$, въ которомъ ϱ цѣлая функція $(n-1)$-ой степени, X полиномъ $2n$-ой степени безъ кратныхъ корней, можетъ быть представленъ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ, въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инваріантное преобразованіе и при томъ типа (22).

Такимъ образомъ, первый случай интегрируемости $\frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$ будетъ тотъ, когда

$$\pi_i' = \pi_i'', \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

второй, когда корни полинома $(x-a)^2 X$ удовлетворяютъ подобнымъ соотношеніямъ, третій, когда тоже относится къ корнямъ полинома $(x-a)^2(x-b)^2 X$ и т. д.

Изъ этихъ соотношеній можемъ, во первыхъ, опредѣлить $n-1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять корни полинома X, и затѣмъ неизвѣстныя $a, b, c \ldots$, корни полинома Θ. По этимъ послѣднимъ, на основаніи сказаннаго въ концѣ §-а 6-ого, можно опредѣлить $\psi(x)$ и, наконецъ, ϱ.

§ 8. Въ предыдущемъ параграфѣ мы исключительно говорили о приведеніи $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{A\xi^2+B\xi+C}}d\xi$ при помощи раціональной подстановки.

Приведеніе $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \psi(\xi, \sqrt{A\xi^2+B\xi+C})d\xi$ при инваріантномъ преобразованіи (13) совершается при помощи подстановки

$$\frac{M_k+N_k\sqrt{X_i}}{M_1+N_1\sqrt{X_i}}=p_k,$$

гдѣ M_k, N_k, M_1, N_1 цѣлыя функціи отъ x. Подстановка эта въ общемъ случаѣ ирраціональна.

Но тотъ же интегралъ приводится къ интегралу отъ раціональной дроби подстановкой

$$y=\frac{-S+\sqrt{X}}{R},$$

гдѣ S, R цѣлыя функціи отъ x (10). такъ какъ p_k выражается раціонально въ y по формуламъ (5); на основаніи тѣхъ же формулъ $dp_k=\Theta(y)dy$, гдѣ $\Theta(y)$ раціональная функція отъ y; наконецъ, по формуламъ (48) и (51), $\sqrt{K}$ выражается также раціонально черезъ y.

Отсюда на основаніи того, что

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}=\int \psi(p, \sqrt{R})dp, \tag{56}$$

получаемъ

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}=\int \Delta(y)dy,$$

гдѣ $\Delta(y)$ раціональная функція отъ y.

Въ частномъ случаѣ, когда инваріантное преобразованіе линейнаго характера (19), можно положить (см. доказательство теоремы III)

$$S=0,$$

$$-RT=X,$$

и $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ приведется къ $\int \Delta(y)dy$ подстановкой

$$\frac{\sqrt{X}}{R}=y, \tag{140}$$

или

$$\sqrt{X} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) y, \qquad (141)$$

представляющей обобщеніе третьей подстановки Эйлера

$$\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = (x - \alpha_1) y.$$

Раффи замѣчаетъ, что всякое Якобіевское преобразованіе, совершенное надъ эллиптическимъ дифференціаломъ, допускающимъ инваріантное преобразованіе, даетъ другой эллиптическій дифференціалъ, допускающій инваріантное преобразованіе.

Производя преобразованіе $z = x^2$ надъ дифференціаломъ

$$\frac{f(z)\,dz}{2k_1 k_2 \sqrt{z\left(z - \frac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}, \qquad (142)$$

получимъ

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - k_1^2 x^2)(1 - k_2^2 x^2)}}. \qquad (143)$$

Если

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k_1^2 k_2^2 z}\right) &= -f(z), \\ f\left(\frac{1 - k_2^2 z}{k_2^2(1 - k_1^2 z)}\right) &= -f(z), \qquad (144) \\ f\left(\frac{1 - k_1^2 z}{k_1^2(1 - k_2^2 z)}\right) &= -f(z), \end{aligned}$$

то [на основаніи формулъ (89), (90)] дифференціалъ (142) допускаетъ инваріантное преобразованіе (19).

Слѣдовательно, дифференціалъ (143) будетъ допускать инваріантное преобразованіе, если

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k_1^2 k_1^2 x^2}\right) &= -f(x^2), \\ f\left(\frac{1 - k_2^2 x^2}{k_2^2(1 - k_1^2 x^2)}\right) &= -f(x^2), \qquad (145) \\ f\left(\frac{1 - k_1^2 x^2}{k_1^2(1 - k_2^2 x^2)}\right) &= -f(x^2). \end{aligned}$$

При $k_1 = 1$, $k_2 = k$ получимъ формулы, упомянутыя въ началѣ статьи.

Замѣтимъ, что первому случаю (145) соотвѣтствуетъ инваріантное преобразованіе тоже линейнаго характера, но въ двухъ другихъ случаяхъ это преобразованіе будетъ типа (13) со второй степенью p_1.

Такимъ образомъ, дифференціалъ (143), какъ допускающій инваріантное преобразованіе, по теоремѣ IX интегрируется въ конечномъ видѣ. Этотъ результатъ, полученный Эрмитомъ, подробно доказывается Раффи въ вышеупомянутой статьѣ.

Къ изложенному Раффи съ своей стороны прибавимъ, что изъ его изслѣдованій можно вывести и подстановки, при помощи которыхъ интегралы Эрмита приводятся къ интеграламъ отъ раціональныхъ дробей. Стоитъ только въ формулѣ (140) положить $R = z$, $R = z - \frac{1}{k_1^2}$ и $R = z - \frac{1}{k_2^2}$.

Тремъ случаямъ (144) соотвѣтствуютъ три подстановки

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}{z} = y, \\
&\frac{\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}{z-\frac{1}{k_1^2}} = y, \\
&\frac{\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}{z-\frac{1}{k_2^2}} = y,
\end{aligned}\right\} \tag{146}$$

при помощи которыхъ интегралъ

$$\int \frac{f(z)dz}{2k_1 k_1 \sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}$$

приводится къ интегралу отъ раціональной дроби $\int \varLambda(y)dy$.

Къ $\int \varLambda(y)dy$ приведется интегралъ

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-k_1^2x^2)(1-k_2^2x^2)}}, \tag{147}$$

при условіяхъ (145), причемъ зависимости между y и x получимъ, замѣнивъ въ уравненіяхъ (146) z на x^2.

Отбрасывая постоянные множители, не имѣющіе очевидно, значенія, получимъ три Эрмитовскія подстановки, приводящія интегралъ (147) къ интегралу отъ раціональной дроби,

$$\frac{\sqrt{(1-k_1^2x^2)(1-k_2^2x^2)}}{x}=p,$$

$$\frac{x\sqrt{1-k_2^2x^2}}{\sqrt{1-k_1^2x^2}}=p, \qquad (148)$$

$$\frac{x\sqrt{1-k_1^2x^2}}{\sqrt{1-k_2^2x^2}}=p.$$

Въ частномъ случаѣ для Эйлеровыхъ интеграловъ (91) и (92), гдѣ $k_1^2=i$, $k_2^2=-i$,

$$f\left(\frac{1}{k_1^2k_1^2x^2}\right)=-f(x^2),$$

получаемъ подстановку

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}}=p,$$

указанную еще Эйлеромъ.

LE PROBLÈME MATHÉMATIQUE DES VIBRATIONS UNIVERSELLES.

Par A. Korn.

Le problème „des vibrations universelles“ me paraît, après le problème de Dirichlet, le problème mathématique le plus important pour la physique, parce qu'il sera à l'avenir le fondement des théories, qui expliquent les forces apparentes à distance d'une manière purement mécanique.

Il s'agit de la question suivante:

Nous supposons dans un continu infini, qui se comporte, du moins, quand il s'agit de mouvements rapides, comme un liquide parfait, un nombre quelconque de particules faiblement compressibles; en appelant u, v, w les vitesses d'un point (x, y, z) quelconque du système (supposées continues dans tout l'espace et s'annulant à l'infini), peut-on démontrer l'existence d'une vibration de la forme

$$u = U \sin \frac{t}{T} 2\pi, \qquad v = V \sin \frac{t}{T} 2\pi, \qquad w = W \sin \frac{t}{T} 2\pi, \tag{1}$$

où T représente une durée très petite; il faut ajouter que U, V, W, quoique assez grandes, ne doivent pas être de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de la vitesse, ni

$$\frac{dU}{dt}, \quad \frac{dV}{dt}, \quad \frac{dW}{dt}$$

de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de l'accélération. Quelles sont les valeurs possibles de T, et comment peut-on trouver les fonctions correspondantes U, V, W?

Une première analyse des équations du mouvement de notre système nous mène au résultat suivant:

Il faut que

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$W = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (3\,a)$$

à l'extérieur,

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \qquad (3\,b)$$

à l'intérieur des particules, où

$$k^2 = 4\pi^2 \frac{\alpha^2}{T^2} \qquad (4)$$

(α^2 une constante dépendant de la compressibilité des particules), et Φ doit être continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini comme un potentiel.

Les domaines i et e, c'est ainsi que je désignerai l'intérieur et l'extérieur des particules, étant donnés, il s'agit de démontrer l'existence de solutions Φ, k et de trouver des méthodes pour obtenir ces solutions dans les cas les plus importants pour la physique. Voilà ce que j'appelle le problème mathématique des vibrations universelles.

Pour la première partie de notre tâche, concernant l'existence des solutions, nous pouvons nous servir d'une méthode analogue à celle imaginée par M. Poincaré [1]) à l'occasion du problème:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$$

à l'intérieur d'une surface fermée ω,

$$\Phi = 0 \quad \text{à la surface } \omega;$$

[1]) H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1894.

mais il est à remarquer que ces deux problèmes diffèrent en bien des points, comme on verra déjà par l'exemple le plus simple, par le cas d'une sphère. A cause de ces divergences il m'a paru utile de donner la démonstration complète pour l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2, \ldots, k_j^2, \ldots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots,$$

qui représentent des solutions de notre problème, dans la première partie de cet ouvrage.

Dans la deuxième partie nous traiterons des méthodes, par lesquelles on peut obtenir ces solutions dans les cas les plus simples et en même temps les plus importants pour la physique, c'est-à-dire quand les particules sont de petites sphères dont les rayons sont assez petits en comparaison avec leurs distances. Le problème d'une seule sphère trouve sa solution complète à l'aide des fonctions de Bessel, pour le problème de plusieurs sphères nous démontrerons une méthode, analague à celle de Murphy pour le problème analogue de l'électrostatique. J'ai déjà fait usage de cette méthode dans ma théorie du frottement dans les masses continues [1]), mais sans donner une démonstration de cette méthode, évidente au premier aspect comme celle de Murphy. Mais comme on ne doit pas toujours se fier à ces évidences apparentes, il m'a paru nécessaire de combler cette lacune et de démontrer la méthode en question avec toute la rigueur nécessaire. On sait que des méthodes analogues existent pour les problèmes les plus différents de la physique théorique; nous retrouvons ici un des instruments les plus puissants de l'analyse mathématique.

---

[1]) A. Korn, Eine Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, 1901. (Ferd. Dümmlers Verlag).

PREMIÈRE PARTIE.

LES THÉORÈMES D'EXISTENCE ET LES FONCTIONS UNIVERSELLES.

CHAPITRE I.

COROLLAIRE D'UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

§ 1. En m'appuyant sur un théorème de M. Poincaré, que j'ai démontré récemment dans toute sa généralité [1]), je me propose de démontrer le lemme suivant:

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ p fonctions continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace sur lesquelles nous ferons la seule supposition qu'elles soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe entre elles aucune relation

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_p f_p = 0$$

dans tout l'espace, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant des constantes réelles satisfaisant à l'équation

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1,$$

et qu'elles aient toutes les qualités de potentiels à l'extérieur d'une surface fermée ω de courbure continue, qui peut se composer de plusieurs nappes séparées; on peut toujours (pour un nombre p assez grand) trouver p constantes réelles

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

de manière que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1 \tag{5}$$

et que la fonction

$$\varphi = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p \tag{6}$$

satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 d\tau}{\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{\gtrless} \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}} \text{ [2])}, \tag{7}$$

---

[1]) Abhandlungen zur Potentialtheorie, № 4, p. 6, Berlin 1902. (Ferd. Dümmler's Verlag).

[2]) On peut aussi bien écrire $\overline{\gtrless} \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$.

où a^2 représente une constante finie ne dépendant que de la forme de la surface ω et tout à fait indépendante des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$.

§ 2. La démonstration à l'aide du théorème de M. Poincaré est extrêmement facile; on peut d'après ce théorème toujours obtenir l'inégalité

$$\frac{\int_i \psi^2 d\tau}{\int_i \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}$$

et d'autant plus l'inégalité (7), puisque

$$\frac{\int_i \psi^2 d\tau}{\int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i \psi^2 d\tau}{\int_i \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}.$$

CHAPITRE II.

SOLUTION D'UN PROBLÈME TRÈS GÉNÉRAL.

§ 1. Nous nous occuperons maintenant d'un problème très général, que nous énoncerons de la manière suivante:

Soient f et φ deux fonctions continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur d'une surface ω de courbure continue (qui peut se composer de plusieurs nappes séparées) et $\varphi \neq 0$.

On cherche une fonction U, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, qui satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f, \tag{8}$$

et qui a toutes les qualités d'un potentiel à l'extérieur de ω (k^2 un nombre positif quelconque donné d'avance).

Nous formons successivement les fonctions

$$\left.\begin{aligned} u_0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi}\int_i f(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \\ u_j(x, y, z) &= +\frac{1}{4\pi}\int_i \varphi^2 u_{j-1}(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \\ &(j = 1, 2, 3 \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

r étant la distance du point (x, y, z) d'un élément $d\tau$ (ξ, η, ζ); alors on a

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= f, \\ \Delta u_1 &= -\varphi^2 u_0, \\ \Delta u_2 &= -\varphi^2 u_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta u_j &= -\varphi^2 u_{j-1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{10}$$

à l'intérieur de ω.

S'il était possible de démontrer que

$$\lim_{j=\infty} u_j = 0,$$

et que la série

$$u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \dots$$

représente une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, on pourrait affirmer que cette fonction est une solution de notre problème.

Avant d'analyser ces questions de convergence à l'aide de la méthode connue de M. Poincaré, il nous faut démontrer quelques propriétés des fonctions u_0, u_1, u_2, ...

§ 2. Supposons qu'il y ait entre les $p+1$ fonctions

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \dots, u_{p-1},\ u_p$$

une relation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p = 0, \tag{11}$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_p^2 = 1 \tag{12}$$

(p un nombre entier et fini).

Nous allons d'abord démontrer que l'on peut toujours déduire de (11) une relation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0, \tag{13}$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_{p-1}^2 = 1, \tag{14}$$

dans ces trois cas:

1) si l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p = 0 \tag{15a}$$

ou

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \beta_2 x^{p-2} + \dots + \beta_p = 0 \tag{15b}$$

admet une racine imaginaire

$$x_1 + ix_2 \quad (x_2 \neq 0);$$

2) si cette équation a une racine réelle et négative;

3) si cette équation a une racine double.

En effet, définissons les $p+2$ constantes

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}, x, a$$

par les équations

$$\begin{aligned}
a\gamma_0 &= \beta_0, \\
a\gamma_1 &= \beta_1 + ax\gamma_0, \\
a\gamma_2 &= \beta_2 + ax\gamma_1, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a\gamma_{p-1} &= \beta_{p-1} + ax\gamma_{p-2}, \\
0 &= \beta_p + ax\gamma_{p-1}, \\
\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &+ \dots + \gamma_{p-1}^2 = 1,
\end{aligned} \tag{16}$$

ce qui est possible de p manières, x étant une racine quelconque de l'équation (15b); alors on a

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \\
&= x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p)
\end{aligned} \tag{17}$$

et à cause de (10)

$$\begin{aligned}
&\Delta\{\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p\} \\
&= -x\varphi^2\{\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p\}
\end{aligned} \tag{18}$$

à l'intérieur de ω; si maintenant l'équation (15b) admet une racine imaginaire

$$x = x_1 + ix_2 \quad (x_2 \neq 0),$$

on n'a qu'à poser

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = X + iY,$$

à multiplier l'équation (18) par $(X - iY)$ et à intégrer sur le domaine intérieur de ω pour arriver à la relation

$$-\int\limits_{i+e} \left[\frac{\partial(X-iY)}{\partial x}\frac{\partial(X+iY)}{\partial x} + \frac{\partial(X-iY)}{\partial y}\frac{\partial(X+iY)}{\partial y} + \frac{\partial(X-iY)}{\partial z}\frac{\partial(X+iY)}{\partial z}\right] d\tau$$

$$= -(x_1 + ix_2)\int\limits_i \varphi^2(X^2 + Y^2)\, d\tau,$$

qui mène, comme le premier membre est réel et $x_2 \neq 0$, au résultat

$$\int\limits_i \varphi^2(X^2 + Y^2)\, d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = 0, \tag{19}$$

ou, par l'opération Δ,

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0. \tag{20}$$

Si l'équation (15b) a une racine réelle et négative

$$x = -x_0^2,$$

on trouve en multipliant (18) par

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p$$

et en intégrant sur le domaine intérieur de ω

$$-\int\limits_{i+e} \sum \left[\frac{\partial(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p)}{\partial x}\right]^2 d\tau$$

$$-x_0^2 \int\limits_i \varphi^2(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p)^2\, d\tau = 0,$$

et on arrive de nouveau aux résultats (19) et (20), parce que le premier membre de cette équation se composerait de termes négatifs, qui devraient tous s'annuler.

Si enfin l'équation (15*b*) a une racine double que nous pouvons du reste supposer réelle et positive

$$x = \bar{x},$$

on peut déterminer les p constantes $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{p-2}, b$ de façon qu'elles satisfassent aux équations

$$\begin{aligned}
b\delta_0 &= \gamma_0, \\
b\delta_1 &= \gamma_1 + b\bar{x}\delta_0, \\
b\delta_2 &= \gamma_2 + b\bar{x}\delta_1, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
b\delta_{p-2} &= \gamma_{p-2} + b\bar{x}\delta_{p-3}, \\
0 &= \gamma_{p-1} + b\bar{x}\delta_{p-2}, \\
\delta_0^2 + \delta_1^2 &+ \delta_2^2 + \ldots + \delta_{p-2}^2 = 1,
\end{aligned} \tag{21}$$

et l'équation (17) devient

$$F - 2\bar{x}F_1 + \bar{x}^2 F_2 = 0, \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned}
F &= \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\
F_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_i \frac{\varphi^2 F}{r}\, d\tau, \\
F_2 &= \frac{1}{4\pi}\int_i \frac{\varphi^2 F_1}{r}\, d\tau.
\end{aligned} \tag{23}$$

De (22) et (23) on tire

$$\Delta F + 2\bar{x}\varphi^2 F - \bar{x}^2\varphi^2 F_1 = 0$$

à l'intérieur de ω; en multipliant par $(-F_1)\,d\tau$ et en intégrant sur i on obtient [1])

$$\int_i \varphi^2 (F^2 - 2\bar{x}FF_1 + \bar{x}^2 F_1^2)\, d\tau = 0,$$

---

[1]) On a

$$\int_i F_1 \Delta F d\tau = \int_i F \Delta F_1 d\tau = -\int_i \varphi^2 F^2 d\tau.$$

d'où

$$F - xF_1 = 0, \tag{24}$$

uue équation de la forme

$$\Gamma_0 u_0 + \Gamma_1 u_1 + \dots + \Gamma_{p-1} u_{p-1} = 0 ,$$

$\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}$ étant des constantes auxquelles on peut encore imposer la condition

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots + \Gamma_{p-1}^2 = 1 .$$

Nous avons ainsi démontré la proposition que l'on peut toujours réduire l'équation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p = 0$$

à une équation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_m u_m = 0, \quad (m \overline{\gtrless} p) \tag{25}$$

dans laquelle $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ représentent des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_m^2 = 1 \tag{26}$$

et possédant la propriété, que l'équation

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_m x^m = 0 \tag{27}$$

admet m racines positives et simples.

Désignons ces racines par $x_1, x_2, \dots, x_m$, on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ x_1 & x_2 & \dots x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots x_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(parce qu'il n'y a pas de racines multiples), et on pourra, à l'aide des m relations

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \\ u_1 = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \cdots + x_m U_m, \\ u_2 = x_1^2 U_1 + x_2^2 U_2 + \cdots + x_m^2 U_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{m-1} = x_1^{m-1} U_1 + x_2^{m-1} U_2 + \cdots + x_m^{m-1} U_m, \end{array}\right\} \qquad (28)$$

trouver pour $U_1, U_2, \ldots, U_m$ des expressions linéaires par rapport à $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$. Comme $x_1, x_2, \ldots, x_m$ satisfont à l'équation (27), on tire de (25) et (28)

$$u_m = x_1^m U_1 + x_2^m U_2 + \cdots + x_m^m U_m,$$

et on pourra remplacer la définition (28) des $U_1, U_2, \ldots, U_m$ par la définition

$$u_j = x_1^j U_1 + x_2^j U_2 + \cdots + x_m^j U_m. \quad (j=1,2,\ldots,m) \qquad (29)$$

Par l'opération Δ il s'ensuit

$$-\varphi^2 u_{j-1} = x_1^j \Delta U_1 + x_2^j \Delta U_2 + \cdots + x_m^j \Delta U_m \qquad (30)$$
$$(j=1,2,\ldots m)$$

ou, comme on a d'après (28)

$$\varphi^2 u_{j-1} = x_1^{j-1} \varphi^2 U_1 + x_2^{j-1} \varphi^2 U_2 + \cdots + x_m^{j-1} \varphi^2 U_m, \qquad (31)$$
$$(j=1,2,\ldots,m)$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x_1^{j-1}(x_1 \Delta U_1 + \varphi^2 U_1) + x_2^{j-1}(x_2 \Delta U_2 + \varphi^2 U_2) + \cdots \\ \qquad + x_m^{j-1}(x_m \Delta U_m + \varphi^2 U_m), \end{array}\right\} \qquad (32)$$

c'est-à-dire m équations linéaires et homogènes par rapport aux m quantités

$$x_1 \Delta U_1 + \varphi^2 U_1, \quad x_2 \Delta U_2 + \varphi^2 U_2, \ldots, x_m \Delta U_m + \varphi^2 U_m,$$

dont le déterminant est $\neq 0$; il faut donc que

$$x_j \Delta U_j = -\varphi^2 U_j, \qquad (j=1,2,\ldots,m) \qquad (33)$$

(à l'intérieur de ω).

Il y a pour chaque U_j deux possibilités

$$U_j = 0,$$

ou

$$U_j \neq 0;$$

dans le dernier cas il faut aussi que le x_j correspondant soit $\neq 0$.

La première équation (28) nous apprend donc que l'on pourra toujours tirer d'une équation de la forme (11) la conclusion suivante: On aura

$$u_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_n, \text{[1]} \qquad (n \overline{\gtrless} p)$$

$U_1, U_2, \dots, U_n$ étant des fonctions, continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à des équations

$$\Delta U_j = -\frac{1}{x_j}\varphi^2 U_j \qquad (j=1,2,\dots,n) \tag{34}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω; les x_j sont des nombres positifs, différents de zéro, satisfaisant à l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p = 0. \tag{35}$$

On peut toujours en conséquence de la supposition (11) affirmer que la fonction

$$U = -\sum_{1}^{n}{}_j \frac{\frac{1}{x_j}}{k^2 - \frac{1}{x_j}} U_j \tag{36}$$

représente une solution de notre problème

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U = f \quad \text{(à l'intérieur de } \omega),$$
$$\Delta U \qquad\quad = 0 \quad \text{(à l'extérieur de } \omega),$$

pourvu que $k^2 \neq \frac{1}{x_j}$.

La solution (36) a, comme fonction de k^2, n pôles simples

$$k^2 = \frac{1}{x_j}. \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

---

[1]) Pour f on trouvera la relation

$$f = -\varphi^2 \sum_{1}^{n}{}_j \frac{U_j}{x_j}.$$

Supposons qu'il y ait une autre solution U' de notre problème; il faut alors que la fonction $U' - U$, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfasse à la condition

$$\Delta(U' - U) = -k^2\varphi^2(U' - U) \quad \text{(à l'intérieur de } \omega\text{)}, \tag{37}$$

et qu'elle ait toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

§ 3. Supposons maintenant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_p u_p = 0,$$

p étant un nombre *fini*, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1.$$

Nous formerons successivement les fonctions

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= -\frac{1}{4\pi}\int_i [\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})]\frac{d\tau}{r}, \\ w_j &= +\frac{1}{4\pi}\int_i \varphi^2 w_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \qquad (j=1,2,\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

p étant un nombre entier et fini, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1.$$

Nous allons, d'une manière analogue à la méthode connue de M. Poincaré, démontrer que l'on peut (en prenant p asser grand) choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de façon que

$$\text{abs.}(k^{2j} w_j) \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \tag{39}$$

si A représente une constante finie, L satisfait à la condition

$$0 < L < 1;$$

k^2 peut être un nombre aussi grand que l'on veut, mais donné à l'avance.

L'inégalité (39) une fois démontrée, on pourra affirmer que la fonction

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \dots \tag{40}$$

représente une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \tag{41}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

Nous chercherons pour la démonstration de notre proposition une limite supérieure pour le quotient

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 \, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 \, d\tau},$$

m étant un nombre entier et fini quelconque, mais donné à l'avance.

On a évidemment

$$\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = - \int\limits_i w_m \Delta w_m \, d\tau$$

$$\overline{\gtrless} \sqrt{\int\limits_i w_m^2 \, d\tau \int\limits_i (\Delta w_m)^2 d\tau} \; \overline{\gtrless} \; \max. \varphi^2 \sqrt{\int w_m^2 \, d\tau \int w_{m-1}^2 \, d\tau},$$

en désignant par max. φ^2 la plus grande valeur que φ^2 puisse avoir; donc

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 \, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 \, d\tau} \; \overline{\gtrless} \; (\max. \varphi^2)^2 \left[\frac{\int\limits_i w_m^2 \, d\tau}{\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau} \right]^2.$$

Si l'on prend p suffisamment grand, on pourra, d'après le lemme p. 4, choisir $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ de façon que

$$\frac{\int\limits_{i} w_m^2\, d\tau}{\int\limits_{i+e}\left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{\gtrless} \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

(a^2 une constante finie ne dépendant nullement de p ni de w_m), puisque

$$w_m = \alpha_0 u_{m-1} + \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m+1} + \dots + \alpha_p u_{m+p-1}\,.$$

Il viendra donc

$$\frac{\int\limits_{i} \varphi^2 w_m^2\, d\tau}{\int\limits_{i} \varphi^2 w_{m-1}^2\, d\tau} \overline{\gtrless} \frac{C^{\text{-te}}\ \text{finie}}{\sqrt[3]{p^4}} \tag{42}$$

pour un m fini quelconque (mais donné à l'avance), en choisissant p assez grand et en prenant pour $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des valeurs $\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots, \alpha_p^{(m)}$ proprement choisies [1]).

Comme on a

$$\int\limits_{i} \varphi^2 w_{m-1}^2\, d\tau = -\int\limits_{i} w_{m-1}\, \Delta w_m\, d\tau = -\int\limits_{i} w_m\, \Delta w_{m-1}\, d\tau$$

$$= \int\limits_{i} \varphi^2 w_m w_{m-2}\, d\tau\,, \qquad {\scriptstyle (m=1,2,3,\dots)}$$ [2])

on conclura

$$\left[\int\limits_{i} \varphi^2 w_{m-1}^2\, d\tau\right]^2 \overline{\gtrless} \int\limits_{i} \varphi^2 w_m^2\, d\tau \int\limits_{i} \varphi^2 w_{m-2}^2\, d\tau\,,$$

et ainsi successivement en tenant compte de l'inégalité (42)

---

[1]) Nous ajoutons les indices (m), parce que les α varieront avec le nombre m, pendant que p sera tout à fait indépendant de m.

[2]) On posera pour $m = 1$

$$-\varphi^2 w_{m-2} = \alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}).$$

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2 d\tau}{\int\limits_i \frac{1}{\varphi^2}\left\{\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1})\right\}^2 d\tau}$$

$$\overline{\overline{<}} \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_1^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \dots \overline{\overline{<}} \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{C^{te} \textit{ finie}}{\sqrt[3]{p^4}}.$$

Ce résultat n'est démontré jusqu'à présent que pour un m fini quelconque, mais donné à l'avance, il importe de le démontrer pour un m croissant indéfiniment. Nous regarderons pour cela $\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_p^{(m)}$ comme les coordonnées d'un point sur la sphère

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1 \tag{44}$$

dans un espace de $p+1$ dimensions, alors la condition (43) sera remplie pour un centain domaine δ_m de cette sphère.

Nous pourrons de la même manière, en choisissant proprement

$$\alpha_0^{(m+1)}, \ \alpha_1^{(m+1)}, \dots, \alpha_p^{(m+1)},$$

obtenir les inégalités

$$\begin{aligned} &\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2 d\tau}{\int\limits_i \frac{1}{\varphi^2}\left\{\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1})\right\}^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_1^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2 d\tau} \\ &\overline{\overline{<}} \dots \overline{\overline{<}} \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_{m+1}^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{C^{te} \textit{ finie}}{\sqrt[3]{p^4}} \end{aligned} \tag{44}$$

(la C^{te} finie étant toujours tout à fait indépendante de m et de p). Les points

$$\alpha_0^{(m+1)}, \ \alpha_1^{(m+1)}, \dots, \alpha_p^{(m+1)}$$

qui satisfont à la condition (44) se trouveront dans un domaine δ_{m+1} interieur à δ_m, puisque les conditions (43) sont toujours remplies à la

suite des conditions (44). En continuant de cette manière, on trouvera que le domaine δ_{m+2} correspondant doit être intérieur à δ_{m+1}, et ainsi de suite; il faut donc qu'il y ait des valeurs

$$\alpha_j = \lim_{m=\infty} \alpha_j^{(m)}, \qquad (j=0,1,2,\ldots,p) \qquad (45)$$

pour lesquelles les inégalités (44) seront toujours vraies, même si m croît indéfiniment.

Alors nous aurons en posant

$$L_p = \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \qquad (46)$$

et en désignant par B une constante finie, indépendante de j,

$$\int_i \varphi^2 w_j^2 d\tau \overline{\overline{<}} B \cdot L_p^{2j}. \qquad (j=0,1,2\ldots) \qquad (47)$$

En tenant compte que

$$w_j = \frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 w_{j-1} \frac{d\tau}{r},$$

on trouvera

$$w_j^2 \overline{\overline{<}} \frac{\text{Max.}\varphi^2}{16\pi^2} \int_i \varphi^2 w_{j-1}^2 d\tau \int_i \frac{d\tau}{r^2},$$

donc:

$$\text{abs.}\, w_j \overline{\overline{<}} A \cdot L_p^j, \qquad (j=0,1,2\ldots) \qquad (48)$$

A étant une constante finie, indépendante de j.

Si nous prenons maintenant pour k^2 un nombre fini quelconque, mais donné d'avance, nous pourrons toujours en choisissant p assez grand obtenir que

$$k^2 L_p \overline{\overline{<}} L,$$

si L est un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < L < 1,$$

et on aura alors

$$\text{abs.}\,(k^{2j} w_j) \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \qquad (49)$$

ce que nous voulions démontrer.

La série

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \cdots \qquad (50)$$

représentera donc une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}) \tag{51}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

§ 4. Nous supposerons d'abord que k^2 ne soit pas une des racines de l'équation

$$(-k^2)^p \alpha_0 + (-k^2)^{p-1} \alpha_1 + \ldots - k^2 \alpha_{p-1} + \alpha_p = 0,$$

c'est-à-dire que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_p \\ 1 & -k^2 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -k^2 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & -k^2 \end{vmatrix} \tag{52}$$

soit $\neq 0$; on pourra alors définir les $p+1$ fonctions

$$U \quad U' \quad U'', \ldots, U^{(p)}\ ^{1)}$$

par les $p+1$ équations linéaires

$$\begin{aligned} \alpha_0 U + \alpha_1 U' + \alpha_2 U'' + \ldots + \alpha_p U^{(p)} &= w \quad , \\ U - k^2 U' \qquad\qquad &= u_0 \quad , \\ U' - k^2 U'' \qquad &= u_1 \quad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ U^{(p-1)} - k^2 U^{(p)} &= u_{p-1} . \end{aligned} \tag{53}$$

Chacune des fonctions $U, U', \ldots, U^{(p)}$ représentera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω; nous verrons facilement que la première, la fonction U, satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f. \tag{54}$$

---

[1]) Les indices (j) ne doivent pas être pris ici dans le sens que $U^{(j)}$ représente la j-me dérivée de U par rapport à une variable quelconque.

En effet, écrivons les équations (53), à l'exception de la première, de la manière suivante

$$U^{(j-1)} - k^2 U^{(j)} - u_{j-1} = 0, \qquad (j=1,2,\ldots p)\ ^{1)}$$

appliquons-y l'opération Δ:

$$\Delta U^{(j-1)} - k^2 \Delta U^{(j)} + \varphi^2 u_{j-2} = 0, \qquad (=1,2,\ldots,p)\ ^{2)}$$

additionnons ces deux groupes d'équations, après avoir multiplié le premier par $k^2\varphi^2$; on trouvera

$$\begin{array}{c}
(\Delta U + k^2\varphi^2 U - f) - k^2(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) = 0, \\
(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) - k^2(\Delta U'' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\Delta U^{(p-1)} + k^2\varphi^2 U^{(p-1)} + \varphi^2 u_{p-2}) - k^2(\Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}) = 0.
\end{array} \tag{55}$$

Si l'on ajoute à ces p équations la première relation (53) que l'on peut écrire, en tenant compte de (51), de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\Delta U + k^2\varphi^2 U - f) &+ \alpha_1(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) \\
&+ \alpha_2(\Delta U' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1) \\
&+ \cdots\cdots\cdots \\
&+ \alpha_p(\Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}) = 0,
\end{aligned} \tag{56}$$

on a $p+1$ équations linéaires et homogénes par rapport aux p quantités

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U - f,\ \Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0,\ \Delta U'' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1,$$
$$\ldots, \Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1},$$

dont le déterminant (D) est $\neq 0$; ces quantités doivent donc s'annuler, en particulier la fonction U doit satisfaire à l'équation (54) à l'intérieur de ω.

D'après les équations (53) on aura

$$U = \frac{P}{D}, \tag{57}$$

---

[1]) En posant pour $j=1$:

$$U^{(j-1)} = U.$$

[2]) En posant pour $j=1$:

$$\varphi^2 u_{j-2} = -f.$$

où

$$P = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}; \tag{58}$$

nous avons ainsi obtenu une solution U de notre problème, si l'on choisit p suffisamment grand,

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

et ne satisfaisant pas à l'équation

$$D = 0.$$

Le cas exceptionnel demande une discussion spéciale.

§ 5. Si k^2 se rapproche d'une des racines

$$k_1^2,\ k_2^2, \ldots, k_p^2$$

de l'équation

$$D = 0,$$

la fonction U croîtra d'après (57) indéfiniment, exception faite pour le cas que P s'annulle en même temps.

Il s'agit d'examiner la fonction P au voisinage des pôles

$$k^2 = k_1^2,\ k_2^2, \ldots, k_p^2.$$

On a d'après (58)

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \Delta u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix},$$

et à l'intérieur de ω

$$\Delta P + k^2\varphi^2 P = \begin{vmatrix} \alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ f + k^2\varphi^2 u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\varphi^2 u_0 + k^2\varphi^2 u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varphi^2 u_{p-2} + k^2\varphi^2 u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta P + k^2 \varphi^2 P = f \cdot D. \tag{59}$$

Si nous désignons par P_j les valeurs de P pour

$$k^2 = k_j^2, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

nous aurons

$$\Delta P_j = -k_j^2 \varphi^2 P_j \quad \text{à l'intérieur de } \omega, \tag{60a}$$

$$\Delta P_j = 0 \qquad \text{à l'extérieur de } \omega; \tag{60b}$$

nous savons du reste que les fonctions P_j sont continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, et qu'elles ont toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω.

Nous introduisons maintenant la notion des fonctions universelles par cette définition:

Nous appellerons fonction universelle correspondant à la surface ω d'une seule ou de plusieurs particules chaque fonction Φ_j continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'intérieur de ω aux équations

$$\Delta \Phi_j = -k_j^2 \varphi^2 \Phi_j, \quad \int_i \varphi^2 \Phi_j^2 d\tau = 1 \tag{61}$$

et ayant à l'extérieur de ω toutes les propriétés d'un potentiel; nous appellerons k_j^2 le nombre correspondant à la fonction universelle Φ_j. Dans les applications à la physique nous poserons toujours $\varphi^2 = 1$.

Après cette définition, nous pourrons énoncer notre résultat antérieur ainsi:

Les fonctions

$$P_j = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k_j^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k_j^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k_j^2 \end{vmatrix}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{62}$$

sont ou identiquement nulles, ou elles représentent des fonctions universelles avec les nombres correspondants k_j^2.

Il est facile à voir que les racines k_j de l'équation $D = 0$ correspondant à des fonctions P_j, qui sont identiquement nulles, ne peuvent être des pôles pour la solution

$$U = \frac{P}{D}$$

de notre problème fondamental. Car on a dans ce cas, si k_j^2 est une valeur dans laquelle coïncident m racines $(m = 1, 2, \ldots, p)$

$$D = \frac{dD}{d(k^2)} = \frac{d^2D}{d(k^2)^2} = \ldots = \frac{d^{m-1}D}{d(k^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^mD}{d(k^2)^m} \neq 0,$$

$$U = \frac{\dfrac{d^mP}{d(k^2)^m}}{\dfrac{d^mD}{d(k^2)^m}},$$

et $\dfrac{d^mP}{d(k^2)^m}$ reste continue avec ses premières dérivées, si l'on donne à k^2 une des valeurs $k_j^2 (j = 1, 2, \ldots, p)$.

On démontre aussi facilement que les racines k_j^2 correspondant à des fonctions universelles ne peuvent être des racines multiples. On aurait pour une racine double [1]) d'après (59) à l'intérieur de ω

$$k_j^2 \varphi^2 P_j = -\Delta P_j$$

$$\Delta \frac{dP_j}{d(k^2)} = -k_j^2 \varphi^2 \frac{dP_j}{d(k^2)} - \varphi^2 P_j.$$

Multiplions ces deux équations, divisons par φ^2 et intégrons sur i; alors en tenant compte de l'identité

$$\int_i P_j \Delta \frac{dP_j}{d(k^2)} d\tau = \int_i \frac{dP_j}{d(k^2)} \Delta P_j d\tau$$

on trouvera

$$\int_i P_j \Delta P_j d\tau = 0,$$

ou

$$\int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial P_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$P_j = C^{te} = 0;$$

donc P_j ne pourrait être une fonction universelle, *c.q.f.d.*

---

[1]) Comme on aurait

$$\frac{dD}{d(k^2)} = 0.$$

Nous avons obtenu ainsi un résultat qui est d'une grande importance pour les questions concernant les fonctions universelles:

I. En choisissant le nombre p asser grand et en supposant

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

on pourra toujours trouver une fonction

$$V(k^2, x, y, z)$$

de manière que l'expression

$$U = \frac{V(k^2, x, y, z)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) \ldots (k^2 - k_n^2)}, \qquad (0 \leqq n \leqq p)$$ [1]

satisfasse à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f,$$

si

$$k^2 \neq k_j^2, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

V représentant pour toute valeur $k^2 (< \sqrt[3]{p^2})$ une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω. $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_n^2$ seront des nombres bien définis et $< \sqrt[3]{p^2}$, tous différents entre eux.

Pour $k^2 = k_j^2 (j = 1, 2, \ldots, n)$ la fonction V devient une fonction universelle Φ_j, correspondant à la surface ω, à un facteur constant près.

Nous avons démontré ce résultat en supposant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_i f \frac{d\tau}{r},$$

$$u_j = +\frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 u_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_p u_p = 0,$$

---

[1]) Pour le cas $n = 0$, on doit poser le second membre $= V(k^2, x, y, z)$.

p étant un nombre fini, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des constantes réelles, satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1;$$

mais d'après le § 2 [1]) notre résultat reste vrai, même dans ces cas particuliers; donc dans tous les cas.

Nous pouvons ajouter, comme à la fin du § 2:

La solution (63) a, comme fonction de k^2, n pôles simples

$$k^2 = k_j^2, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (0 \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} p)$$

dans l'intervalle

$$0 < k^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

Toute autre solution U' de notre problème pour une valeur donnée $\bar{k}^2$ de k^2 ne diffère de (63) que d'une fonction universelle ayant $\bar{k}^2$ pour nombre correspondant [2]).

CHAPITRE III.

L'EXISTENCE DES FONCTIONS UNIVERSELLES.

§ 1. Nous pourrions démontrer l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2, \ k_1^2, \ k_2^2, \ldots, k_j^2 \ldots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots$$

en démontrant que chaque potentiel

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\int f \frac{d\tau}{r},$$

---

[1]) En posant $k_j^2 = \frac{1}{x_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

[2]) S'il en existe une; autrement le problème n'admettra que la solution (63).

peut être représenté par une série

$$u_0 = \sum_0^\infty{}_j C_j \Phi_j,$$

les C_j étant des constantes bien définies et les Φ_j étant les fonctions universelles que l'on obtient par la solution de notre problème fondamental, si nous supposons toujours que f est continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω.

La démonstration serait absolument identique avec la démonstration analogue pour les développements en séries de fonctions harmoniques [1]).

Nous allons, pour abréger, nous contenter de démontrer cette existence des k_j^2, Φ_j en établissant les théorèmes suivants:

II. En partant d'une fonction f [2]) quelconque, continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω, et donnée d'avance, on peut toujours trouver un nombre p fini de manière que la solution de notre problème fondamental nous mène du moins à *une* fonction universelle.

III. Soit p^2 un nombre fini quelconque, il n'y aura qu'un nombre fini de fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres k_j^2 correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

IV. Si l'on connaît toutes les fonctions universelles avec des nombres correspondants satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

(p^2 étant un nombre fini donné d'avance) on pourra toujours trouver un nombre $p'^2 (> p^2)$ fini, de manière qu'il existe au moins *une* fonction universelle avec un nombre correspondant k'^2, satisfaisant à la condition

$$\sqrt[3]{p^2} \overline{\leqq} k'^2 < \sqrt[3]{p'^2}.$$

Nous poserons dès à présent toujours $\varphi^2 = 1$.

---

[1]) Comp. W. Stekloff, Communications, T. VI, 2 et 3. A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 4, Berlin (F. Dümmler's Verlag).

[2]) Qui n'est pas identiquement nulle.

§ 2. Pour démontrer le théorème II, supposons que p soit un nombre positif assez grand, et que la solution (63) de notre problème fondamental ne nous ait pas mené à une fonction universelle Φ_j avec un nombre correspondant $k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$.

Alors le rayon de convergence de la série

$$\int_i u_0^2 d\tau + k^2 \int_i u_1^2 d\tau + k^4 \int_i u_1^4 d\tau + \dots$$

sera $\overline{\overline{>}} \sqrt[3]{p^4}$; on aura donc

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}},$$

puisque

$$\frac{\int_i u_0^2 \, d\tau}{\int_i f^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i u_1^2 \, d\tau}{\int_i u_0^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i u_2^2 \, d\tau}{\int_i u_1^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \dots$$

et l'inégalité

$$\frac{\int_i u_0^2 \, d\tau}{\int_i f^2 \, d\tau} > \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}}$$

entraînerait pour cette raison l'inégalité

$$\int_i u_j^2 d\tau < (\sqrt[3]{p^2})^{2j} \int_i f^2 \, d\tau.$$

Or la relation

$$\int_i u_0^2 \, d\tau \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}} \int_i f^2 \, d\tau$$

ne pourrait subsister pour un p^2 aussi grand que l'on veut, à moins que

$$\int_i u_0^2 d\tau = 0,$$

ce qui entraînerait $f \equiv 0$, $c\ q.f.d.$

§ 3. Pour démontrer le théorème III, on remarquera d'abord, qu'en posant dans notre problème fondamental

$$f = -\varphi^2 (\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \dots \alpha_p \Phi_p), \tag{64}$$

$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ étant p fonctions universelles avec les nombres correspondants $k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des constantes données, la solution (63) deviendra

$$U = u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \dots = \sum_{1}^{p} {}_j \frac{\alpha_j \Phi_j}{k_j^2 - k^2} \tag{65}$$

aussi longtemps que k^2 reste plus petit que le plus petit des nombres $k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2$.

Soit p^2 maintenant un nombre quelconque assez grand, mais fini, et supposons que $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ soient linéairement indépendantes, alors on saura trouver les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de façon que la série (65) converge absolument et uniformément pour n'importe quel

$$k^2 < \sqrt[3]{(p-1)^2};$$

mais comme l'expression (65) croît indéfiniment, quand k^2 se rapproche du plus petit k_j^2, il faudrait donc qu'au moins un des k_j^2 soit $> \sqrt[3]{(p-1)^2}$; donc il ne peut exister plus de $p-1$ fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres correspondants

$$< \sqrt[3]{(p-1)^2},$$

p représentant toujours un nombre quelconque assez grand, mais fini. On n'aura qu'à changer $p-1$ en p, pour arriver à notre théorème III.

§ 4. Supposons pour la démonstration du théorème IV que nous connaissions toutes [1]) les fonctions universelles avec des nombres correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

---

[1]) Leur nombre est $\overline{\gtrless} p$ d'après le théorème III, si p^2 est choisi assez grand.

(p^2 étant un nombre fini, donné d'avance), et soit f une fonction quelconque continue avec ses premières dérivées; alors il peut arriver des deux choses l'une: On peut trouver f comme une expression linéaire par rapport aux fonctions universelles données, ou la solution de notre problème fondamental doit nous mener au moins à une nouvelle fonction universelle avec un nombre correspondant fini et

$$\overline{\overline{>}} \sqrt[3]{p^2}.$$

Comme on peut toujours facilement donner $p+1$ fonctions f linéairement indépendantes, le dernier des deux cas doit arriver au moins pour une de ces fonctions f.

§ 5. Nous finirons ce Chapitre par un théorème important sur les fonctions universelles, absolument analogue à un théorème connu sur les fonctions harmoniques.

V. Soient Φ_i et Φ_k deux fonctions universelles avec des nombres correspondants k_i^2 et k_k^2, on aura

$$\int\limits_{i+e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\frac{\partial\Phi_k}{\partial z}\right)d\tau=0,$$

$$\int\limits_i \Phi_i\Phi_k\,d\tau=0,\text{[1]} \tag{66}$$

si

$$k_i^2 \mp k_k^2.$$

On n'a, pour la démonstration, qu'à multiplier l'équation

$$\Delta\Phi_i = -k_i^2\Phi_i \quad \text{à l'intérieur de } \omega$$

par Φ_k et à intégrer sur i; alors on aura

$$\int\limits_i k_i^2\Phi_i\Phi_k\,d\tau = -\int\limits_i \Phi_k\,\Delta\Phi_i d\tau = -\int\limits_i \Phi_i\Delta\Phi_k d\tau,$$

d'où

$$k_i^2\int\limits_i \Phi_i\Phi_k d\tau = k_k^2\int\limits_i \Phi_i\Phi_k d\tau,$$

c'est-à-dire on trouvera les relations (66), si $k_i^2 \mp k_k^2$.

---

[1]) Dans le cas général

$$\int\limits_i \varphi^2\Phi_i\Phi_k d\tau = 0.$$

DEUXIÈME PARTIE.

SOLUTION DU PROBLÈME DES VIBRATIONS UNIVERSELLES POUR DES PARTICULES SPHÉRIQUES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

CHAPITRE I.

LE CAS D'UNE SEULE PARTICULE.

§ 1. Nous cherchons les fonctions universelles

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots$$

avec les nombres correspondants

$$k_0^2, \ k_1^2, \ k_2^2, \ldots, k_j^2, \ldots$$

pour le cas que la surface ω est représentée par une sphère de rayon R.

En prenant le centre de la sphère pour origine et en introduisant les coordonnées sphériques par les transformations

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ z &= r\sin\vartheta\sin\varphi, \end{aligned} \tag{67}$$

nous pourrons écrire les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions universelles:

$$\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}+k^2\Phi=0 \tag{68}$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}=0, \tag{69}$$

à l'extérieur de la sphère.

Les fonctions Φ doivent être continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini.

Assurés de l'existence des fonctions Φ_j et des nombres k_j^2, nous pouvons les représenter sous forme de séries procédant par fonctions sphériques

$$\Phi=\sum_0^\infty{}_i\, f_i(r)\,Y_i(\vartheta\,,\ \varphi),$$

où la fonction sphérique $Y_i(\vartheta, \varphi)$, satisfait à l'équation:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial Y_i}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\varphi^2}+i(i+1)Y_i=0. \tag{71}$$

$(i=0,1,2,\ldots)$

Si nous introduisons la valeur (70) de Φ dans les équations (68) et (69), nous trouverons, en tenant compte de (71), que les fonctions $f_i(r)$ doivent être des solutions des équations $(i=0,\ 1,\ 2\ldots.)$

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f_i}{\partial r}\right)-i(i+1)f_i\right]+k^2 f_i=0 \tag{72}$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f_i}{\partial r}\right)-i(i+1)f_i\right]=0, \tag{73}$$

à l'extérieur de la sphère.

Les solutions générales de l'équation (73) sont

$$f_i=c_{i1}\frac{1}{r^{i+1}}+c_{i2}r^i \tag{74}$$

c_{i1}, c_{i2} étant des constantes quelconques; les solutions générales de l'équation (72)

$$f_i=C_{i1}\frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}+C_{i2}\frac{J_{-\left(i+\frac{1}{2}\right)}(kr)}{\sqrt{kr}}, \tag{75}$$

si C_{i1}, C_{i2} représentent des constantes quelconques et $J_n(x)$ la fonction de Bessel

$$J_n(x)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Gamma(n+\lambda+1)}.\ ^{1)} \tag{76}$$

Pour les fonctions $J_{i+\frac{1}{2}}$ et $J_{-\left(i+\frac{1}{2}\right)}$ qui nous intéressent ici on peut trouver des expressions analytiques plus faciles à manier

---

1) En posant

$$\Pi(\lambda)=1.2.3\ldots..\lambda,\quad \Pi(0)=1.$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n=\infty}\frac{\Pi(n-1)n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{0}^{i}{}_{\lambda} \frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(i-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda} \cos\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2} - x\right],$$

$$J_{-(i+\frac{1}{2})}(x) = (-1)^{i} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(i)\,\Pi(i-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda} \sin\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2} - x\right]. \tag{77}$$

Comme les fonctions f_i doivent être continues à l'intérieur de la sphère aussi bien qu'à l'extérieur de la sphère et s'annuler à l'infini, il faut que

$$c_{i2} = 0,$$

$$C_{i2} = 0,$$

de manière que Φ doit avoir la forme

$$\Phi = \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \frac{c_i}{r^{i+1}} Y_i(\vartheta, \varphi) \quad \text{(à l'extérieur)},$$

$$\Phi = \sum_{0}^{\infty}{}_{i} C_i \frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} Y_i(\vartheta, \varphi) \quad \text{(à l'intérieur)}; \tag{78}$$

les constantes c_i, C_i doivent en outre satisfaire aux équations suivantes résultant de la continuité de Φ et de ses premières dérivées au passage de la surface, c'est-à-dire aux conditions

$$\Phi_e = \Phi_i,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_e = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_i,$$

d'où

$$c_i = \frac{\sqrt{kR}}{R^{i+1} J_{i+\frac{1}{2}}(kR)} C_i,$$

$$C_i \frac{2kRJ'_{i+\frac{1}{2}}(kR) - J_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{2\sqrt{kR}} = -\frac{i+1}{R^{i+1}} c_i \quad [1] \tag{79}$$

[1]) Pour ce deuxième groupe d'équations il faut supposer que les premières dérivées de Φ soient aussi développables en séries procédant par fonctions sphériques; on démontre facilement la rigueur de ce développement en tenant compte de ce que *toutes* les dérivées des fonctions Φ sont finies, ce qui résulte de leur définition.

Comme la première de ces équations donne la valeur de $\frac{c_i}{C_i}$, la deuxième devient une équation pour k seul

$$(2i+1) J_{i+\frac{1}{2}}(kR) + 2kRJ'_{i+\frac{1}{2}}(kR) = 0, \qquad (80)$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

les valeurs possibles de k_0, k_1, k_2, ..., doivent donc être des racines d'une de ces équations (80), et les fonctions Φ_j correspondantes auront la forme

$$\Phi_j = \frac{Y_j(\vartheta, \varphi)}{r^{j+1}} \quad \text{(à l'extérieur)},$$

$$\Phi_j = \frac{\sqrt{k_j R}}{R^{j+1} J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)} \cdot \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{k_j r}} \cdot Y_j(\vartheta, \varphi) \qquad (81)$$

(à l'intérieur),

les Y_j représentant des fonctions sphériques quelconques d'ordre j, k_j étant une des racines de l'équation

$$(2j-1) J_{j+\frac{1}{2}}(kR) + 2kRJ'_{j+\frac{1}{2}}(kR) = 0, \qquad (82)$$

que l'on peut, ce qui est sans grande importance ici pour nous, présenter dans une forme plus simple, en introduisant la fonction $J_{j-\frac{1}{2}}$ [1].

I. Les fonctions universelles correspondant à une particule de rayon R sont (à un facteur constant près)

$$\Phi_j = \frac{Y_j(\vartheta, \varphi)}{r^{j+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère)},$$

$$\Phi_j = \frac{\sqrt{k_j R}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)} \cdot \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{k_j r}} \cdot \frac{Y_j^*(\vartheta, \varphi)}{R^{j+1}}$$

(à l'intérieur de la sphère),

---

[1]) Dans la forme

$$J_{j-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \qquad (82)$$

en posant

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cos x.$$

Comp. Graf-Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, I, p. 45.

Y_j représentant une fonction sphérique d'ordre j, $k_j R$ une racine de l'équation transcendante [1])

$$(2j+1) J_{j+\frac{1}{2}}(x) + 2x J'_{j+\frac{1}{2}}(x) = 0, \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

Les exemples les plus simples, que j'ai considérés pour mes théories de la gravitation et du frottement dans les masses continues, sont les fonctions correspondant aux deux nombres k_j^2 les plus petits possibles

$$\left.\begin{aligned} k_0 &= \frac{\pi}{2R}, \\ \Phi_0 &= \frac{c}{r} \quad \text{(à l'extérieur)}, \\ \Phi_0 &= -\frac{c \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{R}\right)}{r} \quad \text{(à l'intérieur)}; \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\pi}{R}, \\ \Phi_1 &= c\frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad \text{(à l'extérieur)}, \\ \Phi_1 &= \frac{c}{\pi} \frac{\sin\frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{R}\cos\frac{\pi r}{R}}{r^2} \cos\vartheta \quad \text{(à l'intérieur)}; \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

la vibration correspondant à (83) est une pulsation de la sphère, celle qui correspond à (84) une oscillation de la sphère dans la direction de l'axe des x.

§ 2. Les calculs qui nous ont mené aux fonctions universelles nous permettent de donner la solution d'un problème un peu plus général.

Nous savons toujours trouver une fonction ψ, continue dans tout l'espace avec ses premières dérivées, qui satisfait à l'intérieur d'une surface ω à l'équation

$$\Delta\psi + k^2\psi = f \qquad (85)$$

---

[1]) Ou, ce qui revient au même,

$$J_{j-\frac{1}{2}}(x) = 0, \quad \text{comp. p. 32.}$$

(f une fonction donnée continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ϖ) et qui a toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ϖ, pourvu que le nombre donné k^2 n'appartienne pas à la suite

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2, \dots .$$

Pour le cas de la sphère il est facile de donner la solution de ce problème en forme de série. On peut, comme on démontre facilement à l'aide de la théorie des fonctions sphériques et des fonctions de Bessel [1]), développer f et ψ en séries de la forme

$$\left.\begin{aligned} f &= \sum_0^\infty {}_j \Phi_j, \\ \psi &= \sum_0^\infty {}_j \Psi_j, \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

où les Φ_j et Ψ_j sont des fonctions universelles correspondant à la sphère.

Les fonctions Φ_j peuvent être dérivées de f en forme d'intégrales définies, et on arrive ainsi sans difficulté aux inégalités

$$|\Phi_j| \overline{\gtrless} \alpha \left| \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{f} . H_j \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \right|, \qquad (j=0,1,2,\dots) \tag{87}$$

α étant un nombre fini, H_j une certaine fonction sphérique d'ordre j dont la valeur absolue est $\overline{\gtrless} 2j+1$ et $\bar{f}$ représentant les valeurs de f sur la sphère concentrique à la sphère originale, pour laquelle l'intégrale a sa valeur maximum.

Entre les Ψ_j et les Φ_j on a la relation

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j}{k^2 - k_j^2}, \qquad (j=0,1,2,\dots) \tag{88}$$

à cause de (85).

Supposons que k^2 diffère de

$$k_0^2,\ k_1^2, \dots, k_{n-1}^2,\ k_{n+1}^2,\ k_{n+2}^2, \dots$$

par des nombres $\overline{\gtrless} \alpha$, α étant un nombre fini et bien connu, pendant qu'on ne fait aucune autre restriction sur la grandeur

$$k^2 - k_n^2$$

que la supposition qu'elle ne soit pas nulle.

---

[1]) Des développements analogues sont possibles dans le cas général d'une surface ω quelconque; comp. p. 26.

D'après les raisonnement de ce paragraphe nous pourrons affirmer que dans tout l'espace les valeurs absolues de φ et des ses premières dérivées seront

$$\overline{\gtrless}\, a.\text{abs. Max.}(f) + b\frac{|f_n|}{|k^2 - k_n^2|},$$

où a et b sont des constantes finies ne dépendant ni de la fonction f ni de k^2, abs. Max. (f) la plus grande valeur absolue de f à l'intérieur de la sphère et

$$f_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{f}.H_n \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Ce résultat (que l'on peut aisément généraliser pour des surfaces plus générales) sera très utile pour la solution du problème que nous nous poserons maintenant.

CHAPITRE II.

DEUX OU PLUSIEURS PARTICULES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

§ 1. Quoique le problème de deux particules puisse trouver sa solution complète à l'aide des coordonnées dipolaires de M. C. Neumann, le physicien préférera toujours à cette méthode une méthode approximative comparable à celle de Murphy pour les problèmes électrostatiques. Il s'agit de démontrer qu'une telle méthode est possible, et qu'elle mène à la solution du problème avec toute l'exactitude que l'on veut.

Supposons toujours pour plus de simplicité que les rayons des deux particules soient égaux; alors la première idée qui se présente, et qui est juste, comme nous verrons, nous suggère que les durées de vibration pour le système composé de deux particules ne diffèreront des durées de vibration d'une seule particule que par des grandeurs d'ordre $\frac{rayon}{distance}$ comparées avec les valeurs originales. Il est vraisemblable qu'à chaque nombre k_n^2 de la suite

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2,\ldots,$$

correspondant à une des sphères, on puisse assigner un nombre

$$k_n^2 + \varepsilon_n$$

(ou peut-être plusieurs) qui appartient à la suite

$$K_0^2,\ K_1^2,\ K_2^2, \ldots$$

correspondant au système composé des deux sphères, et que chaque ε_n soit d'ordre $\frac{rayon}{distance}$ en comparaison avec k_n^2.

On essayera donc, pour trouver les vibrations universelles des deux sphères correspondant au nombre $k_n^2+\varepsilon_n$, à poser d'abord

$$\Phi_n^1 = \Phi_n^{1,1} + \Phi_n^{1,2}, \tag{89}$$

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère 1)},$$

(90)

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_1)}{\sqrt{k_n^1 r_1}} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{j+1}}$$

(à l'intérieur de la sphère 1),

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère 2)},$$

(91)

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_2)}{\sqrt{k_n^1 r_2}} \cdot \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{R^{n+1}}$$

(à l'intérieur de la sphère 2),

en prenant les deux centres des sphères respectivement comme pôles de deux systèmes de coordonnées polaires $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ et $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$.

Nous laisserons d'abord les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et la constante k_n^1 arbitraires; la fonction Φ_n^1 serait toujours continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, si k_n^1 était égal à k_n; mais comme nous ne ferons plus cette supposition, on pourra seulement affirmer qu'elle sera continue dans tout l'espace pendant que ces premières dérivées seront discontinues aux deux surfaces ω_1 et ω_2 des sphères. Φ_n^1 satisfait du reste aux équations

$$\Delta\Phi_n^1 = 0, \quad \text{à l'extérieur des deux sphères,}$$

$$\Delta\Phi_n^1 + (k_n^1)^2\Phi_n^1 = (k_n^1)^2\Phi_n^{1,2}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \tag{92}$$

$$\Delta\Phi_n^1 + (k_n^1)^2\Phi_n^1 = (k_n^1)^2\Phi_n^{1,1}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2.}$$

Il faut calculer les discontinuités des dérivées normales de Φ_n^1 aux surfaces ω_1 et ω_2. En désignant toujours par r les normales intérieures on aura à la sphère 1

$$\left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \left|\frac{\partial\Phi_n^{1,1}}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial\Phi_n^{1,1}}{\partial r}\right|_i = (n+1)\frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+1}} \cdot k_n^1 \left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}\right\}\right|_{x=k_n^1 R},$$

ou

$$\left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{93a}$$

et d'une manière analogue à la deuxième sphère

$$\left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2). \tag{93b}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} V_{n,1(2)} &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_{1(2)}} \left[\left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial r}\right|_i\right]\frac{d\omega}{r}, \\ V_n &= V_{n,1} + V_{n,2}, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

alors nous pourrons affirmer que la fonction

$$\Psi_n^1 = \Phi_n^1 + V_n,$$

est continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace; d'après (92) elle satisfera aux équations

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Psi_n^1 = 0, \quad \text{à l'intérieur des deux sphères}, \\ &\Delta\Psi_n^1 + (k_n^1)^2\Psi_n^1 = (k_n^1)^2(\Phi_n^{1,2} + V_n), \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1}, \\ &\Delta\Psi_n^1 + (k_n^1)^2\Psi_n^2 = (k_n^1)^2(\Phi_n^{1,1} + V_n), \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2}. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Nous pourrons toujours développer

$$\Phi_n^{1,2} + V_{n,1} = \varphi_1^1 + \varphi_2^1 + \varphi_3^1 + \ldots \tag{97a}$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 1, et

$$\Phi_n^{1,1} + V_{n,2} = \chi_1^1 + \chi_2^1 + \chi_3^1 + \cdots$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 2, et nous voulons maintenant calculer les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et k_n^1 jusqu'à présent arbitraires de manière que

$$\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0, \\ \chi_n^1 &= 0. \end{aligned} \tag{98}$$

Ces équations seront vraies dans tout l'espace, si

$$\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^1 &= 0, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{99}$$

et la théorie des fonctions sphériques nous mène facilement aux relations auxquelles les $4n+3$ grandeurs

$$Y_n^{1,1}, \ Y_n^{1,2}, \ k_n^1$$

doivent satisfaire:

$$\begin{aligned} \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1) &= \left| \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \right|_n^{\omega_1}, \\ \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2) &= \left| \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \right|_n^{\omega_2}, \end{aligned} \tag{100}$$

en désignant par $\left|\,-\,\right|_n^{\omega_1}$ et $\left|\,-\,\right|_n^{\omega_2}$ les fonctions sphériques d'ordre n dans les développements à la surface ω_1 et ω_2.

Ce sont

$$4n + 2$$

équations linéaires et homogènes en $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$; on peut donc calculer à l'aide des $4n+2$ équations (100) les $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$ à un facteur constant près, qui reste arbitraire, et k_n^1.

En formant Ψ_n^1 avec ces valeurs de $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, k_n^1 nous appellerons Ψ_n^1 la première approximation de la fonction universelle cherchée.

Il importe de montrer que k_n^1 défini par les équations (100) ne diffère de k_n que par une quantité qui peut être aussi petite que l'on veut, si l'on prend $\frac{R}{\varrho}$ suffisamment petit (ϱ la distance des deux sphères).

En effet, nous pouvons écrire les équations (100) dans la forme suivante

$$x \cdot y_k^1 = \sum_1^{2n+1}{}_j c_{kj} y_j^2 ,$$

$$x \cdot y_k^2 = \sum_1^{2n+1}{}_j c_{kj} y_j^1 ,$$

où nous posons

$$x = \frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} ,$$

où les y_j^1, y_j^2 sont tout à fait indépendants de R et ρ et supposés de ne pas s'annuler tous en même temps, et où les c_{kj} sont

$$= \alpha_{kj} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1} ,$$

α_{kj} représentant des nombres ne dépendant nullement de R et ρ.

Il faut donc que

$$\frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} = \alpha \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1} , \tag{101}$$

α représentant un nombre ne dépendant nullement de R et ρ, fini et différent de zéro, puisque le déterminant des α_{kj} est toujours $\neq 0$.

Comme on a

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_n R) = 0 ,$$

et l'équation

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x) = 0$$

n'a au point $x = k_n R$ qu'une racine *simple*, comme à ce point $k_n R$ et $J_{n+\frac{1}{2}}(k_n R)$ ont des valeurs finies différentes de zéro, on conclura

$$\beta \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1} \overline{\lessgtr} \, |k_n^1 R - k_n R| \, \overline{\lessgtr} \, \gamma \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1} , \tag{102}$$

β et γ représentant deux nombres finis et différents de zéro, ne dépendant nullement de R et ρ, si $\frac{R}{\rho}$ est plus petit qu'un nombre positif, différent de zéro, ne dépendant que du nombre n.

§ 2. Nous allons trouver maintenant une deuxième, troisième approximation etc. et démontrer la convergence de ces approximations.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{2,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,1} + (k_n'^1)^2 \Phi_n^{2,1} = -(k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 1}, \quad (103a)$$

et la fonction $\Phi_n^{2,2}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,2} + (k_n^1)^2 \Phi_n^{2,2} = -(k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 2}. \quad (103b)$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura en désignant par C le maximum des valeurs absolues de $\Phi_n^{1,1}$ et $\Phi_n^{1,2}$

$$\left| \Phi_n^{2,1} \right| \overline{\overline{<}}\, a \cdot C \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1},$$

$$\left| \Phi_n^{2,2} \right| \overline{\overline{<}}\, a \cdot C \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1}, \quad (104)\,[1]$$

où a est un nombre fini ne dépendant ni des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, ni de $\frac{R}{\varrho}$.

---

[1]) A cause de (98), $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ ne contient pas de fonction universelle d'ordre n, et l'on aura à l'intérieur de ω_1

$$\left| \Phi_n^{1,2} \right| \overline{\overline{<}}\, c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1}$$

$$\left| V_{n,1} \right| \overline{\overline{<}}\, c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}.$$

Ce qui concerne $V_{n,2}$, on a à l'intérieur de ω_1

$$\left| V_{n,2} \right| \overline{\overline{<}}\, c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{3n+2};$$

la fonction universelle d'ordre n, que $V_{n,2}$ contient, a une valeur absolue

$$\left| V_{n,2} \right|_n \overline{\overline{<}}\, c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{4n+2},$$

donc

$$\frac{\left| V_{n,2} \right|_n}{\left| (k_n^1)^2 - k_n^{2} \right|} \overline{\overline{<}}\, c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}, \quad \text{(d'après 102).}$$

Le raisonnement du § 2 Chap. I nous donne ainsi la première inégalité (104), la seconde s'obtient d'une manière analogue.

La fonction

$$\chi_n^2 = \varphi_n^1 + \Phi_n^{2,1} + \Phi_n^{2,2} \tag{105}$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\chi_n^2 + (k_n^1)^2\chi_n^2 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ \Delta\chi_n^2 + (k_n^1)^2\chi_n^2 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \tag{106}$$

Comme nous avons calculé k_n^1 et les rapports des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ à l'aide des équations (98), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \varphi_n^2 &= \varphi_n^1 - |\Phi_n^{2,2}|_n^{\omega_1} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^2 &= \chi_n^1 - |\Phi_n^{2,1}|_n^{\omega_2} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{107}$$

en prenant les $|\ |_n^{\omega_1}$ et $|\ |_n^{\omega_2}$ dans le même sens que p. 38; nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^2, $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$.

On aura

$$\begin{aligned} |k_n^2 - k_n^1| &\overline{\gtrless} b\,|k_n^1 - k_n|\,\frac{R}{\rho}, \\ |Y_n^{2,1} - Y_n^{1,1}| &\overline{\gtrless} b.C.\frac{R}{\rho}, \\ |Y_n^{2,2} - Y_n^{1,2}| &\overline{\gtrless} b.C.\frac{R}{\rho}, \end{aligned} \tag{108}$$

si b désigne une constante finie ne dépendant nullement de $\frac{R}{\rho}$.

Pour démontrer ces inégalités (108), nous n'avons qu'à faire voir que

$$\begin{aligned} |\Phi_n^{2,2}|_n^{\omega_1} &\overline{\gtrless} B.C.\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ |\Phi_n^{2,1}|_n^{\omega_2} &\overline{\gtrless} B.C.\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{109}$$

B étant une constante finie $\left(\text{ne dépendant nullement de } \frac{R}{\rho}\right)$, puisque les termes φ_n^1 et χ_n^1 sont de l'ordre $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1}$, et ces inégalités (109) découlent immédiatement des inégalités (104).

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^1, $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, χ_n^2, en introduisant partout les valeurs

$$k_n^2,\ Y_n^{2,1},\ Y_n^{2,2} \text{ au lieu des } k_n^1,\ Y_n^{1,1},\ Y_n^{1,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{2,1},\ \psi_n^{2,2},\ \psi_n^2,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$; χ_n^2; alors la fonction ψ_n^2 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2, et elle satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\psi_n^2 + (k_n^2)^2\psi_n^2 &= (k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta\psi_n^2 + (k_n^2)^2\psi_n^2 &= (k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{110}$$

où nous posons

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_n^{2,2} &= \psi_n^{2,2} - |\psi_n^{2,2}|_n^1, \quad ^{1)} \\ \overline{\psi}_n^{2,1} &= \psi_n^{2,1} - |\psi_n^{2,1}|_n^2. \end{aligned} \tag{111}$$

Nous appellerons ψ_n^2, k_n^2 la deuxième approximation, et nous remarquerons que d'après (104)

$$\begin{aligned} |\overline{\psi}_n^{2,2}| &\overline{\gtrless} a\cdot C\cdot\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ |\overline{\psi}_n^{2,1}| &\overline{\gtrless} a\cdot C\cdot\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{112}$$ [2]

---

[1]) $|\psi_n^{2,2}|_n^1$ la fonction universelle d'ordre n de la sphère 1 que $\psi_n^{2,2}$ contient; $|\psi_n^{2,1}|_n^2$ a la signification analogue.

[2]) On pourrait penser au premier aspect que les fonctions $\psi_n^{2,1}$, $\psi_n^{2,2}$ ne satisfassent pas aux mêmes inégalités que $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, puisque les nouvelles fonctions $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ et $\Phi_n^{1,1} + V_{n,2}$ contiennent maintenant des fonctions universelles d'ordre n: φ_n^1 et χ_n^1, mais les valeurs absolues de ces fonctions seront d'après (107) et (104)

$$\overline{\gtrless} \text{ c}^{te} \text{ finie. } C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2},$$

et, divisées par $|(k_n^2)^2 - k_n^2|$,

$$\overline{\gtrless} \text{ c}^{te} \text{ finie. } C\frac{R}{\rho} \quad \begin{array}{l} \text{pour } \psi_n^{2,1} \text{ à } \omega_1, \\ \text{pour } \psi_n^{2,2} \text{ à } \omega_2; \end{array}$$

donc en tout cas $|\psi_n^{2,1}| \overline{\gtrless} \text{ c}^{te} \text{ finie. } C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}$ à l'intérieur de ω_2,

$$|\psi_n^{2,2}| \overline{\gtrless} \text{ c}^{te} \text{ finie. } C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \text{ à l'intérieur de } \omega_1.$$

et d'après (108) et (104)

$$\left.\begin{aligned} |\psi_n^2 - \psi_n^1| &\overline{\overline{<}}\, b\cdot C\frac{R}{\varrho}, \\ |k_n^2 - k_n^1| &\overline{\overline{<}}\, b\,|k_n^1 - k_n|\frac{R}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

§ 3. Nous procédons à une troisième approximation.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Phi_n^{3,1} + (k_n^2)^2\Phi_n^{3,1} = -(k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \qquad (114a)$$

et la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue aves ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Phi_n^{3,2} + (k_n^2)^2\Phi_n^{3,2} = -(k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2. \qquad (114b)$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura d'après (112)

$$\left.\begin{aligned} |\Phi_n^{3,1}| &\overline{\overline{<}}\, a^2\cdot C\cdot\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}, \\ |\Phi_n^{3,2}| &\overline{\overline{<}}\, a^2\cdot C\cdot\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}. \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

La fonction

$$\chi_n^3 = \psi_n^2 + \Phi_n^{3,1} + \Phi_n^{3,2}, \qquad (116)$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\left.\begin{aligned} \Delta\chi_n^3 + (k_n^2)^2\chi_n^3 &= (k_n^2)^2\Phi_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta\chi_n^3 + (k_n^2)^2\chi_n^3 &= (k_n^2)^2\Phi_n^{3,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Comme nous avons calculé k_n^2 et les rapports des $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$ à l'aide des équations (107), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^3 &= \varphi_n^2 - |\Phi_n^{3,2}|_n^{\omega_1} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^3 &= \chi_n^2 - |\Phi_n^{3,1}|_n^{\omega_2} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_2; \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^3, $Y_n^{3,1}$, $Y_n^{3,2}$.

On aura [la démonstration est analogue à celle des inégalités (108) du § 2]

$$
\left.
\begin{aligned}
&| k_n^3 - k_n^2 | \overline{\gtrless} b^2 | k_n^1 - k_n | \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2, \\
&| Y_n^{3,1} - Y_n^{2,1} | \overline{\gtrless} b^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2, \\
&| Y_n^{3,2} - Y_n^{2,2} | \overline{\gtrless} b^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 .
\end{aligned}
\right\} \qquad (119)
$$

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^2, $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^3 en introduisant partout les valeurs

$$k_n^3,\ Y_n^{3,1},\ Y_n^{3,2} \quad \text{au lieu des} \quad k_n^2,\ Y_n^{2,1},\ Y_n^{2,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{3,1},\ \psi_n^{3,2},\ \psi_n^3,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^2; alors la fonction ψ_n^3 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2, et elle satisfera aux équations

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Delta \psi_n^3 + (k_n^3)^2 \psi_n^3 = (k_n^3)^2 \psi_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\
&\Delta \psi_n^3 + (k_n^3)^2 \psi_n^3 = (k_n^3)^2 \overline{\psi}_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2,
\end{aligned}
\right\} \qquad (120)
$$

où nous posons

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{\psi}_n^{3,2} = \psi_n^{3,2} - | \psi_n^{3,2} |_n^1, \\
&\overline{\psi}_n^{3,1} = \psi_n^{3,1} - | \psi_n^{3,1} |_n^2 .
\end{aligned}
\right\} \qquad (121)
$$

[1]

Nous appellerons ψ_n^3, k_n^3 la troisième approximation, et nous remarquerons que d'après (115)

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{\psi}_n^{3,2} \overline{\gtrless} a^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+3}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\
&\overline{\psi}_n^{3,1} \overline{\gtrless} a^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+3}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2,
\end{aligned}
\right\} \qquad (122)
$$

[2]

---

[1] Comp. la remarque [1] p. 42.

[2] On fera le raisonnement analogue à la remarque [2] p. 42.

et d'après (119) et (115)

$$
\left.\begin{aligned}
|\psi_n^3 - \psi_n^2| &\overline{\gtrless} b^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 , \\
|k_n^3 - k_n^2| &\overline{\gtrless} b^2 |k_n^1 - k_n| \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 .
\end{aligned}\right\} \quad (123)
$$

§ 4. II. En continuant ainsi on obtiendra la solution du problème dans la forme

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi_n &= \psi_n^1 + (\psi_n^2 - \psi_n^1) + (\psi_n^3 - \psi_n^2) + \dots \\
K_n &= k_n + (k_n^1 - k_n) + (k_n^2 - k_n^1) + (k_n^3 - k_n^2) + \dots .
\end{aligned}\right\} \quad (124)
$$

Ces séries seront absolument et uniformément convergentes, si $\frac{R}{\varrho}$ est suffisamment grand, puisque leurs termes sont respectivement plus petits que ceux des progressions géométriques

$$C\left\{1 + b\frac{R}{\varrho} + b^2\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \dots\right\},$$

$$k_n + (k_n^1 - k_n)\left\{1 + b\frac{R}{\varrho} + b^2\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \dots\right\}.$$

A chaque racine k_n^1 de l'équation algébrique résultant des équations (100) correspondra une valeur K_n.

La méthode analogue à celle de Murphy est donc démontrée; je l'ai déjà employée dans mon livre [1]) „Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massen-systemen" pour les cas

$n = 0$ (Théorie de la gravitation),

$n = 1$ (Théorie du frottement);

nous savons maintenant qu'elle est applicable pour un n quelconque pourvu que $\frac{R}{\varrho}$ soit assez petit, et la méthode peut être immédiatement généralisée pour un nombre fini de particules.

C'est le résultat que je voulais obtenir.

---

[1]) Comp. p. 3.

Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

В. П. Ермакова.

1. Постановка задачи.

Въ XLVIII томѣ „Mathematische Annalen" (стр. 317—364) А. Н. Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Составить дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0 \tag{1}$$

такъ, чтобы полный интегралъ этого уравненія имѣлъ форму

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

гдѣ показатели $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — числа постоянныя. При этомъ предполагается, что число n дано, а также дана степень функцій M и N относительно y. Предполагается, что M и N суть цѣлыя функціи относительно y.

Въ этой задачѣ показатели $m_1, m_2, \ldots, m_n$ можно считать данными; неизвѣстными функціями будутъ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y въ M и N. Опредѣленіе неизвѣстныхъ функцій приводится къ рѣшенію системы обыкновенныхъ и дифференціальныхъ уравненій. *Коркинъ показалъ, что для этой системы дифференціальныхъ уравненій всегда могутъ быть найдены полные интегралы въ конечной формѣ.* Сверхъ того Коркинъ показалъ, что рѣшеніе задачи можетъ принимать нѣсколько различныхъ формъ. Въ этомъ заключается глубокій интересъ мемуара Коркина.

Въ общемъ изложеніи Коркина для читателя не выступаетъ со всей рельефностью общая мысль, которою руководствовался авторъ при своихъ изслѣдованіяхъ, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ изслѣдованіе усложнено болѣе, чѣмъ слѣдуетъ.

А. Н. Коркинъ прежде всего предполагаетъ, что M и N первой степени относительно y, т. е. рѣшаетъ задачу для такого уравненія

$$(y+P)\,\partial y+(Qy+R)\,\partial x=0. \tag{3}$$

Еще Эйлеръ въ своихъ изслѣдованіяхъ замѣтилъ, что простою замѣною перемѣнныхъ можно достигнуть того, чтобы было $P=0$, $Q=1$. Эти положенія оказываются несущественными для теоріи. Между тѣмъ первое изъ этихъ положеній, $P=0$, въ изслѣдованіи Коркина приводитъ къ такой зависимости между искомыми функціями $v_1, v_2, \ldots, v_n$, которая какъ будто играетъ основную роль во всемъ изслѣдованіи.

Въ настоящей статьѣ я желаю выяснить, какими соображеніями руководствовался А. Н. Коркинъ при производствѣ своихъ изслѣдованій, выяснить общій путь разсужденій, при помощи которыхъ можно построить всѣ вычисленія, дѣйствительно приводящія къ полному рѣшенію задачи.

Такимъ образомъ, смѣю надѣяться, что моя статья облегчитъ читателю пониманіе прекраснаго мемуара А. Н. Коркина.

Напомню прежде всего, что число множителей n въ интегралѣ (2) предполагается даннымъ, а также дана степень функцій M и N относительно y.

Введу нѣкоторыя сокращенныя обозначенія.

Выраженіе въ первой части уравненія (2) я буду сокращенно обозначать черезъ

$$\Pi(y-v)^m.$$

Логариѳмъ отъ этого выраженія будетъ

$$m_1\log(y-v_1)+m_2\log(y-v_2)+\ldots+m_n\log(y-v_n),$$

что сокращенно я буду обозначать черезъ

$$\sum m\log(y-v).$$

Подобнымъ образомъ имѣемъ сокращенныя обозначенія

$$\sum m=m_1+m_2+\ldots+m_n,$$

$$\sum\frac{m}{y-v}=\frac{m_1}{y-v_1}+\frac{m_2}{y-v_2}+\ldots+\frac{m_n}{y-v_n}$$

и т. д.

2. Рѣшеніе задачи въ простѣйшемъ случаѣ.

Мы ищемъ такое дифференціальное уравненіе, полный интегралъ котораго будетъ

$$\Pi (y-v)^m = C. \tag{2}$$

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей, получимъ

$$\sum m \log (y-v) = \log C.$$

Дифференцируя это уравненіе, получаемъ искомое дифференціальное уравненіе

$$\sum \frac{m\,(\partial y - v'\partial x)}{y-v} = 0. \tag{4}$$

Остается освободить это уравненіе отъ знаменателей, для каковой цѣли вводимъ слѣдующія обозначенія

$$\begin{aligned} F(y) &= (y-v_1)(y-v_2)\ldots(y-v_n), \\ F_1(y) &= F(y)\sum\frac{m}{y-v}, \\ F_2(y) &= F(y)\sum\frac{mv'}{y-v}. \end{aligned} \tag{5}$$

Уравненіе (4), послѣ освобожденія отъ знаменателей, приметъ слѣдующую форму

$$F_1(y)\,\partial y - F_2(y)\,\partial x = 0. \tag{6}$$

Полный интегралъ этого уравненія выражается формулою (2).

Степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ равна $n-1$.

Поэтому мы рѣшили задачу въ томъ случаѣ, когда данная степень функцій M и N равна $n-1$. Въ этомъ случаѣ функціи $v_1, v_2, \ldots, v_n$ произвольны; искомое дифференціальное уравненіе опредѣляется формулой (6), при чемъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ опредѣляются по формуламъ (5). Но если степень функцій M и N ниже $n-1$, то рѣшеніе нашей задачи усложняется.

3. Пониженіе степени на единицу; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что степень функцій M и N равна $n-2$. Въ такомъ случаѣ въ выраженіи (6) функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго дѣлителя первой степени: $y-p$; слѣдовательно

$$F_1(p)=0\,, \qquad F_2(p)=0\,.$$

На основаніи формулъ (5) эти уравненія могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{m}{p-v}=0\,, \tag{7}$$

$$\sum \frac{mv'}{p-v}=0\,. \tag{8}$$

Уравненіе (8) дифференціальное; полный интегралъ этого уравненія легко можетъ быть найденъ. Для этой цѣли умножимъ уравненіе (7) на ∂p, а уравненіе (8) на ∂x и вычтемъ; получимъ

$$\sum \frac{m\,(\partial p-\partial v)}{p-v}=0\,.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum a \log (p-v)=\log C\,,$$

или

$$\Pi\,(p-v)^m=C\,. \tag{9}$$

Остается теперь изъ уравненій (7) и (9) опредѣлить p и v_n черезъ остальныя функціи $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M=\frac{F_1(y)}{y-p}\,, \qquad N=-\frac{F_2(y)}{y-p}\,.$$

4. Пониженіе степени на единицу; второе рѣшеніе.

Пониженіе степени на единицу въ функціяхъ M и N можетъ быть сдѣлано еще другимъ способомъ. Мы можемъ наши величины подобрать такъ, чтобы въ функціяхъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ [уравненія (6)] коэффиціенты при y^{n-1} обращались въ нули.

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$; положимъ

$$\sum m = 0. \tag{10}$$

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mr'$; положимъ

$$\sum mr' = 0.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum mr = C. \tag{11}$$

Если равенства (10) и (11) удовлетворяются, то рѣшеніе нашей задачи дается уравненіемъ (6), т. е. въ настоящемъ случаѣ

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

5. Пониженіе степени на два; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что данная степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ функціи $F_1(y)$ и $(F_2(y)$ должны имѣть общій квадратный множитель: $(y-p)(y-q)$. Въ § 3 было показано, что корни этого множителя должны удовлетворять уравненіямъ

$$\sum \frac{m}{p-r} = 0, \qquad \Pi(p-r)^m = C,$$

$$\sum \frac{m}{q-r} = 0, \qquad \Pi(q-r)^m = C'.$$

Остается изъ этихъ уравненій опредѣлить p, q, r_n и r_{n-1} черезъ остальныя функціи $r_1, r_2, \ldots, r_{n-2}$, которыя можно считать произвольными. Послѣ такого опредѣленія функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

6. Пониженіе степени на два; второе рѣшеніе.

Положимъ опять, что данная степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ, какъ сказано раньше, функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго квадратнаго множителя. Мы предполагали, что корни этого квадратнаго множителя различны. Но можетъ случиться,

что корни квадратнаго множителя равны, т. е. самъ общій множитель превращается въ полный квадратъ: $(y-p)^2$. Въ такомъ случаѣ должны удовлетворяться слѣдующія уравненія

$$F_1(p)=0\,,\qquad F_1'(p)=0\,, \tag{12}$$

$$F_2(p)=0\,,\qquad F_2'(p)=0\,. \tag{13}$$

На основаніи формулъ (5) уравненія (12) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum\frac{m}{p-v}=0\,, \tag{14}$$

$$\sum\frac{m}{(p-v)^2}=0\,. \tag{15}$$

Уравненія (13) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum\frac{mv'}{p-v}=0\,, \tag{16}$$

$$\sum\frac{mv'}{(p-v)^2}=0\,. \tag{17}$$

Покажемъ теперь, что эти четыре уравненія зависимы, что уравненіе (17) будетъ слѣдствіемъ уравненій (14) и (15). Дифференцируя уравненіе (14), находимъ

$$\sum\frac{m(p'-v')}{(p-v)^2}=0\,.$$

Если это послѣднее уравненіе вычтемъ изъ уравненія (15), умноженнаго на p', то получимъ уравненіе (17). Итакъ, уравненіе (17) можно отбросить. Далѣе, дифференціальное уравненіе (16), какъ показано въ § 3, можетъ быть замѣнено его полнымъ интеграломъ

$$\Pi(p-v)^m=C\,. \tag{18}$$

Остается функціи p, v_1, v_2, ..., v_n подобрать такъ, чтобы удовлетворялись уравненія (14), (15) и (18). Изъ этихъ трехъ уравненій могутъ быть опредѣлены три функціи черезъ $n-2$ остальныя функціи, которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются такъ

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^2}\,,\qquad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}\,.$$

7. Пониженіе степени на два; третье рѣшеніе.

Покажемъ еще третье рѣшеніе той же самой задачи, т. е. мы опять предполагаемъ, что степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ § 4 было показано, что степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ можно понизить на единицу, если коэффиціенты при y^{n-1} въ этихъ функціяхъ приравняемъ нулю. Въ результатѣ получимъ уравненія

$$\sum m=0\,, \qquad \sum mv=C. \tag{19}$$

Нужно понизить степень функцій M и N еще на единицу. Для этой цѣли нужно подобрать $v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ имѣли общій корень p. По доказанному въ § 3 получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum \frac{m}{p-v}=0\,, \qquad \Pi(p-v)^m=C'. \tag{20}$$

Остается подобрать показатели $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и функціи $p, v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись четыре уравненія (19) и (20). Послѣ этого искомыя функціи опредѣляются по формуламъ

$$M=\frac{F_1(y)}{y-p}, \qquad N=-\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

8. Пониженіе степени на два; четвертое рѣшеніе.

Мы можемъ понизить степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ на двѣ единицы, если коэффиціенты при двухъ высшихъ степеняхъ въ каждой функціи приравняемъ нулю.

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$.

Коэффиціентъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mv - \sum m \sum v$. Приравнявъ эти коэффиціенты нулю, получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum m=0\,, \qquad \sum mv=0. \tag{21}$$

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mv'$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль на основаніи второго уравненія (21). Коэф-

фиціентъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mvv' - \sum v \sum mv'$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль, если

$$\sum mvv' = 0.$$

Полный интегралъ этого дифференціальнаго уравненія будетъ

$$\sum mv^2 = C. \tag{22}$$

Остается подобрать $m_1, m_2, \ldots, m_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись три уравненія (21) и (22). Послѣ этого искомыя функціи M и N будутъ

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

9. Пониженіе степени на три.

Мы можемъ понижать степень искомыхъ функцій M и N далѣе. Изъ предыдущаго становится уже яснымъ дальнѣйшій ходъ рѣшенія. Положимъ, что степень функцій M и N понижается на три единицы, т. е. равна $n-4$. Въ такомъ случаѣ задача допускаетъ семь слѣдующихъ рѣшеній.

Первое рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{r-v} = 0,$$

$$\Pi(p-v)^m = C, \qquad \Pi(q-v)^m = C', \qquad \Pi(r-v)^m = C'',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}.$$

Второе рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0,$$

$$\Pi(p-v)^m = C, \qquad \Pi(q-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^2(y-q)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^2(y-q)}.$$

Третье рѣшеніе.

$$\sum\frac{m}{p-v}=0,\quad \sum\frac{m}{(p-v)^2}=0,\quad \sum\frac{m}{(p-v)^3}=0,$$

$$\Pi(p-v)^m=C,$$

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^3},\quad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^3}.$$

Четвертое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum\frac{m}{p-v}=0,\quad \sum\frac{m}{q-v}=0,$$

$$\sum mv=C,\quad \Pi(p-v)^m=C',\quad \Pi(q-v)^m=C'',$$

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)},\quad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

Пятое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum\frac{m}{p-v}=0,\quad \sum\frac{m}{(p-v)^2}=0,$$

$$\sum mv=C,\quad \Pi(p-v)^m=C',$$

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^2},\quad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}.$$

Шестое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum mv=0,\quad \sum\frac{m}{p-v}=0,$$

$$\sum mv^2=C,\quad \Pi(p-v)^m=C',$$

$$M=\frac{F_1(y)}{y-p},\quad N=-\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Седьмое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum mv=0,\quad \sum mv^2=0,\quad \sum mv^3=C,$$

$$M=F_1(y),\quad N=-F_2(y).$$

Во всѣхъ рѣшеніяхъ $n-3$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

Мы можемъ это пониженіе продолжить до тѣхъ поръ, пока M и N будутъ содержать y въ первой степени, т. е. искомое уравненіе приведется къ формѣ (3). При этомъ придется сдѣлать пониженіе на $n-2$. Согласно данной выше теоріи въ окончательномъ результатѣ останутся произвольными двѣ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

10. Общая задача.

Дано дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0, \tag{23}$$

въ которомъ M и N суть цѣлыя алгебраическія функціи относительно y; требуется узнать, можетъ ли быть полный интегралъ этого уравненія выраженъ въ формѣ (2).

Эта задача можетъ быть рѣшена лишь въ томъ случаѣ, когда число n дано. Въ такомъ случаѣ мы можемъ составить всѣ формы дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ общій интегралъ въ формѣ (2) и содержащихъ y въ той же степени, какъ и данное уравненіе (23). Потомъ останется узнать, заключается ли данное уравненіе въ одной изъ найденныхъ формъ.

Зависимость между Кинкелиновыми и гаммаморфными функціями.

В. П. Алексѣевскаго.

Подъ названіемъ функцій Кинкелина г. Бопенъ [1]) разумѣетъ функціи $K_n(x)$, удовлетворяющія уравненію

$$K_n(x+1) = x^{x^n} K_n(x)$$

при условіи $K_n(1) = 1$.

Функція $K_0(x)$ совпадаетъ съ Эйлеровой функціей $\Gamma(x)$; функція $K_1(x)$ была указана и изучена Кинкелиномъ; начало изслѣдованій функцій высшихъ порядковъ было положено Глешеромъ.

Тому-же вопросу посвященъ недавно вышедшій мемуаръ г. Бопэна. Въ послѣдней главѣ авторъ показываетъ связь между функціей $K_1(x)$ и функціей $G(x)$, свойства которой были изучены мною, и строитъ классъ функцій, представляющихъ обобщеніе функціи $G(x)$. Повидимому г. Бопэну не было извѣстно, что функція $G(x)$ является лишь простѣйшей представительницей функцій, подобныхъ функціи гамма, основаніе теоріи которыхъ было дано мною [2]) и недавно изложено въ новой формѣ г. Барнесомъ въ рядѣ мемуаровъ [3]).

---

[1]) Beaupin. „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin".
Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie de Belgique. T. 59.

[2]) „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма". Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества. 2 Сер. т. I.

[3]) Barnes. „The Theory of the G Function". Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 31.

Barnes. „Genesis of the Double Gamma Function". Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 31.

Barnes. „The Theory of the Double Gamma Function". Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Vol. 196.

Въ этой статьѣ я показываю, что теорія Кинкелиновыхъ функцій находится въ самой тѣсной связи съ теоріей функцій, подобныхъ функціи гамма $G_n(x)$: *всѣ* функціи Кинкелина могутъ быть составлены изъ функцій $G_n(x)$ и обратно. То-же заключеніе справедливо и для функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$.

Небезъинтересно замѣтить, что выраженіе Кинкелиновыхъ функцій въ зависимости отъ функцій $G_n(x)$ требуетъ возвышенія послѣднихъ въ степени, показатели которыхъ суть цѣлыя раціональныя функціи x, тогда какъ составъ функцій Якоби, Гейне, Аппеля, модульныхъ Эрмита и, слѣдовательно, двуперіодическихъ гораздо проще: они сводятся къ произведеніямъ или частнымъ функцій подобныхъ функціи гамма [1]).

1. *Дифференціальное уравненіе между двумя послѣдовательными гаммаморфными функціями.*

Прежде чѣмъ приступить къ выводу вышеупомянутыхъ зависимостей, я остановлюсь на обобщеніи нѣкоторыхъ свойствъ функцій, подобныхъ функціи гамма, которыя дальше для краткости я буду называть *гаммаморфными.*

Простѣйшій классъ гаммаморфныхъ функцій характеризуется функціональнымъ уравненіемъ:

$$G_n(x+1) = G_{n-1}(x)\, G_n(x) \tag{1}$$

при чемъ

$$G_0(x) = \Gamma(x), \qquad G_1(x) = G(x),$$

слѣдовательно

$$G_1(x+1) = \Gamma(x)\;\; G_1(x). \tag{2}$$

Выборъ рѣшеній ограничивается слѣдующимъ условіемъ.

Такъ какъ общее рѣшеніе уравненій (1) и (2) получается умноженіемъ частнаго рѣшенія на произвольную періодическую функцію съ періодомъ, равнымъ единицѣ, то, по опредѣленію, подъ $G_n(x)$ мы разумѣемъ функцію не разлагаемую на рѣшеніе того же уравненія (1) и періодическую функцію.

Кромѣ того функціи $G_n(x)$ подчинены условію:

$$G_n(1) = 1.$$

Разсмотримъ логариѳмическія производныя тѣхъ-же функцій. Положимъ для краткости обозначеній:

$$D \log\, G_n(x) = \phi_n(x), \qquad D \log\, \Gamma(x) = \psi(x).$$

---

[1]) См. мою статью: „Über eine Classe von Functionen, die der Gammafunction analog sind". Berichte der Sächs. Gesellschaft zu Leipzig. Math.-Phys. Cl. Bd. 6.

Функціи $\varphi_n(x)$ въ силу равенствъ (1) и (2) опредѣляются функціональными уравненіями такой формы:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) &= \varphi_{n-1}(x), \\ \varphi_1(x+1) - \varphi_1(x) &= \psi(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Основнымъ предложеніемъ въ теоріи гаммаморфныхъ функцій служитъ дифференціальное уравненіе [1]):

$$D\log G_1(x+1) = x\ D\log\Gamma(x) - (x-1) + D\log G_1(1),$$

которое въ новыхъ обозначеніяхъ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\varphi_1(x+1) = x\psi(x) - (x-1) + \varphi_1(1). \tag{4}$$

Установимъ соотвѣтственное уравненіе для функцій φ высшихъ порядковъ.

Пользуясь символомъ Δ для обозначенія разности, въ силу равенствъ (3) мы можемъ представить уравненіе (4) такъ:

$$\Delta\varphi_2(x+1) = x\Delta\varphi_1(x) - (x-1) + \varphi_1(1).$$

Замѣтивъ, что

$$x\Delta\varphi_1(x) = \Delta[x\varphi_1(x) - \varphi_2(x+1)],$$

находимъ, что

$$\varphi_2(x+1) = x\varphi_1(x) - \varphi_2(x+1) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} + x\varphi_1(1) + C.$$

Опредѣливъ постоянное C, полагая $x=0$, получимъ окончательно

$$2\varphi_2(x+1) = x\varphi_1(x) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} + x\varphi_1(1) + 2\varphi_2(1). \tag{5}$$

Переходъ отъ уравненія (4) къ (5) есть не что иное, какъ интегрированіе въ конечныхъ разностяхъ уравненія (4), поэтому, не повторяя однихъ и тѣхъ-же разсужденій, можемъ сразу получить общій результатъ, взявъ конечный интегралъ $(n-1)$-го порядка отъ обѣихъ частей уравненія (4) и опредѣливъ каждое изъ произвольныхъ постоянныхъ, вводимыхъ послѣдовательнымъ интегрированіемъ, полагая $x=0$.

Такимъ способомъ получимъ:

$$n\varphi_n(x+1) = x\varphi_{n-1}(x) + Q_n(x), \tag{A}$$

---

[1]) См. „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма". § 3.

гдѣ $Q_n(x)$ — полиномъ n-ой степени, именно

$$Q_n(x) = -\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!} +$$

$$+\sum_{k=1}^{k=n} k\psi_k(1)\frac{x(x-1),\ldots,(x-n+k+1)}{(n-k)!}.$$

Уравненіе (A) и есть искомое.

Интегрируя послѣднее уравненіе отъ 0 до x, получимъ:

$$n \log G_n(x+1) = x \log G_{n-1}(x) - \int_0^x \log G_{n-1}(x)\, dx + \int_0^x Q_n(x)\, dx. \quad (B)$$

Отсюда, полагая $x=1$ и перемѣнивъ n на $n+1$, находимъ:

$$\int_0^1 \log G_n(x) dx = \int_0^1 Q_{n+1}(x) dx.$$

Ясно, что искомый интегралъ есть линейная функція постоянныхъ $\psi_1(1)$, $\psi_2(1), \ldots, \psi_{n+1}(1)$; причемъ важно замѣтить, что въ число необходимыхъ постоянныхъ для опредѣленія интеграла отъ функціи n-го порядка входитъ $\psi_{n+1}(1)$.

2. Выраженіе гаммаморфныхъ функцій въ зависимости отъ производной отъ $\log\, \Gamma(x)$.

Изъ того-же уравненія (A) слѣдуетъ, что всякая функція $\psi_n(x)$ можетъ быть выражена посредствомъ функціи $\psi(x)$. Дѣйствительно, перемѣнивъ въ этомъ уравненіи x на $x+n-1$, найдемъ:

$$n\psi_n(x+n) = (x+n-1)\psi_{n-1}(x+n-1) + Q_n(x+n-1).$$

Слѣдовательно,

$$(n-1)\psi_{n-1}(x+n-1) = (x+n-2)\psi_{n-2}(x+n-2) + Q_{n-1}(x+n-2),$$

. . . .

$$2\psi_2(x+2) = (x+1)\psi_1(x+1) + Q_2(x+1),$$

$$\psi_1(x+1) = x\psi(x) + Q_1(x).$$

Исключивъ изъ этой системы $\varphi_1(x+1), \ldots, \varphi_{n-1}(x+n-1)$, получимъ

$$n!\,\varphi_n(x+n) = x(x+1), \ldots, (x+n-1)\,\psi(x) + R_n(x) \qquad (C)$$

гдѣ $R_n(x)$ полиномъ n-ой степени.

Итакъ, производная логариѳма гаммаморфной функціи есть линейная функція отъ производной логариѳма $\Gamma(x)$ съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей уравненія (C) въ предѣлахъ отъ 0 до x и замѣтивъ, что $G_n(n) = 1$, въ чемъ легко убѣдиться съ помощью равенства (1), получимъ

$$n!\log G_n(x+n) =$$

$$= \int_0^x x(x+1)\,\ldots\,(x+n-1)\,\psi(x)\,dx + \int_0^x R_n(x)\,dx. \qquad (D)$$

Таково выраженіе логариѳма гаммаморфной функціи въ зависимости отъ функціи $\psi(x)$.

3. *Выраженіе Кинкелиновыхъ функцій посредствомъ гаммаморфныхъ и обратно.*

Перейдемъ теперь къ установленію зависимости между функціями $K_n(x)$ и $G_n(x)$.

Основное уравненіе, характерное для Кинкелиновыхъ функцій, можетъ быть записано въ такой формѣ:

$$\log K_n(x+1) - \log K_n(x) = x^n \log x. \qquad (6)$$

По свойству функціи $\Gamma(x)$ имѣемъ

$$\Delta\,[x^n.\log\Gamma(x)] = x^n\log x + \Delta x^n.\log\Gamma(x+1).$$

Точно также по свойству (1) функцій $G_n(x)$, находимъ

$$\Delta\,[\Delta\,x^n.\log G_1(x+1)] = \Delta\,x^n.\log\Gamma\,(x+1) + \Delta^2 x^n.\log G_1(x+2),$$

$$\Delta\,[\Delta^2 x^n.\log G_2(x+2)] = \Delta^2 x^n.\log G_1(x+2) + \Delta^3 x^n.\log G_2(x+3),$$

. . . .

$$\Delta\,[\Delta^n x^n.\log G_n(x+n)] = \Delta^n x^n.\log G_{n-1}(x+n),$$

гдѣ $\Delta^n x^n = n!$

Изъ этихъ равенствъ не трудно обнаружить слѣдующее тождество

$$x^n \log x = \Delta \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Delta^k x^n . \log G_k(x+k).$$

Внося это выраженіе въ равенство (6), находимъ

$$\log K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Delta^k x^n . \log G_k(x+k) + C.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что

$$K_n(1) = 1\,, \qquad G_n(1) = 1\,, \qquad G_k(1+k) = 1$$

заключаемъ, что *постоянное* $C = 0$.

Слѣдовательно,

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n . \log G_1(x+1) +$$

$$+ \Delta^2 x^n . \log G_2(x+2) - \ldots + (-1)^n \Delta^n x^n . \log G_n(x+n). \qquad (E)$$

Этотъ выводъ въ силу равенствъ (1) можно формулировать такъ: *логариѳмъ всякой Кинкелиновой функціи есть линейная функція логариѳмовъ гаммаморфныхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.*

Изъ обзора уравненій

$$\log K_1(x) = x \log \Gamma(x) - \log G_1(x+1)$$

$$\log K_2(x) = x^2 \log \Gamma(x) - \Delta x^2 \log G_1(x+1) + 2! \log G_2(x+2)$$

. . . .

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n \log G_1(x+2) + \ldots + (-1)^n n! \log G_n(x+n)$$

ясно, что и обратно, *логариѳмъ всякой гаммаморфной функціи $G_n(x)$ есть линейная функція логариѳмовъ Кинкелиновыхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами относительно x.*

И, дѣйствительно, рѣшеніе приведенной системы даетъ:

$$n! \log G_n(x+n) =$$

$$= P_n \log \Gamma(x) - P_n' \log K_1(x) + \frac{P_n''}{2!} \log K_2(x) - \ldots + (-1)^n \frac{P_n^n}{n!} \log K_n(x). \;(F)$$

гдѣ

$$P_n = x(x+1)\ \dots\ (x+n-1),$$

а P'_n, P''_n, ... суть производныя отъ P_n.

4. Зависимость между основными постоянными обѣихъ системъ функцій.

Мы видѣли въ § 1 какую важную роль играютъ постоянныя $\varphi_1(1)$, $\varphi_2(1)\dots$ въ теоріи функцій G_n. Эти постоянныя могутъ быть замѣнены другими системами, между прочимъ вышеупомянутыми интегралами

$$\int_0^1 \log G_n(x)\, dx.$$

Аналогичныя постоянныя имѣютъ огромное значеніе для Кинкелиновыхъ функцій. За основную систему въ теоріи Кинкелиновыхъ функцій Глешеръ и Бопэнъ принимаютъ постоянныя ω_{n-1}, которыя опредѣляются такъ:

$$\int_0^1 \log K_n(x)\, dx = \frac{1}{2}\log \omega_{n-1}.$$

Для того, чтобы установить связь между обѣими системами постоянныхъ, мы выведемъ выраженіе производной отъ $\log K_n(x)$ изъ формулы (E).

Посредствомъ дифференцированія, получимъ:

$$D\log K_n(x) = n\,[x^{n-1}\log\Gamma(x) - \Delta x^{n-1}.\log G_1(x+1) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\Delta^{n-1}x^{n-1}.\log G_{n-1}(x+n-1)] + R_n(x),$$

гдѣ

$$R_n(x) = x^n\psi(x) - \Delta x^n\varphi_1(x+1) + \dots + (-1)^n\Delta^n x^n\varphi_n(x+n). \qquad (7)$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ $\log K_{n-1}(x)$, слѣдовательно

$$D\log K_n(x) = n\log K_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Для опредѣленія вида функціи $R_n(x)$ составимъ разность

$$R_n(x+1) - R_n(x) = \Delta R_n(x).$$

Вычисленіе этой разности въ силу равенствъ (3) даетъ

$$\Delta R_n(x) = x^{n-1}.$$

Назовемъ чрезъ $B_n(x)$ полиномъ Бернулли, написанный въ такой формѣ, что

$$B_n(x+1)-B_n(x)=x^{n-1}.$$

Черезъ сличеніе этихъ результатовъ, находимъ

$$R_n(x)=B_n(x)+A_n \tag{8}$$

гдѣ A_n постоянное.

Отсюда, полагая $x=0$ и замѣтивъ, что $B_n(0)=0$, получимъ

$$A_n=R_n(0).$$

Для опредѣленія $R_n(0)$ изъ формулы (7) необходимо напомнить, что 0 есть полюсъ функціи $\psi(x)$, причемъ изъ функціональнаго уравненія

$$\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$$

непосредственно слѣдуетъ, что

$$[x\psi(x)]_{x=0}=-1.$$

Вслѣдствіе этого равенство (7) даетъ при $n>1$

$$A_n=-\Delta 0^n \mathcal{G}_1(1)+\Delta^2 0^n \mathcal{G}_2(2)-\ldots+(-1)^n \Delta^n 0^n \mathcal{G}_n(n). \tag{9}$$

Въ случаѣ же $n=1$, получимъ

$$A_1=-1-\mathcal{G}_1(1). \tag{10}$$

Изъ соотношеній (3) ясно, что A_n представляетъ линейную функцію постоянныхъ $\mathcal{G}_1(1), \mathcal{G}_2(1), \ldots, \mathcal{G}_n(1)$.

Опредѣливъ составъ постоянныхъ A_n, мы можемъ остановиться на слѣдующемъ выраженіи производной $\log K_n(x)$:

$$D\log K_n(x)=n\log K_{n-1}(x)+B_n(x)+A_n. \tag{11}$$

Обращаясь къ мемуару Бопэна на стр. 20 мы находимъ слѣдующую зависимость:

$$\log K_n(x)=n\int_0^x \log K_{n-1}(x)\,dx+\frac{1}{n}B_{n+1}(x)-\frac{n}{2}x\log\omega_{n-1}.$$

Откуда чрезъ дифференцированіе находимъ

$$D\log K_n(x)=n\log K_{n-1}(x)+\frac{1}{n}B'_{n+1}(x)-\frac{n}{2}\log\omega_{n-1}.$$

Имѣя въ виду, что по свойству Бернулліевыхъ функцій

$$B'_{n+1}(x) = n B_n(x) + B'_{n+1}(0),$$

получимъ

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + B_n(x) + \frac{1}{n} B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Сравнивая двѣ формы производной $\log K_n(x)$, находимъ

$$A_n = \frac{1}{n} B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}. \tag{12}$$

Замѣтимъ еще, что полагая $x = 1$, получимъ

$$A_n = D \log K_n(1).$$

5. *Выраженіе функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$, посредствомъ гамморфныхъ и обратно.*

Обратимся къ обобщенію функціи $G_1(x) = G(x)$, данному г. Бопэномъ. Замѣтивъ соотношеніе

$$G_1(x) = \frac{\Gamma^{x-1}(x)}{K_1(x)},$$

Бопэнъ составляетъ такія функціи,

$$J_n(x) = \frac{K_{n-1}^{x-1}(x)}{K_n(x)}.$$

Очевидно, что $J_1(x)$ тождественно съ $G_1(x)$, но остальныя функціи $J_n(x)$ суть новыя функціи.

Изъ этого опредѣленія по свойству Кинкелиновыхъ функцій слѣдуетъ, что

$$J_n(x+1) = K_{n-1}(x) J_n(x)$$

и

$$J_n(1) = 1.$$

Чтобы обнаружить выраженіе функцій $J_n(x)$ чрезъ посредство гамморфныхъ функцій, логариѳмируемъ предыдущее равенство; получимъ:

$$\log J_n(x+1) - \log J_n(x) = \log K_{n-1}(x).$$

Слѣдовательно, $\log J_n(x)$ представляетъ конечный интегралъ отъ $\log K_{n-1}(x)$.

Принимая во вниманіе, что по доказанному имѣемъ

$$\log K_{n-1}(x) =$$

$$= x^{n-1} \log \Gamma(x) - \Delta x^{n-1} \log G_1(x+1) +$$

$$+ \Delta^2 x^{n-1} \log G_2(x+1) - \ldots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} x^{n-1} \log G_{n-1}(x+n-1),$$

чрезъ конечное интегрированіе, прилагая справа методъ интеграціи по частямъ, находимъ:

$$\log J_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \log G_1(x) - 2\,\Delta x^{n-1} . \log G_2(x+1) +$$

$$+ 3\Delta^2 x^{n-1} . \log G_3(x+2) - \ldots + (-1)^{n-1}\, n \Delta^{n-1} x^{n-1} . \log G_n(x+n-1) . \quad (G)$$

Откуда слѣдуетъ, что обратно

$$n! \log G_n(x+n-1) = P_{n-1} \log G_1(x) - P'_{n-1} \log J_2(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{P^{n-1}_{n-1}}{(n-1)!} \log J_n(x) \quad (H)$$

гдѣ

$$P_{n-1} = x(x+1) \ldots (x+n-2).$$

6. Выраженіе тѣхъ-же функцій посредствомъ кратнаго интеграла отъ логариѳма функціи $G_1(x)$.

Равенство (G) даетъ выраженіе $\log J_n(x)$ въ зависимости отъ системы функцій $G_1, G_2, \ldots, G_n$; можно показать, что $J_n(x)$ зависитъ исключительно отъ первой изъ нихъ $G_1(x)$.

Прежде всего это обнаруживается для J_2. Полагая въ формулѣ (G) $n = 2$, находимъ

$$\log J_2(x) = x \log G_1(x) - 2 \log G_2(x+1).$$

Полагая же въ формулѣ (B) тоже $n = 2$, получимъ:

$$2 \log G_2(x+1) = x \log G_1(x) - \int_0^x \log G_1(x)\, dx + \int_0^x Q_2(x)\, dx.$$

Чрезъ сравненіе этихъ двухъ тождествъ имѣемъ

$$\log J_2(x) = \int_0^x \log G_1(x)\,dx - \int_0^x Q_2(x)\,dx.$$

Для обобщенія этого вывода, найдемъ сначала выраженіе производной отъ $\log J_n(x)$.

Изъ формулы (G) находимъ:

$$D\log J_n(x) =$$

$$= (n-1)\,[x^{n-2}\log G_1(x) - 2\Delta x^{n-2}\log G_2(x+1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}(n-1)\,\Delta^{n-2}x^{n-2}\log G_{n-1}(x+n-2)] + S_n(x),$$

гдѣ

$$S_n(x) =$$

$$= x^{n-1}\phi_1(x) - 2\Delta x^{n-1}.\phi_2(x+1) + \ldots + (-1)^{n-1} n\Delta^{n-1}x^{n-1}\phi_n(x+n-1).$$

Составивъ разность отъ $S_n(x)$, находимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) =$$

$$= x^{n-1}\varphi(x) - \Delta x^{n-1}\phi_1(x+1) + \ldots + (-1)^{n-1}\Delta^{n-1}x^{n-1}.\phi_n(x+n-1).$$

Сравнивая правую часть съ формулой (7) и принимая во вниманіе равенство (8), получимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) = B_{n-1}(x) + A_{n-1}.$$

Такъ какъ $B_{n-1}(x)$ есть полиномъ $(n-1)$-ой степени, то $S_n(x)$ будетъ полиномъ n-ой степени, выраженіе котораго не трудно найти.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ тождества

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x\,[B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)]$$

слѣдуетъ, что

$$S_n(x) = (x-1)\,B_{n-1}(x) - B_n(x) + A_{n-1}x + S_n(0).$$

Постоянное $S_n(0)$ получается безъ затрудненій изъ первоначальнаго выраженія $S_n(x)$, принявъ во вниманіе, что

$$[x\phi_1(x)]_{x=0} = 1.$$

Выяснивъ это обстоятельство, имѣемъ

$$D \log J_n(x) = (n-1) J_{n-1}(x) + S_n(x).$$

Отсюда, дифференцируя $(n-2)$ раза, получимъ

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1) D^{n-2} J_{n-1}(x) + F_n^2(x)$$

гдѣ $F_n^2(x)$ полиномъ 2-й степени.

Замѣняя въ предыдущей формулѣ n чрезъ $n-1$, $n-2, \ldots, 2$, получимъ рядъ аналогичныхъ равенствъ

$$D^{n-2} \log J_{n-1}(x) = (n-2) D^{n-3} \log J_{n-2}(x) + F_{n-1}^2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D \log J_2(x) = \log G_1(x) + F_2^2(x).$$

Слѣдовательно, путемъ исключенія получимъ:

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1)! \log G_1(x) + F^2(x),$$

гдѣ $F^2(x)$ — опять полиномъ второй степени.

Интегрируя это равенство $(n-1)$ разъ въ предѣлахъ отъ 0 до x, находимъ:

$$\log J_n(x) = (n-1)! \int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x \log G_1(x)\, dx^{n-1} + F^{n+1}(x). \qquad (J)$$

Итакъ, логариѳмъ $J_n(x)$ отличается отъ интеграла $(n-1)$-й кратности отъ $\log G_1(x)$ на полиномъ $(n+1)$-ой степени.

7. *Обобщеніе.*

Строеніе функціональнаго уравненія Кинкелиновыхъ функцій указываетъ на возможность разнообразныхъ обобщеній; напримѣръ, выраженіе каждой изъ функцій $F_n(x)$, удовлетворяющихъ одному изъ уравненій

$$F_n(x+1) = G_j^{x^n}(x) . F_n(x)$$

$$F_n(x+1) = K_j^{x^n}(x) . F_n(x)$$

$$F_n(x+1) = J_j^{x^n}(x) . F_n(x)$$

можетъ быть найдено пріемомъ, указаннымъ выше.

Логариѳмъ каждой изъ такихъ функцій $F_n(x)$ представляетъ линейную функцію логариѳмовъ гаммаморфныхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Выборъ показателя въ формѣ x^n не существененъ: предыдущее заключеніе остается неизмѣннымъ, если примемъ показателемъ какую угодно цѣлую раціональную функцію x; поэтому къ той-же категоріи относится функція $F_n(x)$, опредѣляемая уравненіемъ:

$$F_n(x+1) = x^{r_0(x)} \cdot G_j^{r_1(x)}(x) \cdot K_p^{r_2(x)} \cdot J_q^{r_3(x)} \cdot F_n(x).$$

гдѣ r_0, r_1, r_2, r_3 суть цѣлыя раціональныя функціи x.

REMARQUES RELATIVES AUX FORMULES SOMMATOIRES D'EULER ET DE BOOL

PAR

W. Stekloff.

1. On sait beaucoup de démonstrations simples de la formule sommatoire d'Euler. Néanmoins je me permets de publier quelques remarques relatives à cette formule, ainsi qu' à la formule analogue de M. Bool, qui me semblent non dénuées d'intérêt au point de vue didactique.

Je vais attirer l'attention sur ce fait qu'on peut déduire les formules en question, ainsi qu'étudier les propriétés fondamentales des polynomes qui s'y rattachent, par un procédé uniforme et très élégant, en partant d'une formule élémentaire, qu'on peut considérer en même temps comme une formule sommatoire générale contenant comme des cas très particuliers celles d'Euler et de Bool.

2. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de la variable réelle x admettant les dérivées de n premiers ordres dans un intervalle quelconque (a, b).

Désignons par $g^{(k)}(-x)$ la dérivée d'ordre k de $g(x)$, où l'on remplace x par $-x$.

Faisant dans l'identité

$$f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(-x) - f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k+1)}(-x) = \frac{d}{dx}[f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k)}(-x)]$$

successivement $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ et additionnant, on trouve

$$f^{(n)}(x)\, g(-x) - f(x)\, g^{(n)}(-x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k)}(-x),$$

d'où, en intégrant entre les limites a et b, on tire, après une réduction simple,

$$f(b)\, g^{(n-1)}(-b) - f(a)\, g^{(n-1)}(-a) =$$

$$= -\int_a^b f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx - \sum_{k=2}^{n} [f^{(k-1)}(b) g^{(n-k)}(-a) - f^{(k-1)}(b) g^{(n-k)}(-a)] +$$

$$+ \int_a^b f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx. \qquad (1)$$

C'est la formule de Kronecker.

3. Posons $b = a + h$, et

$$g(x) = \varphi\left(-\frac{x+a}{h}\right).$$

On aura

$$g^{(n-k)}(-x) = \frac{(-1)^{n-k}}{h^{n-k}}\, \varphi^{(n-k)}(z), \quad z = \frac{x-a}{h}.$$

L'égalité (1) devient

$$f(a+h)\, \varphi^{(n-1)}(1) - f(a)\, \varphi^{(n-1)}(0) =$$

$$= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\, \varphi^{(n)}\left(\frac{x-a}{h}\right) dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(a+h)\, \varphi^{(n-k)}(1) - f^{(k-1)}(a)\, \varphi^{(n-k)}(0)] +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\, \varphi(z)\, dz, \qquad (2)$$

car

$$\int_a^{a+h} f^{(n)}(x)\, \varphi\left(\frac{x-a}{h}\right) dx = h \int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\, \varphi(z)\, dz.$$

Remplaçant dans (2) a par $a + jh$, j étant un entier, faisant ensuite successivement $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ et additionnant les résultats, on trouve, après des réductions simples,

$$[\varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f(a+jh) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b)\, \varphi^{(n-k)}(0) - f^{(k-1)}(a)\, \varphi^{(n-k)}(1)] + \qquad (3)$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1} [\varphi^{(n-k)}(1) - \varphi^{(n-k)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f^{(k-1)}(a+jh) +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz) dz.$$

C'est la formule sommatoire générale, analogue à celle de M. Kronecker [1]).

4. Considérons le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n.

Il est évident que la formule (3) se réduira à celle d'Euler, si nous déterminerons le polynome $\varphi(z)$ à l'aide des conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) = \varphi^{(n-k)}(0). \qquad (k=2, 3, \ldots, n) \qquad (4)$$

La formule (3) se réduira à celle de Bool, si nous supposons que le polynome $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) + \varphi^{(n-k)}(0) = 0. \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (5)$$

Nous considérons, dans ce qui va suivre, ces deux cas les plus intéressants, sans traiter la question générale.

5. Supposons d'abord que $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions (4).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(0) = A'_n, \qquad \varphi^{(n-k)}(0) = A_k. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (6)$$

---

[1]) Comparer L. Kronecker: „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale". Leipzig. 1894, p. 148.

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z) = A_k + z\frac{A_{k-1}}{1\,!} + z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + z^{k-1}\frac{A_1}{(k-1)\,!} + z^k\frac{A_0}{k\,!}. \quad (7)$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n)$$

En posant $z=1$, on trouve, en vertu de (4),

$$A_{k-1} + \frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + \frac{A_1}{(k-1)\,!} + \frac{A_0}{k\,!} = 0. \quad (8)$$
$$(k=2,3,\ldots,n)$$

Ces $n-1$ équations déterminent successivement les rapports

$$\frac{A_k}{A_0}. \qquad (k=1,2,\ldots,n-1)$$

Les coefficients A_0 et A'_n restent indéterminés.
Nous posons, pour plus de simplicité,

$$A'_n = 0, \qquad A_0 = 1. \quad (9)$$

Nous obtiendrons ainsi le polynome

$$\varphi(z) = \frac{z^n}{n\,!} + z^{n-1}\frac{A_1}{(n-1)\,!} + z^{n-2}\frac{A_2}{(n-2)\,!} + \ldots + z^2\frac{A_{n-2}}{2\,!} + zA_{n-1}, \quad (10)$$

A_k étant des constantes, définies par les équations (8), où il faut poser $A_0 = 1$.

En prenant pour n les valeurs entières à partir de $n=2,3,\ldots$, nous obtiendrons une suite de polynomes de degré $2,3,\ldots$ qu'on appelle *polynomes de Bernoulli.*

6. Désignons maintenant le polynome de Bernoulli de degré n par $\varphi_n(z)$.

En tenant compte de (10) et (4), on trouve immédiatement

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \quad (11)$$

Posons dans l'équation

$$\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = A_k - z\frac{A_{k-1}}{1\,!} +$$
$$+ z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + (-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{\varphi_n^{(n-1)}(1)}{(k-1)\,!} + (-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (7) $k=2$.

On aura

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) = A_2 + zA_1 + \frac{z^2}{2!}, \qquad \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = A_2 - z\varphi_n^{(n-1)}(1) + \frac{z^2}{2!},$$

d'où

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = z[A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1)].$$

Or, l'équation (7) donne, pour $k=1$, $z=1$,

$$\varphi_n^{(n-1)}(1) = A_1 + 1. \tag{12}$$

On a donc, en vertu de (8) (pour $k=2$),

$$A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1) = 2A_1 + 1 = 0, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = 0.$$

On tire de là, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-3)}(z) + \varphi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 2A_3,$$

$$\varphi_n^{(n-4)}(z) - \varphi_n^{(n-4)}(1-z) = 2A_3 z + \text{Const.} = 2A_3 z,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$A_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k = 2, 3, 4. \tag{14}$$

Supposons que cette égalité soit exacte pour une valeur quelconque paire de k; montrons qu'elle le sera aussi pour $k+1$ et $k+2$.

De l'égalité (14) on tire, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(z) + (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)}(1-z) = 2A_{k+1},$$

$$\varphi_n^{(n-k-2)}(z) + (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k-2)}(1-z) = 2A_{k+1} z.$$

Il s'ensuit que

$$A_{k+1} = 0.$$

Or l'équation (14) est exacte pour $k=2$; elle reste donc exacte pour toutes les valeurs de l'indice $k = 2, 3, 4, \ldots, n$.

On a en même temps

$$A_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ impair.} \tag{15}$$

Posant $k = n$, on trouve

$$\varphi_n(z) + (-1)^{n-1} \varphi_n(1 - z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ impair.}$$

7. Remplaçons maintenant dans (3) φ par φ_n.

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi_n^{(n)}\left(\frac{x - a - jh}{h}\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad b = a + mh,$$

car dans le cas considéré

$$\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x - a - jh}{h}\right) = 1,$$

et la formule (3) devient, en vertu de (4), (6), (12) et (13),

$$\sum_{j=0}^{m} f(a + jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\, dx + \frac{1}{2}[f(b) + f(a)] +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} h^{k-1} A_k [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a + jh + hz)\, dz,$$

où nous avons supprimé, eu égard à (15), le facteur $(-1)^k$ dans la somme du second membre.

C'est la formule d'Euler sous sa forme usuelle.

8. Pour achever l'étude, il ne reste qu'à réduire l'expression

$$R_n = (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m} f^{(n)}[a + h(j + z)]\, dz,$$

aux formes usuelles, dues par Poisson, Ostrogradsky (Malmsten), Jacobi, Schlömilch etc.

Je renverrai, pour la démonstration, à l'Ouvrage de M. A. Markoff: „Calcul des différences finies" (St. Pétersbourg, Partie II, 1891, p.p. 25—27) et aux Mémoires connus de M. Imchenetsky (Annales de l'Université de Kasan, 1870) et de M. Sonin (Annales de l'Ecole Normale, 3 série, T. VI, 1889), où le lecteur trouvera la solution complète et la plus élegante du problème en question.

9. Passons maintenant à l'étude des polynomes vérifiant les conditions (5).

Je désignerai dès à présent un tel polynome par $\psi(z)$ et je poserai

$$\psi^{(n-k)}(0) = C_k. \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{16}$$

On a

$$\psi^{(n-k)}(z) = C_k + z\frac{C_{k-1}}{1!} + z^2\frac{C_{k-2}}{2!} + \ldots + z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!} + z^k\frac{C_0}{k!}, \tag{17}$$

d'où, en vérifiant les conditions (5), on tire

$$2C_k + \frac{C_{k-1}}{1!} + \frac{C_{k-2}}{2!} + \ldots + \frac{C_1}{(k-1)!} + \frac{C_0}{k!} = 0. \tag{18}$$

$$(k=1,2,2,\ldots,n)$$

On obtient ainsi le système de n équations linéaires qui permettent de calculer successivement les rapports des constantes $C_k (k=1, 2, 3, \ldots, n)$ à la constante C_0 qui reste indéterminée.

Posant, pour plus de simplicité, $C_0 = 1$, nous obtiendrons le polynome $\psi(z)$ de degré n, complètement déterminé et satisfaisant aux conditions (5).

Faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous construirons une suite de polynomus de degré $1, 2, 3, \ldots$, que nous désignerons, d'une manière générale, par $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\psi_n(z) = C_n + z\frac{C_{n-1}}{1!} + z^2\frac{C_{n-2}}{2!} + \ldots + z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!}, \tag{19}$$

$C_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes complètement déterminées par les équations (18), où il faut poser $C_0 = 1$.

10. Posons dans l'équation [voir les notations (16) et les équations (5)]

$$-\psi_n^{(n-k)}(1-z) =$$

$$= C_k - z\frac{C_{k-1}}{1!} + z^2\frac{C_{k-2}}{2!} - \ldots + (-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!} - (-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (17) $k=2$; il viendra

$$\psi_n^{(n-2)}(z) = C_2 + z\frac{C_1}{1!} + \frac{z^2}{2!},$$

$$-\psi_n^{(n-2)}(1-z) = C_2 - z\frac{C_1}{1!} - \frac{z^2}{2!},$$

d'où l'on tire

$$\psi_n^{(n-2)}(z) - \psi_n^{(n-2)}(1-z) = 2C_2.$$

Posant $z=1$, on trouve, en tenant compte de (5),

$$C_2 = 0.$$

De l'égalité précédente on tire, en intégrant,

$$\psi_n^{(n-3)}(z) + \psi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 0,$$

$$\psi_n^{(n-4)}(z) - \psi_n^{(n-4)}(1-z) = \text{Const.} = 2C_4,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$C_4 = 0.$$

On a donc

$$\psi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\psi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k=2,3,4. \qquad (20)$$

En répétant les raisonnements du n° 6, on s'assure aisément que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=2, 3, \ldots, n$.

Il est évident aussi qu'elle reste vraie et pour $k=1$.

On a en même temps

$$C_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ pair}. \qquad (21)$$

11. Posons dans (20) $k=n$; on trouve

$$\psi_n(z) + (-1)^{n-1}\psi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Si n est pair, on aura, eu égard à (21),

$$\psi_n(z) = z\frac{C_{n-1}}{1!} + z^2\frac{C_{n-2}}{2!} + \ldots + z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où, en tenant compte de (5), on tire

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ pair.} \tag{22}$$

12. L'égalité (19) donne

$$\psi'_n(z) = C_{n-1} + z\frac{C_{n-2}}{1!} + z^2\frac{C_{n-3}}{2!} + \ldots + z^{n-2}\frac{C_1}{(n-2)!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc toujours, quel que soit l'indice n,

$$\psi'_n(z) = \psi_{n-1}(z). \tag{23}$$

Soit n un nombre pair, soit α_n le nombre de racines de $\psi_n(z)$ à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.

Le nombre de racines de $\psi'_n(z)$ sera au moins égal à $\alpha_n + 1$; celles de $\psi''_n(z)$ au moins égal à α_n [en vertu de (22)].

Or, on a, en tenant compte de (23),

$$\psi''_n(z) = \psi'_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z), \tag{24}$$

d'où l'on conclut que

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n-2} \leqq \alpha_{n-2} \leqq \ldots \leqq \alpha_2.$$

Mais $\alpha_2 = 0$, car

$$\psi_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$, si n est un nombre pair.*

Supposons maintenant que n soit impair.

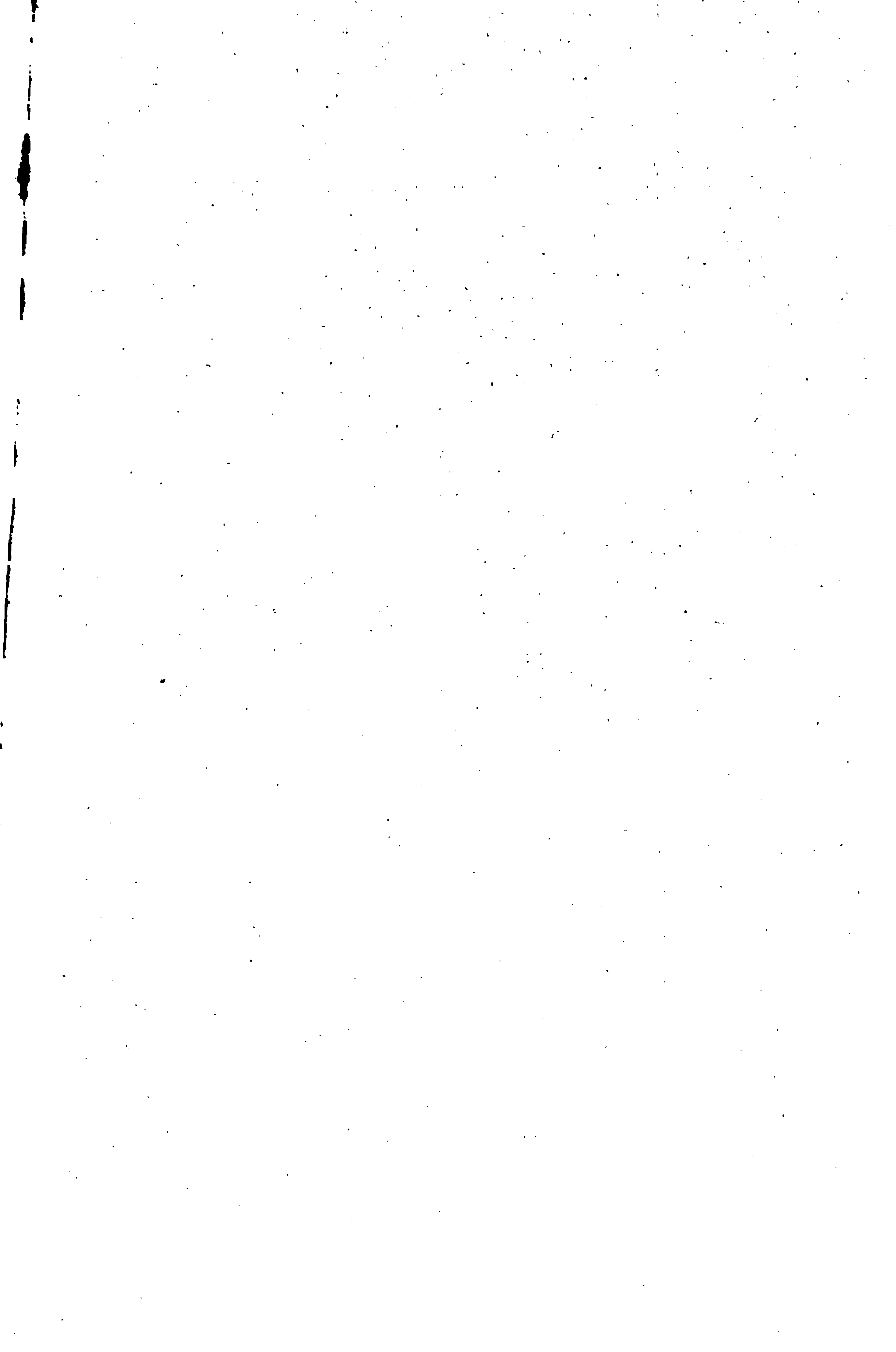
L'égalité (23) montre que $\psi'_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ n'admet qu'une seule racine réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, si n est impair.*

13. Posons $n = 2m$. L'égalité (23) donne, si l'on y remplace n par $2m + 1$,

$$\psi_{2m+1}(1) - \psi_{2m+1}(0) = -2C_{2m+1} = \int_0^1 \psi_{2m}(z)\, dz. \tag{25}$$

On voit que le signe de $\psi_{2m}(z)$ est contraire à celui de la constante C_{2m+1}.



Томъ VIII, № 2 и 3.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, №№ 4 и 5.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ VIII.
№№ 4 и 5.




ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1904.

$$[\varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f(a+jh) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b)\, \varphi^{(n-k)}(0) - f^{(k-1)}(a)\, \varphi^{(n-k)}(1)] + \tag{3}$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1} [\varphi^{(n-k)}(1) - \varphi^{(n-k)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f^{(k-1)}(a+jh) +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz)dz.$$

C'est la formule sommatoire générale, analogue à celle de M. Kronecker [1]).

4. Considérons le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n.

Il est évident que la formule (3) se réduira à celle d'Euler, si nous déterminerons le polynome $\varphi(z)$ à l'aide des conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) = \varphi^{(n-k)}(0). \qquad (k=2, 3, \ldots, n) \tag{4}$$

La formule (3) se réduira à celle de Bool, si nous supposons que le polynome $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) + \varphi^{(n-k)}(0) = 0. \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, n) \tag{5}$$

Nous considérons, dans ce qui va suivre, ces deux cas les plus intéressants, sans traiter la question générale.

5. Supposons d'abord que $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions (4).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(0) = A'_n, \qquad \varphi^{(n-k)}(0) = A_k. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{6}$$

---

[1]) Comparer L. Kronecker: „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale". Leipzig. 1891. p. 148.

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z) = A_k + z\frac{A_{k-1}}{1\,!} + z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + z^{k-1}\frac{A_1}{(k-1)\,!} + z^k\frac{A_0}{k\,!}. \quad (7)$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n)$$

En posant $z = 1$, on trouve, en vertu de (4),

$$A_{k-1} + \frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + \frac{A_1}{(k-1)\,!} + \frac{A_0}{k\,!} = 0. \quad (8)$$
$$(k=2,3,\ldots,n)$$

Ces $n-1$ équations déterminent successivement les rapports

$$\frac{A_k}{A_0}. \qquad (k=1,2,\ldots,n-1)$$

Les coefficients A_0 et A'_n restent indéterminés.
Nous posons, pour plus de simplicité,

$$A'_n = 0, \qquad A_0 = 1. \quad (9)$$

Nous obtiendrons ainsi le polynome

$$\varphi(z) = \frac{z^n}{n\,!} + z^{n-1}\frac{A_1}{(n-1)\,!} + z^{n-2}\frac{A_2}{(n-2)\,!} + \ldots + z^2\frac{A_{n-2}}{2\,!} + zA_{n-1}, \quad (10)$$

A_k étant des constantes, définies par les équations (8), où il faut poser $A_0 = 1$.

En prennant pour n les valeurs entières à partir de $n = 2, 3, \ldots$, nous obtiendrons une suite de polynomes de degré $2, 3, \ldots$ qu'on appelle *polynomes de Bernoulli.*

6. Désignons maintenant le polynome de Bernoulli de degré n par $\varphi_n(z)$.

En tenant compte de (10) et (4), on trouve immédiatement

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \quad (11)$$

Posons dans l'équation

$$\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = A_k - z\frac{A_{k-1}}{1\,!} +$$

$$+ z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + (-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{\varphi_n^{(n-1)}(1)}{(k-1)\,!} + (-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (7) $k = 2$.

On aura

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) = A_2 + zA_1 + \frac{z^2}{2!}, \qquad \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = A_2 - z\varphi_n^{(n-1)}(1) + \frac{z^2}{2!},$$

d'où

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = z[A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1)].$$

Or, l'équation (7) donne, pour $k=1$, $z=1$,

$$\varphi_n^{(n-1)}(1) = A_1 + 1. \tag{12}$$

On a donc, en vertu de (8) (pour $k=2$),

$$A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1) = 2A_1 + 1 = 0, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = 0.$$

On tire de là, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-3)}(z) + \varphi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 2A_3,$$

$$\varphi_n^{(n-4)}(z) - \varphi_n^{(n-4)}(1-z) = 2A_3 z + \text{Const.} = 2A_3 z,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$A_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k = 2, 3, 4. \tag{14}$$

Supposons que cette égalité soit exacte pour une valeur quelconque paire de k; montrons qu'elle le sera aussi pour $k+1$ et $k+2$.

De l'égalité (14) on tire, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(z) + (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)}(1-z) = 2A_{k+1},$$

$$\varphi_n^{(n-k-2)}(z) + (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k-2)}(1-z) = 2A_{k+1} z.$$

Il s'ensuit que

$$A_{k+1} = 0.$$

Or l'équation (14) est exacte pour $k=2$; elle reste donc exacte pour toutes les valeurs de l'indice $k = 2, 3, 4, \ldots, n$.

On a en même temps

$$A_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ impair.} \tag{15}$$

Posant $k = n$, on trouve

$$\varphi_n(z) + (-1)^{n-1} \varphi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ impair.}$$

7. Remplaçons maintenant dans (3) φ par φ_n.

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad b = a + mh,$$

car dans le cas considéré

$$\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) = 1,$$

et la formule (3) devient, en vertu de (4), (6), (12) et (13),

$$\sum_{j=0}^{m} f(a+jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\, dx + \frac{1}{2}[f(b) + f(a)] +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} h^{k-1} A_k [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a + jh + hz)\, dz,$$

où nous avons supprimé, eu égard à (15), le facteur $(-1)^k$ dans la somme du second membre.

C'est la formule d'Euler sous sa forme usuelle.

8. Pour achever l'étude, il ne reste qu'à réduire l'expression

$$R_n = (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m} f^{(n)}[a + h(j+z)]\, dz,$$

aux formes usuelles, dues par Poisson, Ostrogradsky (Malmsten), Jacobi, Schlömilch etc.

Je renverrai, pour la démonstration, à l'Ouvrage de M. A. Markoff: „Calcul des différences finies" (St. Pétersbourg, Partie II, 1891, p.p. 25—27) et aux Mémoires connus de M. Imchenetsky (Annales de l'Université de Kasan, 1870) et de M. Sonin (Annales de l'Ecole Normale, 3 série, T. VI, 1889), où le lecteur trouvera la solution complète et la plus élegante du problème en question.

9. Passons maintenant à l'étude des polynomes vérifiant les conditions (5).

Je désignerai dès à présent un tel polynome par $\psi(z)$ et je poserai

$$\psi^{(n-k)}(0) = C_k. \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{16}$$

On a

$$\psi^{(n-k)}(z) = C_k + z\frac{C_{k-1}}{1!} + z^2\frac{C_{k-2}}{2!} + \ldots + z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!} + z^k\frac{C_0}{k!}, \tag{17}$$

d'où, en vérifiant les conditions (5), on tire

$$2C_k + \frac{C_{k-1}}{1!} + \frac{C_{k-2}}{2!} + \ldots + \frac{C_1}{(k-1)!} + \frac{C_0}{k!} = 0. \tag{18}$$

$$(k=1,2,2,\ldots,n)$$

On obtient ainsi le système de n équations linéaires qui permettent de calculer successivement les rapports des constantes $C_k (k=1, 2, 3, \ldots, n)$ à la constante C_0 qui reste indéterminée.

Posant, pour plus de simplicité, $C_0 = 1$, nous obtiendrons le polynome $\psi(z)$ de degré n, complètement déterminé et satisfaisant aux conditions (5).

Faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous construirons une suite de polynomus de degré $1, 2, 3, \ldots$, que nous désignerons, d'une manière générale, par $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\psi_n(z) = C_n + z\frac{C_{n-1}}{1!} + z^2\frac{C_{n-2}}{2!} + \ldots + z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!}, \tag{19}$$

$C_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes complètement déterminées par les équations (18), où il faut poser $C_0 = 1$.

10. Posons dans l'équation [voir les notations (16) et les équations (5)]

$$-\psi_n^{(n-k)}(1-z) =$$

$$= C_k - z\frac{C_{k-1}}{1!} + z^2\frac{C_{k-2}}{2!} - \ldots + (-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!} - (-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (17) $k=2$; il viendra

$$\psi_n^{(n-2)}(z)=C_2+z\frac{C_1}{1!}+\frac{z^2}{2!},$$

$$-\psi_n^{(n-2)}(1-z)=C_2-z\frac{C_1}{1!}-\frac{z^2}{2!},$$

d'où l'on tire

$$\psi_n^{(n-2)}(z)-\psi_n^{(n-2)}(1-z)=2C_2.$$

Posant $z=1$, on trouve, en tenant compte de (5),

$$C_2=0.$$

De l'égalité précédente on tire, en intégrant,

$$\psi_n^{(n-3)}(z)+\psi_n^{(n-3)}(1-z)=\text{Const.}=0,$$

$$\psi_n^{(n-4)}(z)-\psi_n^{(n-4)}(1-z)=\text{Const.}=2C_4,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$C_4=0.$$

On a donc

$$\psi_n^{(n-k)}(z)+(-1)^{k-1}\psi_n^{(n-k)}(1-z)=0 \qquad \text{pour } k=2,3,4. \tag{20}$$

En répétant les raisonnements du n° 6, on s'assure aisément que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=2,3,\ldots,n$.

Il est évident aussi qu'elle reste vraie et pour $k=1$.

On a en même temps

$$C_k=0 \qquad \text{pour } k \text{ pair}. \tag{21}$$

11. Posons dans (20) $k=n$; on trouve

$$\psi_n(z)+(-1)^{n-1}\psi_n(1-z)=0,$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Si n est pair, on aura, eu égard à (21),

$$\psi_n(z)=z\frac{C_{n-1}}{1!}+z^2\frac{C_{n-2}}{2!}+\ldots+z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!}+\frac{z^n}{n!},$$

d'où, en tenant compte de (5), on tire

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ pair.} \tag{22}$$

12. L'égalité (19) donne

$$\psi'_n(z) = C_{n-1} + z\frac{C_{n-2}}{1!} + z^2\frac{C_{n-3}}{2!} + \ldots + z^{n-2}\frac{C_1}{(n-2)!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc toujours, quel que soit l'indice n,

$$\psi'_n(z) = \psi_{n-1}(z). \tag{23}$$

Soit n un nombre pair, soit α_n le nombre de racines de $\psi_n(z)$ à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.

Le nombre de racines de $\psi'_n(z)$ sera au moins égal à $\alpha_n + 1$; celles de $\psi''_n(z)$ au moins égal à α_n [en vertu de (22)].

Or, on a, en tenant compte de (23),

$$\psi''_n(z) = \psi'_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z), \tag{24}$$

d'où l'on conclut que

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n-2} \leqq \alpha_{n-2} \leqq \ldots \leqq \alpha_2.$$

Mais $\alpha_2 = 0$, car

$$\psi_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$, si n est un nombre pair.*

Supposons maintenant que n soit impair.

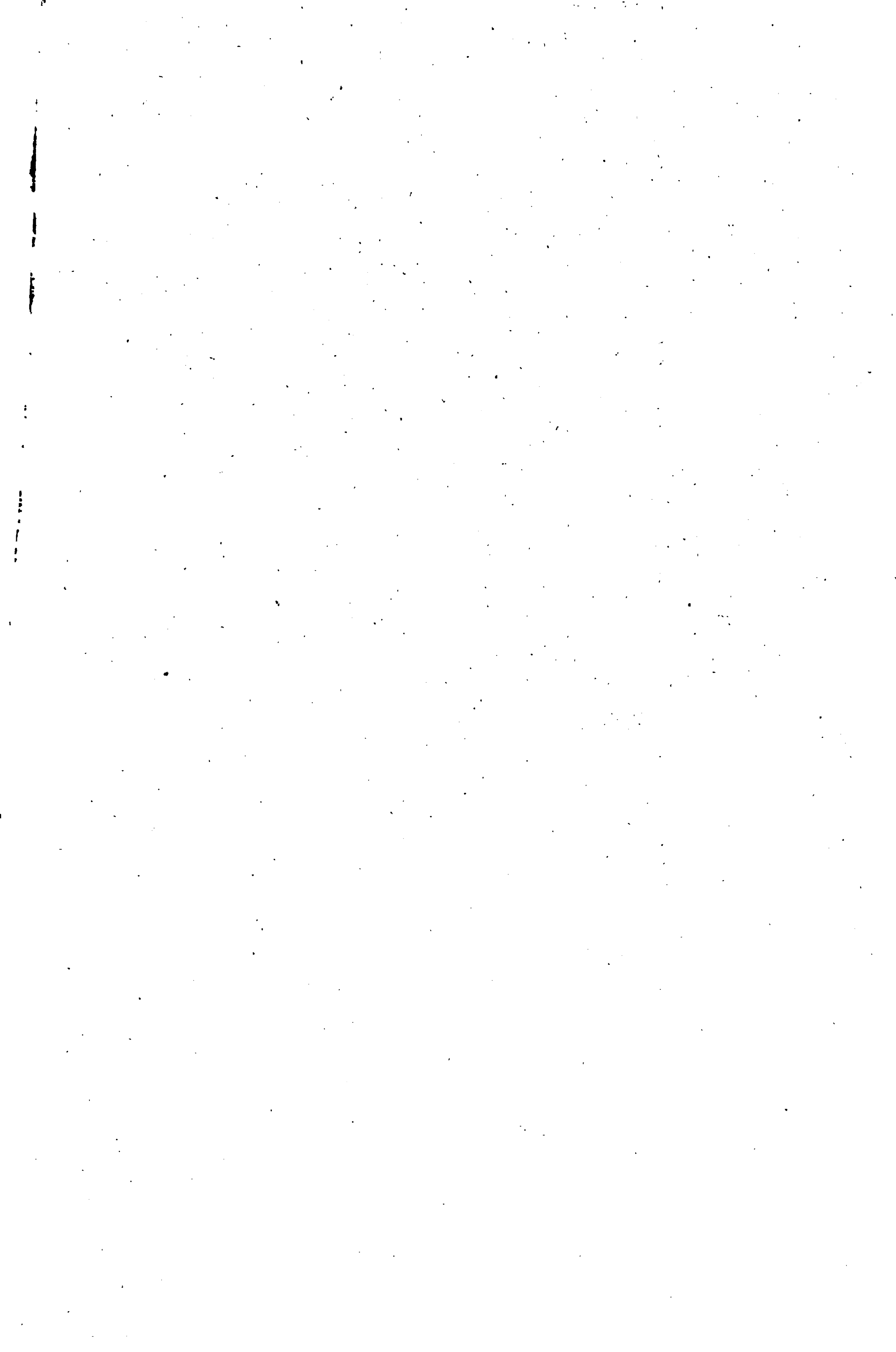
L'égalité (23) montre que $\psi'_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ n'admet qu'une seule racine réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, si n est impair.*

13. Posons $n = 2m$. L'égalité (23) donne, si l'on y remplace n par $2m + 1$,

$$\psi_{2m+1}(1) - \psi_{2m+1}(0) = -2C_{2m+1} = \int_0^1 \psi_{2m}(z)\,dz. \tag{25}$$

On voit que le signe de $\psi_{2m}(z)$ est contraire à celui de la constante C_{2m+1}.



Par suite,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{m-k+1}(n),$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \frac{2z-1}{2}.$$

Or on a, eu égard aux propriétés des polynomes $\psi_m(z)$ et des nombres C_m,

$$\psi_m(1+z) = -C_m - \frac{C_{m-1}}{1!}z - \frac{C_{m-2}}{2!}z^2 - \ldots - \frac{C_1}{(m-1)!}z^{m-1} + \frac{z^m}{m!}.$$

d'où l'on tire, en posant $z = n-1$,

$$\psi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\varphi_m(n) = \psi_m(n) + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n)$$

ou

$$\psi_m(n) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n) = 0,$$

puisque $2C_1 = -1$.

Il en résulte l'identité suivante

$$\psi_m(z) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(z) = 0,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z.

On trouve donc les relations suivantes entre les polynomes $\psi_m(z)$ et les polynomes $\varphi_m(z)$ de Bernoulli:

$$\psi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \ldots + 2C_m\varphi_1(z) = 0,$$

si m est impair,

$$\varphi_m(z)+2C_1\varphi_m(z)+2C_3\varphi_{m-2}(z)+2C_5\varphi_{m-4}(z)+\ldots+2C_{m-1}\varphi_2(z)=0,$$

si m est pair.

Remplaçons dans (ε) $2z$ par z, n par m. On aura

$$\frac{1}{2}\varphi_m(z)=\varphi_{m+1}(z)-2^{m+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}C_m,$$

d'où l'on tire, eu égard aux égalités précédentes, les formules suivantes concernant la theorie des polynomes de Bernoulli:

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z)+C_1\varphi_m(z)+C_3\varphi_{m-2}(z)+\ldots+C_{m-2}\varphi_3(z)+C_m z],$$

si m est impair, et

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z)+C_1\varphi_m(z)+C_3\varphi_{m-2}(z)+\ldots+C_{m-3}\varphi_4(z)+C_{m-1}\varphi_2(z)],$$

si m est pair.

Ces équations expriment le théorème de la division par deux de l'argument des polynomes de Bernoulli.

Si l'on pose $z=1$ dans la première de ces équations, on trouve, en outre, eu égard à (δ_1),

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{C_{2k-1}}{2^{2k+1}}=(-1)^{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}2k!}B_k. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

21. Considérons maintenant la formule simple (27).

Posons

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^p}-\frac{1}{(x+2k+1)^p}\right),$$

m étant un entier, p un nombre positif quelconque.

On a

$$f^{(s)}(x) =$$

$$= (-1)^s p(p+1)\dots(p+s-1)\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^{p+s}} - \frac{1}{(x+2k+1)^{p+s}}\right),$$

$$f^{(s)}(a+1) + f^{(s)}(a) =$$

$$= (-1)^s p(p+1)\dots(p+s-1)\left[\frac{1}{a^{p+s}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+s}}\right],$$

$$\int_a^{a+1} f(x)\,dx = \frac{2}{1-p}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}}\right] -$$

$$-\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}}\right).$$

Remplaçant dans (27) h par 1, n par $2n$, on trouve, après des réductions simples,

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}}\right) -$$

$$- C_1\frac{1-p}{2}\left(\frac{1}{a^{p}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p}}\right) -$$

$$- C_3\frac{(1-p)p(p+1)}{2}\left(\frac{1}{a^{p+2}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2}}\right) -$$

$$- \dots - C_{2n-1}\frac{(1-p)p(p+1)\dots(p+2n-3)}{2}\left(\frac{1}{a^{p+2(n-1)}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2(n-1)}}\right) +$$

$$+ R_{2n}, \tag{29}$$

où l'on a posé

$$R_{2n} = \frac{1}{2}(1-p)p(p+1)\dots(p+2n-1)\int_0^1 \psi_{2n}(z)\,\varphi(a+z)\,dz,$$

$$\varphi(a+z) = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+z+2k)^{p+2n}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{p+2n}}\right).$$

Comme

$$\varphi(a+z) > 0 \qquad \text{pour } a > 0, \qquad 0 < z < 1,$$

on en conclut que

$$\varphi(a+z) < \frac{1}{a^{p+2n}}.$$

Par suite $(p > 1)$,

$$|R_{2n}| < \frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+2n-1)}{a^{p+2n}} |C_{2n+1}|.$$

L'égalité (29) fournit un moyen simple de calculer les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right),$$

si le nombre a est plus grand que l'unité.

22. Posons, par exemple,

$$a = 100, \qquad m = 49, \qquad p = 5, \qquad n = 2.$$

La formule (29) donne, en vertu de (28),

$$S = \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{(101+2k)^4} - \frac{1}{(102+2k)^4} \right) =$$

$$= \frac{15}{2^5.10^8} - \frac{3}{2^5.10^9} + \frac{5.127}{2^8.10^{14}} + R_4,$$

où

$$|R_4| < \frac{28}{10^{18}}.$$

Or

$$\frac{15}{2^5.10^8} = 0{,}0000000046875,$$

$$\frac{5.127}{2^8.10^{14}} = 0{,}0000000000000248,$$

$$\frac{3}{2^5.10^9} = 0{,}000000000093750,$$

d'où

$$S = 0{,}0000000045937748\,,$$

le résultat avec 16 décimales exact.

Posant dans (29) $m = \infty$, nous obtiendrons la formule commode pour calculer la somme de la série infinie

$$S_p = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p}\right).$$

En l'appliquant au cas de

$$a = 100\,, \qquad p = 5\,, \qquad n = 3\,,$$

on trouve

$$S_4 = \frac{1}{2.10^8} - \frac{1}{10^{10}} + \frac{2.5}{10^{15}} - \frac{14}{10^{18}} =$$

$$= 0{,}0000000051000264000\,,$$

le résultat avec 19 décimales exact.

On pourrait, sans doute, déduire les mêmes résultats en partant de la formule sommatoire d'Euler, mais par un procédé moins direct et un peu plus compliqué.

23. Faisons maintenant dans (27)

$$h = 1\,, \qquad f(x) = \frac{d}{dx}\log u(x)\,,$$

$$u(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}(x+3)^{(x+3)\lambda}\dots(x+2m+1)^{(x+2m+1)\lambda}}{x^{x\lambda}(x+2)^{(x+2)\lambda}\dots(x+2m)^{(x+2m)\lambda}}\,,$$

m et λ étant des entiers.

On a

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \frac{d^k}{da^k}\log u(a+1)\,u(a)\,.$$

Or,

$$\log u(a+1)\,u(a) = \log\frac{[a+2(m+1)]^{[a+2(m+1)]\lambda}}{a^{a\lambda}} = \xi_1 - \xi_0\,,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = [a+2(m+1)]^\lambda \log[a+2(m+1)]\,,$$

$$\xi_0 = a^\lambda \log a\,.$$

On a donc

$$f^{(k-1)}(a+1)+f^{(k-1)}(a)=\xi_1^{(k)}-\xi_0^{(k)}.$$

Désignons maintenant par

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\mu_s,$$

une suite des polynomes en λ, définis par les relations suivantes

$$\mu_0=1,$$

$$\mu_1=\lambda+(\lambda-1)\mu_0,$$

$$\mu_2=\lambda(\lambda-1)+(\lambda-2)\mu_1,$$

$$\mu_3=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda-3)\mu_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_s=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-s+1)+(\lambda-s)\mu_{s-1}.$$

On trouve, pour $k\leqq\lambda$,

$$\xi_1^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)[a+2(m+1)]^{\lambda-k}\log[a+2(m+1)]+ \\ +\mu_{k-1}[a+2(m+1)]^{\lambda-k}, \tag{30}$$

$$\xi_0^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)a^{\lambda-k}\log a+\mu_{k-1}a^{\lambda-k}, \tag{30$_1$}$$

d'où

$$\xi_1^{(\lambda)}=\lambda!\log[a+2(m+1)]+\mu_{\lambda-1},$$

$$\xi_0^{(\lambda)}=\lambda!\log a+\mu_{\lambda-1}.$$

Par suite,

$$\xi_1^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{[a+2(m+1)]^s}, \tag{31}$$

$$\xi_0^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{a^s}. \tag{32}$$

$$(s=1,2,3,\ldots)$$

Remarquons enfin que

$$\int_a^{a+1}\frac{d}{dx}\log u(x)\,dx=\log\frac{u(a+1)}{u(a)}=2\log r_\lambda(a,m)+\xi_1-\xi_0,$$

où l'on a posé

$$v_\lambda(a, m) = \frac{1}{u(a)} =$$

$$= \frac{a^{a\lambda}(a+2)^{(a+2)\lambda} \dots (a+2m)^{(a+2m)\lambda}}{(a+1)^{(a+1)\lambda}(a+3)^{(a+3)\lambda} \dots (a+2m+1)^{(a+2m+1)\lambda}}. \tag{33}$$

24. Supposons d'abord que λ soit pair:

$$\lambda = 2j.$$

Remplaçons dans (27) n par $2n$ et posons

$$2n = \lambda + 2s.$$

On trouve

$$2\log v_\lambda(a, m) = -(\xi_1 - \xi_0) - C_1(\xi_1' - \xi_0') -$$

$$- C_3(\xi_1^{(3)} - \xi_0^{(3)}) - \dots - C_{\lambda-1}(\xi_1^{(\lambda-1)} - \xi_0^{(\lambda-1)}) - C_{\lambda+1}(\xi_1^{(\lambda+1)} - \xi_0^{(\lambda+1)}) -$$

$$- C_{\lambda+3}(\xi_1^{(\lambda+3)} - \xi_0^{(\lambda+3)}) - \dots - C_{\lambda+2s-1}(\xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \xi_0^{(\lambda+2s-1)}) + R_s,$$

où

$$R_s = \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \frac{d^{\lambda+2s+1} \log u(a+z)}{dz^{\lambda+2s+1}} dz =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Posons

$$\varrho_s^{(\lambda)}(a) =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{34}$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}[a+2(m+1)] =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{35}$$

$$Q_s(a) = \xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} + C_{\lambda+1}\xi_0^{(\lambda+1)} +$$

$$+ \dots + C_{\lambda+2s-1}\xi_0^{(\lambda+2s-1)} + \varrho_s^{(\lambda)}(a). \tag{36}$$

On aura

$$R_s = \rho_s^{(\lambda)}(a) - \rho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)]$$

et

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_s(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$
$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$
$$- \rho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)], \tag{37}$$

d'où l'on tire encore, en remplaçant s par $s+1$,

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_{s+1}(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$
$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$
$$- C_{\lambda+2s+1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)} - \rho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)].$$

Ces égalités fournissent la relation suivante

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a) + \rho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] -$$
$$- \rho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] + C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)},$$

ayant lieu quels que soient les nombres s et m.

Supposons que m croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, en tenant compte de (31) et (35),

$$\lim_{m=\infty} \rho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = \lim_{m=\infty} \rho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = 0,$$

$$\lim_{m=\infty} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a).$$

Il s'ensuit que l'expression $Q_s(a)$ ne dépend pas de l'indice s, mais elle dépend, évidemment, de λ et de a, ce que nous exprimerons par cette notation nouvelle

$$Q_s(a) = q_\lambda(a).$$

25. Cela posé, transformons les seconds membres des équations (36) et (37).

Les égalités (30_1) donnent

$$\xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} =$$
$$= [a^\lambda + C_1\lambda a^{\lambda-1} + C_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1}\lambda!\,a]\log a + p_\lambda(a),$$

De cette identité on tire immédiatement les relations suivantes entre les nombres C_{2m-1} et A_{2m}, coefficients des polynomes de Bernoulli:

$$C_{2m-1} = 2(1 - 2^{2m}) A_{2m}. \qquad (\delta)$$

Désignant par B_m les nombres de Bernoulli et en se rappelant que

$$A_{2m} = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m!},$$

on trouve

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m 2(2^{2m}-1)}{2m!} B_m, \qquad (\delta_1)$$

ou encore

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}(2m-1)!} D_m,$$

où

$$D_m = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_m \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

sont des nombres entiers, qui se rencontrent dans le développement bien connu

$$\operatorname{tang} x = D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^3}{3!} + \ldots + D_m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots .$$

18. Posons maintenant dans (α)

$$n = 2m-1, \qquad z = 0.$$

On trouve

$$\frac{(2m-1)!}{2} [\psi_{2m-1}(2j) - C_{2m-1}] =$$

$$= 1^{2m-1} - 0^{2m-1} + 3^{2m-1} - 2^{2m-1} + \ldots + (2j-1)^{2m-1} - (2j-2)^{2m-1}.$$

De cette égalité générale on tire, eu égard à (28_1)),

$$1 - 0 + 3 - 2 + 4 - 3 + \ldots + (2j-1) - (2j-2) = j,$$

$$1^3 - 0^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + (2j-1)^3 - (2j-2)^3 = 4j^3 - 3j^2,$$

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 4^5 - 3^5 + \ldots + (2j-1)^5 - (2j-2)^5 =$$
$$= 5j^2 - 20j^4 + 16j^5,$$

$$1^7 - 0^7 + 3^7 - 2^7 + 4^7 - 3^7 + \ldots + (2j-1)^7 - (2j-2)^7 =$$
$$= 64j^7 - 112j^6 + 70j^4 - 21j^2.$$

Posons, par exemple, dans la 3-me de ces équations $j = 10$. On trouve aisément

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 5^5 - 4^5 + \ldots + 19^5 - 18^5 = 1400500.$$

19. De l'égalité (δ) on tire, en répétant les raisonnements du nº 17,

$$\frac{1}{2}[\psi_{2m-1}(2z) - C_{2m-1}] = \varphi_{2m}(2z) - 2^{2m}\varphi_{2m}(z).$$

On peut donc écrire, eu égard à (γ),

$$\frac{1}{2}[\psi_n(2z) - C_n] = \varphi_{n+1}(2z) - 2^{n+1}\varphi_{n+1}(z). \qquad (\varepsilon)$$

Cette égalité a lieu toujours, quel que soit le nombre entier n, car $C_n = 0$ pour n pair.

20. Les formules (26) et (27) ont une grande analogie avec la formule classique d'Euler (Mac-Laurin) et peuvent avoir, comme celle-ci, des diverses applications intéressantes dont j'indiquerai quelques-unes dans ce qui va suivre.

Posons dans (26)

$$f(x) = x^{m-1}, \quad a = 0, \quad h = 1, \quad b = n - 1,$$

m et n étant des nombres entiers.

Remarquant que

$$f^{(k-1)}(x) = (m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)x^{m-k},$$

$$1^s + 2^s + 3^s + \ldots + (n-1)^s = s!\,\varphi_{s+1}(n),$$

$\varphi_{s+1}(n)$ étant le polynome de Bernoulli, et que $C_k = 0$, si k est un nom bre pair, on peut écrire

$$(m-1)!\,\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} C_k (m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)(n-1)^{m-k} - 2\,C_m(m-1)! +$$

$$+ 2(m-1)!\sum_{k=2}^{m-1} C_k\,\varphi_{m-k+1}(n) + 2\,C_m n(m-1)! =$$

$$= (m-1)!\left\{\frac{(n-1)^m}{m} - \sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k\varphi_{m-k+1}(n)\right\}.$$

Par suite,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{m-k+1}(n),$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \frac{2z-1}{2}.$$

Or on a, eu égard aux propriétés des polynomes $\psi_m(z)$ et des nombres C_m,

$$\psi_m(1+z) = -C_m - \frac{C_{m-1}}{1!}z - \frac{C_{m-2}}{2!}z^2 - \dots - \frac{C_1}{(m-1)!}z^{m-1} + \frac{z^m}{m!}.$$

d'où l'on tire, en posant $z = n-1$,

$$\psi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\varphi_m(n) = \psi_m(n) + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n)$$

ou

$$\psi_m(n) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n) = 0,$$

puisque $2C_1 = -1$.

Il en résulte l'identité suivante

$$\psi_m(z) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(z) = 0,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z.

On trouve donc les relations suivantes entre les polynomes $\psi_m(z)$ et les polynomes $\varphi_m(z)$ de Bernoulli:

$$\psi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \dots + 2C_m\varphi_1(z) = 0,$$

si m est impair,

$$\varphi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \ldots + 2C_{m-1}\varphi_2(z) = 0,$$

si m est pair.

Remplaçons dans (ε) $2z$ par z, n par m. On aura

$$\frac{1}{2}\varphi_m(z) = \varphi_{m+1}(z) - 2^{m+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}C_m,$$

d'où l'on tire, eu égard aux égalités précédentes, les formules suivantes concernant la theorie des polynomes de Bernoulli:

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \ldots + C_{m-2}\varphi_3(z) + C_m z],$$

si m est impair, et

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \ldots + C_{m-3}\varphi_4(z) + C_{m-1}\varphi_2(z)],$$

si m est pair.

Ces équations expriment le théorème de la division par deux de l'argument des polynomes de Bernoulli.

Si l'on pose $z = 1$ dans la première de ces équations, on trouve, en outre, eu égard à (δ_1),

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{C_{2k-1}}{2^{2k+1}} = (-1)^{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}2k!}B_k. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

21. Considérons maintenant la formule simple (27).

Posons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^p} - \frac{1}{(x+2k+1)^p}\right),$$

m étant un entier, p un nombre positif quelconque.

On a

$$f^{(s)}(x) =$$

$$= (-1)^s p(p+1)\ldots.(p+s-1)\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^{p+s}} - \frac{1}{(x+2k+1)^{p+s}}\right),$$

$$f^{(s)}(a+1) + f^{(s)}(a) =$$

$$= (-1)^s p(p+1)\ldots.(p+s-1)\left[\frac{1}{a^{p+s}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+s}}\right],$$

$$\int_a^{a+1} f(x)\,dx = \frac{2}{1-p}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}}\right] -$$

$$-\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}}\right).$$

Remplaçant dans (27) h par 1, n par $2n$, on trouve, après des réductions simples,

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}}\right) -$$

$$- C_1\frac{1-p}{2}\left(\frac{1}{a^{p}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p}}\right) -$$

$$- C_3\frac{(1-p)p(p+1)}{2}\left(\frac{1}{a^{p+2}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2}}\right) -$$

$$- \ldots - C_{2n-1}\frac{(1-p)p(p+1)\ldots(p+2n-3)}{2}\left(\frac{1}{a^{p+2(n-1)}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2(n-1)}}\right) +$$

$$+ R_{2n}, \tag{29}$$

où l'on a posé

$$R_{2n} = \frac{1}{2}(1-p)p(p+1)\ldots(p+2n-1)\int_0^1 \psi_{2n}(z)\,\varphi(a+z)\,dz,$$

$$\varphi(a+z) = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+z+2k)^{p+2n}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{p+2n}}\right).$$

Comme

$$\varphi(a+z)>0 \qquad \text{pour } a>0, \qquad 0<z<1,$$

on en conclut que

$$\varphi(a+z)<\frac{1}{a^{p+2n}}.$$

Par suite $(p>1)$,

$$|R_{2n}|<\frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+2n-1)}{a^{p+2n}}|C_{2n+1}|.$$

L'égalité (29) fournit un moyen simple de calculer les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^p}-\frac{1}{[a+2(k+1)]^p}\right),$$

si le nombre a est plus grand que l'unité.

22. Posons, par exemple,

$$a=100, \qquad m=49, \qquad p=5, \qquad n=2.$$

La formule (29) donne, en vertu de (28),

$$S=\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{(101+2k)^4}-\frac{1}{(102+2k)^4}\right)=$$

$$=\frac{15}{2^5.10^8}-\frac{3}{2^5.10^9}+\frac{5.127}{2^8.10^{14}}+R_4,$$

où

$$|R_4|<\frac{28}{10^{18}}.$$

Or

$$\frac{15}{2^5.10^8}=0{,}0000000046875,$$

$$\frac{5.127}{2^8.10^{14}}=0{,}0000000000000248,$$

$$\frac{3}{2^5.10^9}=0{,}000000000093750,$$

d'où

$$S = 0{,}0000000045937748\,,$$

le résultat avec 16 décimales exact.

Posant dans (29) $m = \infty$, nous obtiendrons la formule commode pour calculer la somme de la série infinie

$$S_p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right).$$

En l'appliquant au cas de

$$a = 100\,, \qquad p = 5\,, \qquad n = 3\,,$$

on trouve

$$S_4 = \frac{1}{2.10^8} - \frac{1}{10^{10}} + \frac{2.5}{10^{15}} - \frac{14}{10^{18}} =$$

$$= 0{,}0000000051000264000\,,$$

le résultat avec 19 décimales exact.

On pourrait, sans doute, déduire les mêmes résultats en partant de la formule sommatoire d'Euler, mais par un procédé moins direct et un peu plus compliqué.

23. Faisons maintenant dans (27)

$$h = 1\,, \qquad f(x) = \frac{d}{dx} \log u(x)\,,$$

$$u(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}\,(x+3)^{(x+3)\lambda} \ldots (x+2m+1)^{(x+2m+1)\lambda}}{x^{x\lambda}\,(x+2)^{(x+2)\lambda} \ldots (x+2m)^{(x+2m)\lambda}}\,,$$

m et λ étant des entiers.

On a

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \frac{d^k}{da^k} \log u(a+1)\,u(a)\,.$$

Or,

$$\log u(a+1)\,u(a) = \log \frac{[a+2(m+1)]^{[a+2(m+1)]\lambda}}{a^{a\lambda}} = \xi_1 - \xi_0\,,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = [a+2(m+1)]^\lambda \log [a+2(m+1)]\,,$$

$$\xi_0 = a^\lambda \log a\,.$$

On a donc

$$f^{(k-1)}(a+1)+f^{(k-1)}(a)=\xi_1^{(k)}-\xi_0^{(k)}.$$

Désignons maintenant par

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ldots,\mu_s,$$

une suite des polynomes en λ, définis par les relations suivantes

$$\mu_0=1,$$

$$\mu_1=\lambda+(\lambda-1)\mu_0,$$

$$\mu_2=\lambda(\lambda-1)+(\lambda-2)\mu_1,$$

$$\mu_3=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda-3)\mu_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_s=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-s+1)+(\lambda-s)\mu_{s-1}.$$

On trouve, pour $k\leqq\lambda$,

$$\xi_1^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)[a+2(m+1)]^{\lambda-k}\log[a+2(m+1)]+ \\ +\mu_{k-1}[a+2(m+1)]^{\lambda-k}, \qquad (30)$$

$$\xi_0^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)a^{\lambda-k}\log a+\mu_{k-1}a^{\lambda-k}, \qquad (30_1)$$

d'où

$$\xi_1^{(\lambda)}=\lambda!\log[a+2(m+1)]+\mu_{\lambda-1},$$

$$\xi_0^{(\lambda)}=\lambda!\log a+\mu_{\lambda-1}.$$

Par suite,

$$\xi_1^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{[a+2(m+1)]^s}, \qquad (31)$$

$$\xi_0^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{a^s}. \qquad (32)$$

$$(s=1,2,3,\ldots)$$

Remarquons enfin que

$$\int_a^{a+1}\frac{d}{dx}\log u(x)\,dx=\log\frac{u(a+1)}{u(a)}=2\log v_\lambda(a,m)+\xi_1-\xi_0,$$

où l'on a posé

$$v_\lambda(a, m) = \frac{1}{u(a)} =$$

$$= \frac{a^{a\lambda}(a+2)^{(a+2)\lambda} \ldots (a+2m)^{(a+2m)\lambda}}{(a+1)^{(a+1)\lambda}(a+3)^{(a+3)\lambda} \ldots (a+2m+1)^{(a+2m+1)\lambda}}. \tag{33}$$

24. Supposons d'abord que λ soit pair:

$$\lambda = 2j.$$

Remplaçons dans (27) n par $2n$ et posons

$$2n = \lambda + 2s.$$

On trouve

$$2 \log v_\lambda(a, m) = -(\xi_1 - \xi_0) - C_1(\xi_1' - \xi_0') -$$

$$- C_3(\xi_1^{(3)} - \xi_0^{(3)}) - \ldots - C_{\lambda-1}(\xi_1^{(\lambda-1)} - \xi_0^{(\lambda-1)}) - C_{\lambda+1}(\xi_1^{(\lambda+1)} - \xi_0^{(\lambda+1)}) -$$

$$- C_{\lambda+3}(\xi_1^{(\lambda+3)} - \xi_0^{(\lambda+3)}) - \ldots - C_{\lambda+2s-1}(\xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \xi_0^{(\lambda+2s-1)}) + R_s,$$

où

$$R_s = \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \frac{d^{\lambda+2s+1} \log u(a+z)}{dz^{\lambda+2s+1}} dz =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Posons

$$\varrho_s^{(\lambda)}(a) =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{34}$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}[a+2(m+1)] =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{35}$$

$$Q_s(a) = \xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} + C_{\lambda+1}\xi_0^{(\lambda+1)} +$$

$$+ \ldots + C_{\lambda+2s-1}\xi_0^{(\lambda+2s-1)} + \varrho_s^{(\lambda)}(a). \tag{36}$$

On aura

$$R_s = \varrho_s^{(\lambda)}(a) - \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)]$$

et

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_s(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$

$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$

$$- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)], \tag{37}$$

d'où l'on tire encore, en remplaçant s par $s+1$,

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_{s+1}(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$

$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$

$$- C_{\lambda+2s+1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)} - \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)].$$

Ces égalités fournissent la relation suivante

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a) + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] -$$

$$- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] + C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)},$$

ayant lieu quels que soient les nombres s et m.

Supposons que m croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, en tenant compte de (31) et (35),

$$\lim_{m=\infty} \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = \lim_{m=\infty} \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = 0,$$

$$\lim_{m=\infty} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a).$$

Il s'ensuit que l'expression $Q_s(a)$ ne dépend pas de l'indice s, mais elle dépend, évidemment, de λ et de a, ce que nous exprimerons par cette notation nouvelle

$$Q_s(a) = q_\lambda(a).$$

25. Cela posé, transformons les seconds membres des équations (36) et (37).

Les égalités (30_1) donnent

$$\xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} =$$

$$= [a^\lambda + C_1\lambda a^{\lambda-1} + C_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1}\lambda!\,a]\log a + p_\lambda(a),$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$p_\lambda(a) = C_1 \mu_0 a^{\lambda-1} + C_3 \mu_2 a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1} \mu_{\lambda-2} a. \tag{38}$$

Or,

$$a^\lambda + C_1 \lambda a^{\lambda-1} + C_3 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1} \lambda! \, a = \lambda! \, \psi_\lambda(a).$$

On a donc

$$\xi_0 + C_1 \xi_0' + C_3 \xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} = \lambda! \, \psi_\lambda(a) \log a + p_\lambda(a).$$

D'autre part, en vertu de (32),

$$C_{\lambda+1} \xi_0^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3} \xi_0^{(\lambda+3)} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \xi_0^{(\lambda+2s-1)} =$$

$$= \lambda! \left[C_{\lambda+1} \frac{1}{a} + C_{\lambda+3} \, 2! \frac{1}{a^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} [2(s-1)]! \frac{1}{a^{2s-1}} \right].$$

On trouve donc, en tenant compte de (36),

$$\frac{1}{\lambda!} q_\lambda(a) = \psi_\lambda(a) \log a + \frac{1}{\lambda!} p_1(a) +$$

$$C_{\lambda+1} \frac{1}{a} + C_{\lambda+3} \, 2! \frac{1}{a^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} [2(s-1)]! \frac{1}{a^{2s-1}} + \frac{1}{\lambda!} \rho_s^{(\lambda)}(a). \tag{39}$$

26. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right)$$

étant convergente pour toutes les valeurs positives de a, on trouve l'expression de $\frac{1}{\lambda!} \rho_s^{(\lambda)}(a)$ sous la forme de la série aussi convergente:

$$\frac{1}{\lambda!} \rho_s^{(\lambda)}(a) = u_{\lambda,s}^{(0)}(a) + u_{\lambda,s}^{(1)}(a) + \ldots + u_{\lambda,s}^{(k)}(a) + \ldots ,$$

où l'on a posé [voir l'égalité (34)],

$$u_{\lambda,s}^{(k)}(a) =$$

$$= -2s! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Si l'on pose $s=0$, on aura

$$\frac{1}{\lambda!} q_\lambda(a) = \psi_\lambda(a) \log a + \frac{1}{\lambda!} p_\lambda(a) +$$

$$+ u_\lambda^{(0)}(a) + u_\lambda^{(1)}(a) + \ldots + u_\lambda^{(k)}(a) + \ldots, \tag{40}$$

où

$$u_\lambda^{(k)}(a) = -\int_0^1 \psi_\lambda(z) \left(\frac{1}{a+z+2k} - \frac{1}{a+z+2k+1} \right) dz.$$

$$(k=0,1,2,\ldots)$$

Il est aisé d'évaluer chacune de ces quadratures, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

La formule (40) est analogue à celle de Goudermann dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$ et définit une fonction $q_\lambda(a)$, continue pour toutes les valeurs positives de la variable a.

On pourrait, moyennant la formule (40), étendre la notion de la fonction $q_\lambda(a)$ aux valeurs complexes de a, mais je me bornerai, dans ce qui va suivre, au cas de a réel et positif.

27. La formule (39) correspond à la série de Stirling et fournit un moyen simple de calcul numérique de la fonction $q_\lambda(a)$ pour les valeurs de a plus grandes que l'unité.

Écrivons (39) sous la forme suivante

$$q_\lambda(x) = A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + \varrho_s^{(\lambda)}(x) =$$

$$= A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} +$$

$$+ C_{\lambda+2s+1} \frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}} + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x),$$

où

$$A_\lambda(x) = \lambda!\, \psi_\lambda(x) \log x + p_\lambda(x),$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}(x) =$$

$$= -2s! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+1}} \right] dz,$$

$$\rho_{s+1}^{(\lambda)}(x) =$$

$$= -[2(s+1)]! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s+2}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+3}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+3}} \right] dz.$$

Supposons que $\frac{\lambda}{2} + s$ soit pair.

On trouve, eu égard à (25_1) et (25_2),

$$C_{\lambda+2s-1} < 0, \qquad \psi_{\lambda+2s}(z) < 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1,$$

$$C_{\lambda+2s+1} > 0, \qquad \psi_{\lambda+2s+2}(z) > 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1.$$

Si nous supposons que $\frac{\lambda}{2} + s$ soit impair, nous aurons

$$\left.\begin{matrix} C_{\lambda+2s-1} > 0, & \psi_{\lambda+2s}(z) > 0, \\ C_{\lambda+2s+1} < 0, & \psi_{\lambda+2s+2}(z) < 0 \end{matrix}\right\} \text{pour } 0 < z < 1.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{matrix} C_{\lambda+2s-1} < 0, & \rho_s^{(\lambda)}(x) > 0, \\ C_{\lambda+2s+1} > 0, & \rho_{s+1}^{(\lambda)}(x) < 0, \end{matrix}\right\} \text{si } \frac{\lambda}{2} + s \text{ est pair,}$$

et

$$\left.\begin{matrix} C_{\lambda+2s+1} > 0, & \rho_s^{(\lambda)}(x) < 0, \\ C_{\lambda+2s+1} < 0, & \rho_{s+1}^{(\lambda)}(x) > 0, \end{matrix}\right\} \text{si } \frac{\lambda}{2} + s \text{ est impair.}$$

On trouve donc, dans le premier cas,

$$q_\lambda(x) > A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}},$$

$$q_\lambda(x) < A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1} \frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}$$

et

$$q_\lambda(x) < A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + \dots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}},$$

$$q_\lambda(x) > A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + \dots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}},$$

dans le second cas.

Il en résulte l'égalité suivante

$$q_\lambda(x) = A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + \theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}\text{[1]}, \quad (39_1)$$

ayant lieu toujours, quels que soient les nombres λ et s.

On peut donc poser approximativement

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x) +$$

$$+ C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \dots + \theta C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} \quad (39_2)$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon_s^{(\lambda)} = |C_{\lambda+2s+1}|\,\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}.$$

Si l'on pose, pour exemple,

$$x = 10, \qquad \lambda = 2, \qquad s = 5,$$

on aura

$$q_2(10) = 2\psi_2(10)\log 10 + p_2(10) +$$

$$+ 2C_3\frac{1}{10} + 2C_5 2!\,\frac{1}{10^3} + 2C_7\frac{4!}{10^5} + 2C_9\frac{6!}{10^7} + 2C_{11}\frac{8!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(2)} = |C_{13}|\,\frac{10!\,2}{10^{11}} < 0{,}000000000032.$$

---

[1] θ est un nombre positif plus petit que l'unité.

Disposant le calcul dans les tableaux suivants:

$$2\psi_2(10)\log 10 = 207{,}23265\ 83694\ 636\ldots\ ,$$

$$2C_3\frac{1}{10} = \quad 0{,}00833\ 33333\ 333\ldots\ ,$$

$$2C_7\frac{4!}{10^5} = \quad 0{,}00000\ 02023\ 809\ldots\ ,$$

$$2C_{11}\frac{8!}{10^9} = \quad 0{,}00000\ 00003\ 489\ldots\ ,$$

$$207{,}24099\ 19055\ 267\ldots\ .$$

$$p_2(10) = -5$$

$$2C_5\frac{2!}{10^3} = -0{,}00001\ 66666\ 666\ldots\ ,$$

$$2C_9\frac{6!}{10^7} = -0{,}00000\ 00061\ 507\ldots\ ,$$

$$-5{,}00001\ 66728\ 174\ldots\ .$$

on trouve

$$q_2(10) = 202{,}24097\ 52327\ldots\ ,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

28. Nous trouverons encore les valeurs approchées de

$$q_4(10)\,, \qquad q_6(10)$$

qui nous seront nécessaires plus loin.

La formule (39_2) donne

$$q_4(10) = 4!\,\psi_4(10)\log 10 + p_4(10) +$$

$$+ C_5\frac{4!}{10} + C_7\frac{2!\,4!}{10^3} + C_9\frac{4!\,4!}{10^5} + C_{11}\frac{6!\,4!}{10^7} + C_{13}\frac{8!\,4!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(4)} = |C_{15}|\frac{10!\,4!}{10^{11}} < 0{,}000000000039\,.$$

On trouve, en vertu de (19), (38), (28) et (28_1),

$$4!\,\psi_4(z) = z^4 - 2z^3 + z, \qquad p_4(z) = -\frac{z^3}{2} + \frac{26}{4!}z,$$

car, dans le cas considéré (n° 23),

$$\mu_2 = \lambda(\lambda - 1) + (\lambda - 2)(2\lambda - 1) = 26.$$

On a donc

$$4!\,\psi_4(10)\log 10 = 18443{,}70659\ 48823\ 0592\ldots,$$

$$p_4(10) = -489{,}16666\ 66666\ 6666\ldots.$$

D'autre part,

$$C_7\frac{2!\,4!}{10^3} = 0{,}00002\ 02380\ 9523\ldots,$$

$$C_{11}\frac{6!\,4!}{10^7} = 0{,}00000\ 00074\ 7835\ldots,$$

$$+\,0{,}00002\ 02455\ 7358\ldots$$

$$C_5\frac{4!}{10} = -0{,}01$$

$$C_9\frac{4!\,4!}{10^5} = -0{,}00000\ 02460\ 3174\ldots,$$

$$C_{13}\frac{4!\,8!}{10^9} = -0{,}00000\ 00004\ 2432\ldots,$$

$$-\,0{,}01000\ 02464\ 5606\ldots.$$

Par conséquent,

$$q_4(10) = 17954,\ 52994\ 82147\ 5678\ldots,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

29. Appliquons enfin l'égalité (39_1) au cas de

$$\lambda = 6, \qquad s = 3, \qquad x = 10.$$

On trouve

$$q_6(10) = 6!\,\psi_6(10)\log 10 + p_6(10) + C_7\frac{6!}{10} + C_9\frac{2!\,6!}{10^3} + C_{11}\frac{4!\,6!}{10^5}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(6)} = |C_{13}|\frac{6!\,6!}{10^7} < 0{,}000000023.$$

On a

$$6!\,\psi_6(z) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x,$$

$$p_6(z) = C_1\mu_0 z^5 + C_3\mu_2 z^3 + C_5\mu_4 z,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_2 = 74, \qquad \mu_4 = 1044.$$

Par conséquent,

$$6!\,\psi_6(10)\log 10 = 10^6 - 3.10^5 + 5.10^3 - 3.10 =$$

$$= 1623253{,}41300\ 8012\ldots,$$

$$p_6(10) = -5.10^4 + \frac{37.10^3}{12} - \frac{87}{2} =$$

$$= -46960{,}16666\ 6666\ldots\ .$$

D'autre part,

$$C_7\frac{6!}{10} = 0{,}03035\ 7142\ldots,$$

$$C_9\frac{2!\,6!}{10^3} = -0{,}00006\ 1507\ldots,$$

$$C_{11}\frac{4!\,6!}{10^5} = 0{,}00000\ 0747\ldots\ .$$

On trouve donc

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\ldots,$$

le résultat avec 7 décimales exact.

30. Revenons maintenant à la formule (37).

On trouve, en vertu de (30) et (31),

$$\xi_1 + C_1\xi_1^1 + C_3\xi_1^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} =$$

$$= \lambda!\,\psi_\lambda[a + 2(m+1)]\log[a + 2(m+1)] + p_\lambda[a + 2(m+1)],$$

$$C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3}\xi_1^{(\lambda+3)} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} =$$

$$= \lambda!\left[C_{\lambda+1}\frac{1}{a+2(m+1)} + C_{\lambda+3}\frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}}\right].$$

Par suite,

$$\frac{2}{\lambda!}\log v_\lambda(a, m) =$$

$$= \frac{1}{\lambda!}q_\lambda(a) - \psi_\lambda[a + 2(m+1)]\log[a + 2(m+1)] -$$

$$-\frac{1}{\lambda!}p_\lambda[a + 2(m+1)] - C_{\lambda+1}\frac{1}{a + 2(m+1)} -$$

$$-C_{\lambda+3}\frac{2!}{[a + 2(m+1)]^3} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!}{[a + 2(m+1)]^{2s-1}} -$$

$$-\frac{1}{\lambda!}\varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)]. \tag{41}$$

Cette formule permet de calculer le logarithme du rapport

$$v_\lambda(a, m) = \frac{a^{a^\lambda}(a+2)^{(a+2)^\lambda}\ldots(a+2m)^{(a+2m)^\lambda}}{(a+1)^{(a+1)^\lambda}(a+3)^{(a+3)^\lambda}\ldots(a+2m+1)^{(a+2m+1)^\lambda}},$$

pour les valeurs données de λ et de a, avec une approximation qui sera d'autant plus grande que m sera plus considérable.

31. Considérons le cas particulier de $a = 2$.

Transformons d'abord l'expression de $v_\lambda(2, m)$.

On trouve

$$2^{2^\lambda}4^{4^\lambda}\ldots[2(m+1)]^{2^\lambda(m+1)^\lambda} =$$

$$= [2^{1+2^\lambda+3^\lambda+\ldots+(m+1)^\lambda}\,1^{1^\lambda}.2^{2^\lambda}.3^{3^\lambda}\ldots(m+1)^{(m+1)^\lambda}]^{2^\lambda} =$$

$$= [2^{\lambda!\varphi_{\lambda+1}(m+2)}\,1^{1^\lambda}.2^{2^\lambda}.3^{3^\lambda}\ldots(m+1)^{(m+1)^\lambda}]^{2^\lambda}$$

et

$$v_\lambda(2, m) = \frac{2^{2\lambda+1}\lambda!\,\varphi_{\lambda+1}(m+2)\,[1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(m+1)^{(m+1)\lambda}]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(2m+3)^{(2m+3)\lambda}},$$

d'où l'on tire, en remplaçant $m+2$ par x,

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2\lambda+1}\lambda!\,\varphi_{\lambda+1}(x)\,[1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(x-1)^{(x-1)\lambda}]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(2x-1)^{(2x-1)\lambda}},$$

où il faut poser

$$\varphi_1(x) = x - 1, \qquad 0! = 1,$$

afin que la formule soit vraie pour $\lambda = 0$.

Nous obtenons ainsi une suite de fonctions $v_\lambda (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$, intimément liées avec les fonctions, auxquelles M. Beaupain [1]) a donné le nom des fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin.

Ces fonctions se trouvent aussi en relations simples avec les fonctions, étudiées par M. Alexéievsky dans sa Thèse: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$" [2]).

La fonction

$$1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(x-1)^{(x-1)\lambda}$$

représente une généralisation naturelle de la fonction

$$\Gamma(x) = 1.2.3\ldots(x-1)$$

pour x entier.

Nous poserons

$$\Gamma_\lambda(x) = 1^{1\lambda}.1^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(x-1)^{(x-1)\lambda}.$$

---

[1]) S. Beaupain: „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin". Mémoires, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique. 1902.

Compar. aussi Glaischer: „Products and series involving prime numbers only". The Quarterly Journal, 1895 et 1896. (La plupart des Mémoires de M. Glaischer ne faisant partie de Bibliothèque de l'Université de Kharkow, je ne puis les citer que suivant l'analyse. faite par M. Beaupain dans l'Avant-propos à son Mémoire. Voir aussi „Bulletin des Sciences mathématiques", 1899).

[2]) W. Alexéievsky: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$". Communications de la Société Mathématique de Kharkow, 2-e série, T. I, 1889.

Compar. aussi Barnes: „The Theory of the G Function". Quarterly Journal of Mathematics, T. XXXI.

Idem: „The Theory of the Double Gamma Fonction". Philosophical Transactions of the R. S. L. Series A. Vol. 196, 1901.

On en voit que

$$\Gamma(x) = \Gamma_0(x).$$

Cela posé, on peut écrire

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2^{\lambda+1}\lambda!\varphi_{\lambda+1}(x)}[\Gamma_\lambda(x)]^{2\lambda+1}}{\Gamma_\lambda(2x)}. \tag{A}$$

Posant $\lambda = 0$, on trouve

$$v_0(2, x-2) = \frac{2^{2(x-1)}[\Gamma_0(x)]^2}{\Gamma_0(2x)} =$$

$$= 2^{2(x-1)}B(x, x) = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^{x-1}\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

B désignant l'intégrale eulérienne de première espèce.

On voit que la fonction $v_\lambda(2, x-2)$ représente une généralisation de la fonction $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$.

Je désignerai $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$ simplement par $\beta_0(x)$ et, par analogie, $v_\lambda(2, x-2)$ par $\beta_\lambda(x)$.

32. Remplaçons maintenant dans le second membre de l'équation (41) a par 2, $m+2$ par x.

Il viendra

$$\frac{2}{\lambda!}\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda!}q_\lambda(2) - \psi_\lambda(2x)\log 2x - \frac{1}{\lambda!}p_\lambda(2x) -$$

$$-\frac{C_{\lambda+1}}{2}\frac{1}{x} - \frac{C_{\lambda+3}}{2^3}\frac{2!}{x^3} - \dots - \frac{C_{\lambda+2s-1}}{2^{2s-1}}\frac{[2(s-1)]!}{x^{2s-1}} -$$

$$-\frac{1}{\lambda!}\varrho_s^{(\lambda)}(2x). \tag{42}$$

On peut écrire aussi, en tenant compte de (39),

$$2\log\beta_\lambda(x) = q_\lambda(2) - q_\lambda(2x). \tag{43}$$

Nous avons supposé jusqu'à présent que x soit un entier; mais la série (40) définit la fonction $q_\lambda(a)$ pour toutes les valeurs de a, fractionnaires ou incommensurables.

L'équation (43) permet donc d'étendre la notion de la fonction $\beta_\lambda(x)$ à toutes les valeurs réelles et positives de x, ou même aux valeurs complexes de x, mais je me bornerai, comme dans le n⁰ 26, au cas de x réel et positif.

On voit de ce qui précède que la formule (27) permet de construire les points principaux de la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)\,(\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ [1], analogues à la fonction primitive $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \beta_0(x)$.

Remarquons que la théorie de ces fonctions peut être déduite de celle de fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, comme le montre la relation (A), mais nous préférons à dessein une méthode directe et plus simple, en désirant attirer l'attention aux applications directes de la formule (27), des polynomes $\psi_n(z)$ et des nombres C_n.

Quant aux fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, ces propriétés fondamentales résulteront presque immédiatement de nos recherches sur la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$, comme nous le démontrerons à la fin de ce travail.

33. La formule (42), ayant lieu quel que soit le nombre x, fournit un moyen commode de calcul approché de log $\beta_\lambda(x)$ pour x assez grand.

La constante $q_\lambda(2)$, qui figure dans la formule (42), jouit par rapport à la fonction $\log \beta_\lambda(x)$ la même rôle que $\log 2\pi$ relativement à $\log \Gamma(x)$, ou, plus généralement, que les constantes $\log \tilde{\omega}_{2i}$, introduites par M. Beaupain, par rapport aux transcendantes de Kinkelin.

Le calcul numérique de $\log \beta_\lambda(x)$ exige tout-d'abord le calcul des constantes $q_\lambda(2)\,(\lambda = 2, 4, \ldots)$ avec une approximation suffisante.

On pourrait, pour cela, employer la formule (39_1) en y posant $x = 2$, mais cette manière du calcul n'est pas assez exacte.

L'égalité (43) fournit un moyen plus commode.

Le calcul de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x un entier ne surpassant pas, par exemple, 5 ne présente pas des grandes difficultés; il en est de même du calcul de $q_\lambda(2x)$ pour $x \geqq 5$, comme nous l'avons déjà vu aux n-os 27—30.

Sachant les valeurs de $\log \beta_\lambda(x)$ et $q_\lambda(2x)$, ainsi calculées, nous obtiendrons

$$q_\lambda(2) = 2 \log \beta_\lambda(x) + q_\lambda(2x). \tag{44}$$

Posons, par exemple,

$$x = 5, \qquad \lambda = 2.$$

---

[1]) Nous avons supposé jusqu'à présent que λ soit pair, mais cette restriction n'a rien d'essentiel.

On a

$$\beta_2(5) = \frac{2^{2^2} . 4^{4^2} . 6^{6^2} . 8^{8^2}}{3^{3^2} . 5^{5^2} . 7^{7^2} . 9^{9^2}},$$

d'où

$$\log \beta_2(5) = 264 \log 2 - 135 \log 3 - 25 \log 5 - 49 \log 7 .$$

Or,

$$264 \ \log 2 = 182{,}99085 \ 56678 \ 25 \ldots ,$$

$$135 \ \log 3 = 148{,}31265 \ 89701 \ 94 \ldots ,$$

$$25 \ \log 2 = 40{,}23594 \ 78108 \ 52 \ldots ,$$

$$49 \ \log 7 = 95{,}34959 \ 73037 \ 10 \ldots .$$

Par conséquent,

$$2 \log \beta_2(5) = -201{,}81469 \ 68338 \ 64 \ldots .$$

D'autre part (nº 27),

$$q_2(10) = 202{,}24097 \ 52327 \ldots .$$

On trouve donc, eu égard à (44),

$$q_2(2) = 0{,}42627 \ 83988 \ldots , \tag{45}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

34. Posons encore

$$\lambda = 4 , \qquad x = 5 .$$

On trouve

$$\log \beta_4(5) = 1412 \ \log 2 - 11907 \ \log 3 - 625 \ \log 5 - 2401 \ \log 7 ,$$

$$14112 \ \log 2 = 9781{,}69301 \ 20619 \ 4820 \ldots ,$$

$$11907 \ \log 3 = 13081{,}17652 \ 11711 \ 8199 \ldots ,$$

$$625 \ \log 5 = 1005{,}89869 \ 52713 \ 1273 \ldots ,$$

$$2401 \ \log 7 = 4672{,}13026 \ 78818 \ 0724 \ldots ,$$

d'où

$$2 \log \beta_4(5) = -17955{,}02494 \ 45247 \ 0753 \ldots .$$

D'autre part (voir n° 28),

$$q_4(10) = 17954{,}52994\ 82147\ 5678\ldots\ .$$

On a donc, eu égard à (44),

$$q_4(2) = -0{,}49499\ 63099\ 50\ldots\ , \tag{46}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

35. Calculons encore $q_6(2)$.

On trouve, en posant $\lambda = 6$, $x = 5$,

$$\log \beta_6(5) = 841344 \log 2 - 1016955 \log 3 - 25.5^4 \log 5 - 49.7^4 \log 7\,,$$

$$841344 \log 2 = 583175{,}22148\ 1026\ldots\ ,$$

$$1016\ 955 \log 3 = 1117239{,}26001\ 2377\ldots\ ,$$

$$25.5^4 \log 5 = 25147{,}46738\ 1782\ldots\ ,$$

$$49.7^4 \log 7 = 228934{,}38312\ 6208\ldots\ ,$$

d'où

$$2 \log \beta_6(5) = -1576291{,}77807\ 8684\ldots\ .$$

D'autre part (voir n° 29),

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\ldots\ .$$

On a donc, en vertu de (44),

$$q_6(2) = 1{,}49855\ 9044\ldots\ , \tag{47}$$

le résultat avec 7 décimales exact.

Si nous introduisons, au lieu de $q_6(2)$, la constante

$$\log \omega_6 = \frac{1}{2^7 - 1} q_6(2)\,,$$

nous obtiendrons

$$\log \omega_6 = 0.01179\ 9677\ldots\ , \tag{48}$$

avec 9 figures exactes.

36. Posons, en général,

$$\log \omega_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 1} q_\lambda(2).$$

Nous verrons plus loin que les constantes ω_λ ainsi définies, coïncident avec celles de M. Beaupain (voir n° 33).

On trouve, en tenant compte de (39_1),

$$\log \omega_\lambda = \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \psi_\lambda(2) \log 2 + \frac{1}{2^{\lambda+1}-1} p_\lambda(2) +$$

$$+ \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{49}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(\lambda)} < \frac{6!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{|C_{\lambda+7}|}{2^7}. \tag{50}$$

En se rappelant que les polynomes $\psi_\lambda(z)$ satisfont à l'équation (voir n° 16)

$$\psi_\lambda(1+z) + \psi_\lambda(z) = 2\frac{z^\lambda}{\lambda!},$$

on obtient, pour $z = 1$,

$$\lambda!\,\psi_\lambda(2) = 2,$$

car

$$\psi_\lambda(1) = 0 \qquad \text{pour } \lambda \text{ pair.}$$

L'égalité (49) se réduit à

$$\log \omega_\lambda = \frac{2 \log 2}{2^{\lambda+1}-1} + \frac{p_\lambda(2)}{2^{\lambda+1}-1} +$$

$$+ \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{51}$$

et fournit un moyen fort simple de calcul des constantes $\log \omega_\lambda$ avec trois ou quatre décimales exactes pour

$$\lambda = 2, 4, 6, 8.$$

On trouve, en effet, eu égard à (50),

$$\varepsilon_3^{(2)} < 0{,}000067\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(4)} < 0{,}000018\ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(6)} < 0{,}000014\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(8)} < 0{,}000009\ldots.$$

37. Appliquons la formule (51) au calcul de $\log \omega_8$.
On trouve

$$\log \omega_8 = \frac{2\log 2}{511} + \frac{p_8(2)}{511} - \frac{8!}{511.4.5!} + \frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} - \frac{4!\,8!\,5461}{511.2^6.13!}.$$

Or, dans le cas considéré,

$$p_8(x) = C_1\mu_0 x^7 + C_3\mu_2 x^5 + C_5\mu_4 x^3 + C_7\mu_6 x,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 146, \quad \mu_4 = 5944, \quad \mu_6 = 69264.$$

On a donc

$$p_8(2) = -64 + 194{,}6666666\ldots - 198{,}1333333 + 58{,}4071428 =$$

$$= -9{,}0595238\ldots$$

et

$$\frac{p_8(2)}{511} = -0{,}0177290\ldots\,.$$

D'autre part,

$$\frac{2\log 2}{511} = 0{,}0027129\ldots,$$

$$\frac{8!}{511.4.5!} = 0{,}1643835\ldots,$$

$$\frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} = 0{,}0000853\ldots,$$

$$\frac{4!\,8!\,5462}{511.2^6.13!} = 0{,}0000259\ldots\,.$$

Par suite,

$$\log \omega_8 = -0{,}1793\ldots,$$

le résultat avec 4 décimales exact.

38. Introduisons maintenant les constantes

$$\pi_\lambda \qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

en posant

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) = (2^{\lambda+1} - 1)\log \omega_\lambda.$$

La formule (42) donne

$$2\log\beta_\lambda(x)+\lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x+p_\lambda(2x)=$$

$$=\log\pi_\lambda-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}-\ldots-C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{(2x)^{2s-1}}-\rho_s^{(\lambda)}(2x),$$

d'où

$$\pi_\lambda=\beta_\lambda^2(x)\,e^{p_\lambda(x)}(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\lambda!}{(2x)^{2s-1}}}\,e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}.$$

Cette égalité a lieu, quel que soit le nombre x.

Supposons que x croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve

$$\pi_\lambda=\lim_{x=\infty}\beta_\lambda^{(2)}(x)\,e^{p_\lambda(2x)}(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)},$$

car

$$\lim_{x=\infty}e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\lambda!}{(2x)^{2s-1}}}=1.$$

Si x est un entier, on aura

$$\pi_\lambda=\lim_{x=\infty}\frac{2^{2\lambda}.2^{2\lambda}.4^{4\lambda}.4^{4\lambda}\ldots(2x-2)^{(2x-2)\lambda}(2x-2)^{(2x-2)\lambda}}{1^{1\lambda}.3^{3\lambda}.3^{3\lambda}.5^{5\lambda}\ldots(2x-3)^{(2x-3)\lambda}(2x-1)^{(2x-1)\lambda}}\cdot\frac{(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)}}{(2x-1)^{(2x-1)\lambda}}\,e^{p_\lambda(2x)},\qquad(52)$$

la formule représentant une généralisation de celle de Wallis.

En posant $\lambda=0$ et en remarquant que

$$\psi_\lambda(x)=1,\quad p_\lambda(x)=0,\quad \lambda!=1\qquad\text{pour } \lambda=0,$$

on trouve, en effet,

$$\pi_0=\frac{\pi}{2}=\lim_{x=\infty}\frac{2.2.4.4\ldots(2x-2)(2x-2)}{1.3.3.5\ldots(2x-3)(2x-1)}\,\frac{2x}{2x-1}.\qquad(53)$$

L'égalité (52) définit une suite infinie de nombres

$$\pi_0,\ \pi_2,\ \pi_4,\ \ldots,\ \pi_k,\ \ldots$$

qu'on peut considérer comme les nombres caractéristiques pour les fonctions $\beta_\lambda(x)\,(\lambda=0,\ 2,\ 4,\ldots)$.

Voici les valeurs approchées des logarithmes de quatre premiers d'entre eux:

$$\log \pi_0 = 0{,}55158\ 27052\ldots\,,$$
$$\log \pi_2 = 0{,}42627\ 83988\ldots\,,$$
$$\log \pi_4 = -0{,}49499\ 63099\ldots\,,$$
$$\log \pi_6 = 1{,}49855\ 90\ldots\,,$$

39. Les valeurs des constantes

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) \qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

étant trouvées, la formule (42) permettra de calculer $\log \beta_\lambda(x) (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$ pour x assez grand; le calcul sera d'autant plus simple et l'approximation d'autant plus grande que x sera plus considérable.

Posons, pour exemple,

$$\lambda = 2\,, \qquad x = 100.$$

On a

$$2 \log \beta_2(100) = 2 \log \frac{2^{2^2}.4^{4^2}.6^{6^2}\ldots 193^{194^2}.196^{196^2}}{3^{3^3}.5^{5^2}.7^{7^2}\ldots 195^{195^2}.197^{197^2}} = q_2(2) - q_2(200)\,,$$

ou, eu égard à (42) et (45),

$$2 \log \beta_2(100) = 0{,}4262783988\ldots - 2\psi_2(200) \log 200 -$$
$$- p_2(200) - C_3 \frac{2!}{200} - C_5 \frac{2!\,2!}{200^3} \ldots\,.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_7 pour obtenir la valeur de $q_2(200)$ avec 12 décimales exacte.

On a

$$2\psi_2(200) \log 200 = 200.199 \log 2 + 400.199 \log 10\,,$$
$$p_2(200) = -100.$$

Formons maintenant le tableau suivant:

$$200.199 \log\ 2 = \quad 27587{,}25778\ 628612\ldots\,,$$
$$400.199 \log 10 = 183285{,}77340\ 232602\ldots\,,$$
$$p_2(200) = -100\,,$$
$$C_3 \frac{2!}{200} = \qquad 0{,}00004\ 166666\ldots\,,$$
$$C_5 \frac{2!\,2!}{200^3} = - \quad 0{,}00000\ 000208\ldots\,.$$

On en tire

$$\log \beta_2(100) = -105386,30247\ 5938\ldots ,$$

le résultat avec 9 décimales exact.

Pour le second exemple, posons

$$\lambda = 6, \quad x = 10$$

et calculons

$$\log \beta_6(10) = \log \frac{2^{2^6}.4^{4^6}\ldots 16^{16^6}.18^{18^6}}{3^{3^6}.5^{5^6}\ldots 17^{17^6}.19^{19^6}}.$$

On trouve, eu égard à (42) et (47),

$$2\log \beta_6(10) = 1,4985590\ldots - 6!\,\psi_6(20)\log 20 -$$

$$-p_6(20) - C_7\frac{6!}{20} - C_9\frac{2!\,6!}{20^3} - C_{11}\frac{4!\,6!}{20^5} - \ldots .$$

Or,

$$6!\,\psi_6(20)\log 20 = 163087647,89788\ 5633\ldots ,$$

$$p_6(10) = -1575420,\ 33333\ 3333\ldots ,$$

$$C_7\frac{6!}{20} = \qquad 0,01517\ 8571\ldots ,$$

$$C_9\frac{2!\,6!}{20^3} = \qquad -0,00000\ 7688\ldots ,$$

$$C_{11}\frac{4!\,6!}{20^5} = \qquad 0,00000\ 0023\ldots .$$

Par conséquent,

$$\log \beta_6(10) = -80756113,04033\ 86\ldots ,$$

le résultat avec 7 figures exact.

40. Les égalités (39_1) et (42) donnent

$$2\log \beta_\lambda(x) = \log \pi_\lambda - \lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x - p_\lambda(2x) -$$

$$- C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x} - C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{(2x)^3} - \ldots - \Theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{(2x)^{2s+1}}. \tag{54}$$

Si x est très grand, il suffit de s'arrêter au terme multiplié par $C_{\lambda+1}$ ou même à celui multiplié par $C_{\lambda+1}$ pour obtenir la valeur de $\log \beta_\lambda(x)$ avec une approximation suffisante.

Nous obtiendrons ainsi la formule suivante

$$\log \beta_\lambda(x) = \frac{1}{2}\log \pi_\lambda - \frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)\log 2x -$$

$$-\frac{1}{2}p_\lambda(2x) - C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x} - \Theta\frac{\lambda!}{8x^3}C_{\lambda+3},$$

d'où

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}\,e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}\,e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}-\Theta C_{\lambda+3}\frac{\lambda!}{8x^3}}. \tag{55}$$

Si x est très grand, on peut remplacer cette égalité par la suivante

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}\,e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}\,e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}},$$

ou même par la suivante

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}\,e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}.$$

41. Considérons le cas le plus simple de $\lambda = 0$.

On a, eu égard à (53),

$$\log \pi_0 = \log\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\psi_0(z) = 1, \quad p_0(z) = 0, \quad 0! = 1,$$

$$2\beta_0(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\frac{dy}{\sqrt{y}} = B_0(x).$$

Par conséquent [l'égalité (54)],

$$\log B_0(x) = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log 2x -$$

$$-\frac{C_1}{2}\frac{1}{2x} - \frac{C_3}{2}\frac{2!}{(2x)^3} - \ldots - \Theta\frac{C_{2s+1}}{2}\frac{2s!}{(2x)^{2s+1}}, \tag{56}$$

c'est une formule qu'on pourrait déduire indépendamment de la théorie générale des fonctions $\beta_\lambda(x)$ moyennant la formule de Stirling.

L'égalité (55) fournit un moyen commode de calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

pour x plus grand que l'unité.

Posons, pour exemple,

$$x = \frac{21}{2}.$$

On trouve

$$\log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{21} + \frac{1}{4.21} - \frac{2!}{2.4!\,21^3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{4!\,|C_5|}{2.21^5} < 0{,}0000000123.$$

Le calcul nous donne

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 0{,}91893\ 853\ldots ,$$

$$\frac{1}{2}\log 21 = 1{,}52226\ 121\ldots ,$$

$$\frac{1}{4.21} = 0{,}01190\ 476\ldots ,$$

$$\frac{2!}{2.4!\,21^3} = 0{,}00000\ 449\ldots .$$

Par conséquent,

$$\log B_0\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -0{,}59142\ 24\ldots , \tag{57}$$

avec 7 décimales exactes.

42. Écrivons (56) sous la forme suivante

$$\log B_0(x) = \log\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} q_0(2x)$$

et posons

$$\frac{dB_0(x)}{dx} = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = -B_1(x). \tag{58}$$

De l'égalité précédente on tire, par différentiation,

$$\frac{1}{B_0(x)}\frac{dB_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx},$$

ou, en vertu de (58),

$$\frac{B_1(x)}{B_0(x)} = \frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx}, \tag{59}$$

et

$$\log\int_1^0 (1-y)^{x-1}\log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \log B_0(x) + \log\frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx}. \tag{60}$$

Cette formule peut servir au calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1}\log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Posant, comme au n^o précédent,

$$x = \frac{21}{2},$$

on trouve, eu égard à (39_2),

$$\frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = \frac{1}{21} + \frac{1}{2.21^2} - \frac{3!}{4!\,21^4}.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_3 pour obtenir le résultat avec 7 décimales exact.

On a

$$\frac{1}{21} = 0{,}04761\ 904\ldots ,$$

$$\frac{1}{2.21^2} = 0{,}00113\ 378\ldots ,$$

$$\frac{3!}{4!\,21^4} = 0{,}00000\ 128\ldots ,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = 0{,}0487515\ldots .$$

Par conséquent,

$$\log \frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = -3{,}02102\ldots , \tag{61}$$

le résultat avec 5 décimales exact.

On trouve donc, en tenant compte de (57), (60) et (61),

$$\log B_1\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_1^0 (1-y)^{\frac{19}{2}} \log (1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -3{,}61244\ldots .$$

En raisonnant ainsi de suite, on pourrait construire une série de formules pour calcul successif des logarithmes des intégrales

$$B_k = (-1)^k \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^k (1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}, \qquad (k=3,4,5,\ldots)$$

mais nous nous bornerons aux cas les plus simples correspondant à $k=0$ et $k=1$ [les égalités (56) et (59)].

43. Si l'on pose dans (55) $\lambda = 0$, on aura

$$\beta_0(x) = \frac{B_0(x)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x} - \frac{\theta}{192x^3}}.$$

On peut donc poser pour x assez grand

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}} \tag{62}$$

D'autre part (voir n° 28),

$$q_4(10) = 17954{,}52994\ 82147\ 5678\ldots\ .$$

On a donc, eu égard à (44),

$$q_4(2) = -0{,}49499\ 63099\ 50\ldots\ , \tag{46}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

35. Calculons encore $q_6(2)$.

On trouve, en posant $\lambda = 6$, $x = 5$,

$$\log \beta_6(5) = 841344\ \log 2 - 1016955\ \log 3 - 25.5^4\ \log 5 - 49.7^4\ \log 7,$$

$$841344\ \log 2 = 583175{,}22148\ 1026\ldots\ ,$$

$$1016\ 955\ \log 3 = 1117239{,}26001\ 2377\ldots\ ,$$

$$25.5^4\ \log 5 = 25147{,}46738\ 1782\ldots\ ,$$

$$49.7^4\ \log 7 = 228934{,}38312\ 6208\ldots\ ,$$

d'où

$$2 \log \beta_6(5) = -1576291{,}77807\ 8684\ldots\ .$$

D'autre part (voir n° 29),

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\ldots\ .$$

On a donc, en vertu de (44),

$$q_6(2) = 1{,}49855\ 9044\ldots\ , \tag{47}$$

le résultat avec 7 décimales exact.

Si nous introduisons, au lieu de $q_6(2)$, la constante

$$\log \omega_6 = \frac{1}{2^7 - 1}\, q_6(2),$$

nous obtiendrons

$$\log \omega_6 = 0{,}01179\ 9677\ldots\ , \tag{48}$$

avec 9 figures exactes.

36. Posons, en général,

$$\log \omega_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 1}\, q_\lambda(2).$$

Nous verrons plus loin que les constantes ω_λ, ainsi définies, coïncident avec celles de M. Beaupain (voir n° 33).

On trouve, en tenant compte de (39_1),

$$\log \omega_\lambda = \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\psi_\lambda(2)\log 2 + \frac{1}{2^{\lambda+1}-1}\,p_\lambda(2) +$$

$$+\frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{49}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(\lambda)} < \frac{6!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{|C_{\lambda+7}|}{2^7}. \tag{50}$$

En se rappelant que les polynomes $\psi_\lambda(z)$ satisfont à l'équation (voir n° 16)

$$\psi_\lambda(1+z) + \psi_\lambda(z) = 2\frac{z^\lambda}{\lambda!},$$

on obtient, pour $z = 1$,

$$\lambda!\,\psi_\lambda(2) = 2,$$

car

$$\psi_\lambda(1) = 0 \qquad \text{pour } \lambda \text{ pair.}$$

L'égalité (49) se réduit à

$$\log \omega_\lambda = \frac{2\log 2}{2^{\lambda+1}-1} + \frac{p_\lambda(2)}{2^{\lambda+1}-1} +$$

$$+\frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{51}$$

et fournit un moyen fort simple de calcul des constantes $\log \omega_\lambda$ avec trois ou quatre décimales exactes pour

$$\lambda = 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

On trouve, en effet, eu égard à (50),

$$\varepsilon_3^{(2)} < 0{,}000067\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(4)} < 0{,}000018\ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(6)} < 0{,}000014\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(4)} < 0{,}000009\ldots.$$

37. Appliquons la formule (51) au calcul de $\log \omega_8$. On trouve

$$\log \omega_8 = \frac{2 \log 2}{511} + \frac{p_8(2)}{511} - \frac{8!}{511.4.5!} + \frac{2.8!\,2073}{511.2^8.12!} - \frac{4!\,8!\,5461}{511.2^6.13!}.$$

Or, dans le cas considéré,

$$p_8(x) = C_1 \mu_0 x^7 + C_3 \mu_2 x^5 + C_5 \mu_4 x^3 + C_7 \mu_6 x,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 146, \quad \mu_4 = 5944, \quad \mu_6 = 69264.$$

On a donc

$$p_8(2) = -64 + 194{,}6666666\ldots - 198{,}1333333 + 58{,}4071428 =$$
$$= -9{,}0595238\ldots$$

et

$$\frac{p_8(2)}{511} = -0{,}0177290\ldots\,.$$

D'autre part,

$$\frac{2 \log 2}{511} = 0{,}0027129\ldots\,,$$

$$\frac{8!}{511.4.5!} = 0{,}1643835\ldots\,,$$

$$\frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} = 0{,}0000853\ldots\,,$$

$$\frac{4!\,8!\,5462}{511.2^6.13!} = 0{,}0000259\ldots\,.$$

Par suite,

$$\log \omega_8 = -0{,}1793\ldots\,,$$

le résultat avec 4 décimales exact.

38. Introduisons maintenant les constantes

$$\pi_\lambda \qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

en posant

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) = (2^{\lambda+1} - 1) \log \omega_\lambda\,.$$

La formule (42) donne

$$2\log\beta_\lambda(x) + \lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x + p_\lambda(2x) =$$

$$= \log\pi_\lambda - C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{(2x)^{2s-1}} - \varrho_s^{(\lambda)}(2x),$$

d'où

$$\pi_\lambda = \beta_\lambda^2(x)\,e^{p_\lambda(x)}(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\lambda!}{(2x)^{2s-1}}}\,e^{\varrho_s^{(\lambda)}(2x)}.$$

Cette égalité a lieu, quel que soit le nombre x.

Supposons que x croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve

$$\pi_\lambda = \lim_{x=\infty}\beta_\lambda^{(2)}(x)\,e^{p_\lambda(2x)}(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)},$$

car

$$\lim_{x=\infty} e^{\varrho_s^{(\lambda)}(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\lambda!}{(2x)^{2s-1}}} = 1.$$

Si x est un entier, on aura

$$\pi_\lambda = \lim_{x=\infty}\frac{2^{2\lambda}.2^{2\lambda}.4^{4\lambda}.4^{4\lambda}\ldots(2x-2)^{(2x-2)\lambda}(2x-2)^{(2x-2)\lambda}}{1^{1\lambda}.3^{3\lambda}.3^{3\lambda}.5^{5\lambda}\ldots(2x-3)^{(2x-3)\lambda}(2x-1)^{(2x-1)\lambda}}\cdot\frac{(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)}}{(2x-1)^{(2x-1)\lambda}}\,e^{p_\lambda(2x)}, \tag{52}$$

la formule représentant une généralisation de celle de Wallis.

En posant $\lambda = 0$ et en remarquant que

$$\psi_\lambda(x) = 1,\quad p_\lambda(x) = 0,\quad \lambda! = 1 \qquad \text{pour } \lambda = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\pi_0 = \frac{\pi}{2} = \lim_{x=\infty}\frac{2.2.4.4\ldots(2x-2)(2x-2)}{1.3.3.5\ldots(2x-3)(2x-1)}\,\frac{2x}{2x-1}. \tag{53}$$

L'égalité (52) définit une suite infinie de nombres

$$\pi_0,\ \pi_2,\ \pi_4,\ \ldots,\ \pi_k,\ \ldots$$

qu'on peut considérer comme les nombres caractéristiques pour les fonctions $\beta_\lambda(x)\,(\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$.

Voici les valeurs approchées des logarithmes de quatre premiers d'entre eux:

$$\log \pi_0 = 0{,}55158\ 27052\ldots\ ,$$
$$\log \pi_2 = 0{,}42627\ 83988\ldots\ ,$$
$$\log \pi_4 = -0{,}49499\ 63099\ldots\ ,$$
$$\log \pi_6 = 1{,}49855\ 90\ldots\ ,$$

39. Les valeurs des constantes

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) \qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

étant trouvées, la formule (42) permettra de calculer $\log \beta_\lambda(x) (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$ pour x assez grand; le calcul sera d'autant plus simple et l'approximation d'autant plus grande que x sera plus considérable.

Posons, pour exemple,

$$\lambda = 2\,, \qquad x = 100.$$

On a

$$2\log \beta_2(100) = 2\log \frac{2^{2^2}.4^{4^2}.6^{6^2}\ldots 193^{194^2}.196^{196^2}}{3^{3^3}.5^{5^2}.7^{7^2}\ldots 195^{195^2}.197^{197^2}} = q_2(2) - q_2(200)\,,$$

ou, eu égard à (42) et (45),

$$2\log \beta_2(100) = 0{,}4262783988\ldots - 2\psi_2(200)\log 200 -$$
$$- p_2(200) - C_3\frac{2!}{200} - C_5\frac{2!\,2!}{200^3}\ldots\ .$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_7 pour obtenir la valeur de $q_2(200)$ avec 12 décimales exacte.

On a

$$2\psi_2(200)\log 200 = 200.199\log 2 + 400.199\log 10\,,$$
$$p_2(200) = -100.$$

Formons maintenant le tableau suivant:

$$200.199\log\ 2 = \quad 27587{,}25778\ 628612\ldots\ ,$$
$$400.199\log 10 = 183285{,}77340\ 232602\ldots\ ,$$
$$p_2(200) = -100\,,$$
$$C_3\frac{2!}{200} = \qquad 0{,}00004\ 166666\ldots\ ,$$
$$C_5\frac{2!\,2!}{200^3} = -\quad 0{,}00000\ 000208\ldots\ .$$

On en tire

$$\log \beta_2(100) = -105386{,}30247\ 5938\ldots,$$

le résultat avec 9 décimales exact.

Pour le second exemple, posons

$$\lambda = 6, \quad x = 10$$

et calculons

$$\log \beta_6(10) = \log \frac{2^{2^6}.4^{4^6}\ldots 16^{16^6}.18^{18^6}}{3^{3^6}.5^{5^6}\ldots 17^{17^6}.19^{19^6}}.$$

On trouve, eu égard à (42) et (47),

$$2\log \beta_6(10) = 1{,}4985590\ldots - 6!\,\psi_6(20)\log 20 -$$

$$- p_6(20) - C_7 \frac{6!}{20} - C_9 \frac{2!\,6!}{20^3} - C_{11} \frac{4!\,6!}{20^5} - \ldots.$$

Or,

$$6!\,\psi_6(20)\log 20 = 163087647{,}89788\ 5633\ldots,$$

$$p_6(10) = -1575420{,}\ 33333\ 3333\ldots,$$

$$C_7 \frac{6!}{20} = \qquad 0{,}01517\ 8571\ldots,$$

$$C_9 \frac{2!\,6!}{20^3} = \qquad -0{,}00000\ 7688\ldots,$$

$$C_{11} \frac{4!\,6!}{20^5} = \qquad 0{,}00000\ 0023\ldots.$$

Par conséquent,

$$\log \beta_6(10) = -80756113{,}04033\ 86\ldots,$$

le résultat avec 7 figures exact.

40. Les égalités (39_1) et (42) donnent

$$2\log \beta_\lambda(x) = \log \pi_\lambda - \lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x - p_\lambda(2x) -$$

$$- C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x} - C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{(2x)^3} - \ldots - \theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{(2x)^{2s+1}}. \qquad (54)$$

Si x est très grand, il suffit de s'arrêter au terme multiplié par $C_{\lambda+1}$ ou même à celui multiplié par $C_{\lambda+1}$ pour obtenir la valeur de $\log\beta_\lambda(x)$ avec une approximation suffisante.

Nous obtiendrons ainsi la formule suivante

$$\log\beta_\lambda(x)=\frac{1}{2}\log\pi_\lambda-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)\log 2x-$$

$$-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}-\Theta\frac{\lambda!}{8x^3}C_{\lambda+3},$$

d'où

$$\beta_\lambda(x)=\sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}\,e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}\,e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}-\Theta C_{\lambda+3}\frac{\lambda!}{8x^3}}. \tag{55}$$

Si x est très grand, on peut remplacer cette égalité par la suivante

$$\beta_\lambda(x)=\sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}\,e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}\,e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}},$$

ou même par la suivante

$$\beta_\lambda(x)=\sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}\,e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}.$$

41. Considérons le cas le plus simple de $\lambda=0$.

On a, eu égard à (53),

$$\log\pi_0=\log\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\psi_0(z)=1,\quad p_0(z)=0,\quad 0!=1,$$

$$2\beta_0(x)=\int_0^1(1-y)^{x-1}\frac{dy}{\sqrt{y}}=B_0(x).$$

Par conséquent [l'égalité (54)],

$$\log B_0(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log 2x-$$

$$-\frac{C_1}{2}\frac{1}{2x}-\frac{C_3}{2}\frac{2!}{(2x)^3}-\ldots-\Theta\frac{C_{2s+1}}{2}\frac{2s!}{(2x)^{2s+1}}, \tag{56}$$

c'est une formule qu'on pourrait déduire indépendamment de la théorie générale des fonctions $\beta_\lambda(x)$ moyennant la formule de Stirling.

L'égalité (55) fournit un moyen commode de calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

pour x plus grand que l'unité.

Posons, pour exemple,

$$x = \frac{21}{2}.$$

On trouve

$$\log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{21} + \frac{1}{4.21} - \frac{2!}{2.4!\,21^3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{4!\,|C_5|}{2.21^5} < 0{,}0000000123.$$

Le calcul nous donne

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 0{,}91893\ 853\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\log 21 = 1{,}52226\ 121\ldots,$$

$$\frac{1}{4.21} = 0{,}01190\ 476\ldots,$$

$$\frac{2!}{2.4!\,21^3} = 0{,}00000\ 449\ldots.$$

Par conséquent,

$$\log B_0\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -0{,}59142\ 24\ldots, \qquad (57)$$

avec 7 décimales exactes.

42. Écrivons (56) sous la forme suivante

$$\log B_0(x) = \log \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} q_0(2x)$$

et posons

$$\frac{dB_0(x)}{dx} = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -B_1(x). \tag{58}$$

De l'égalité précédente on tire, par différentiation,

$$\frac{1}{B_0(x)} \frac{dB_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx},$$

ou, en vertu de (58),

$$\frac{B_1(x)}{B_0(x)} = \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}, \tag{59}$$

et

$$\log \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \log B_0(x) + \log \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}. \tag{60}$$

Cette formule peut servir au calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Posant, comme au n° précédent,

$$x = \frac{21}{2},$$

on trouve, eu égard à (39_2),

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = \frac{1}{21} + \frac{1}{2.21^2} - \frac{3!}{4!\,21^4}.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_3 pour obtenir le résultat avec 7 décimales exact.

On a

$$\frac{1}{21} = 0{,}04761\ 904\ldots ,$$

$$\frac{1}{2.21^2} = 0{,}00113\ 378\ldots ,$$

$$\frac{3!}{4!\,21^4} = 0{,}00000\ 128\ldots ,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = 0{,}0487515\ldots .$$

Par conséquent,

$$\log \frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = -3{,}02102\ldots , \tag{61}$$

le résultat avec 5 décimales exact.

On trouve donc, en tenant compte de (57), (60) et (61),

$$\log B_1\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_1^0 (1-y)^{\frac{19}{2}} \log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = -3{,}61244\ldots .$$

En raisonnant ainsi de suite, on pourrait construire une série de formules pour calcul successif des logarithmes des intégrales

$$B_k = (-1)^k \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^k (1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}}, \qquad (k=3,4,5,\ldots)$$

mais nous nous bornerons aux cas les plus simples correspondant à $k=0$ et $k=1$ [les égalités (56) et (59)].

43. Si l'on pose dans (55) $\lambda = 0$, on aura

$$\beta_0(x) = \frac{B_0(x)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x} - \frac{\theta}{192x^3}}.$$

On peut donc poser pour x assez grand

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}} \tag{62}$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}} \frac{1}{192 x^3}.$$

Si l'on pose, par exemple, $x = 50$, on aura

$$\varepsilon < 0{,}000000013.$$

Faisons dans (62) $x = 100$.
On trouve

$$\frac{e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0{,}10012\ 507\ldots,$$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 385\ldots.$$

Par conséquent,

$$B_0(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0{,}1774670\ldots$$

avec 7 décimales exactes.

44. Considérons encore l'intégrale

$$B_1(x) = \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

On peut poser, pour x assez grand,

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2},$$

de sorte qu'on aura, en vertu de (59) et (62),

$$B_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}} (4x+1)}{8x^2 \sqrt{x}}, \tag{63}$$

la formule qui peut être remplacée, pour x très grand, par la suivante

$$B_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{2x\sqrt{x}}. \tag{64}$$

Posons dans (63) $x = 100$. On trouve

$$B_1(100) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{800}}}{10} \cdot \frac{401}{8.10^4}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0{,}1774670\ldots ,$$

$$\frac{401}{8.10^4} = 0{,}0050125.$$

Par conséquent,

$$B_1(100) = 0{,}0008895\ldots ,$$

avec 7 décimales exactes.

Moyennant la formule plus simple (64) nous obtiendrons

$$B_1(100) = 0{,}00088\ldots ,$$

le résultat avec 5 décimales exact.

45. De l'égalité (59) nous tirerons ensuite

$$B_2(x) = \int_0^1 (1 - y)^{x-1} \log^2(1 - y) \frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= B_0(x) \left[\left(\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} \right].$$

Pour les valeurs de x assez grandes nous pouvons poser avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} = -\frac{1}{2x^2}, \quad \left[\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right]^2 = \frac{1}{4x^2}$$

et

$$B_2(x) = \frac{3\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{4x^2 \sqrt{x}}. \tag{65}$$

Nous trouverons de la même manière

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1}\log^3(1-y)\,\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3^2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{8x}}}{4x^3\sqrt{x}}$$

et ainsi de suite.

Posant, par exemple, $x = 100$, on trouve, eu égard à (65),

$$B_2(100) = \int_0^1 (1-y)^{99}\log^2(1-y)\,\frac{dy}{\sqrt{y}} = 0{,}000013\ldots\,,$$

le résultat avec 6 décimales exact.

46. Revenons maintenant au cas général.

Écrivons l'égalité (41) sous la forme suivante

$$2\log v_\lambda(2x, m-1) = q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m), \tag{66}$$

en y remplaçant a par $2x$ et $m+1$ par m.

Or, en vertu de (43),

$$q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m) = 2\log\beta_\lambda(x+m) - 2\log\beta_\lambda(x).$$

D'autre part (nº 30),

$$v_\lambda(2x, m-1) =$$

$$= \frac{(2x)^{(2x)\lambda}(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\ldots(2x+2m-2)^{(2x+2m-2)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}(2x+3)^{(2x+3)\lambda}\ldots(2x+2m-1)^{(2x+2m-1)\lambda}}.$$

Par conséquent,

$$\log\beta_\lambda(x) = \log\beta_\lambda(x+m) -$$

$$-\log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\ldots(2x+2m-2)^{(2x-2m-2)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}(2x+3)^{(2x+3)\lambda}\ldots(2x+2m-1)^{(2x-2m-1)\lambda}}.$$

Cette formule permet de calculer $\log\beta_\lambda(x)$ pour les valeurs de x plus petites que l'unité; il suffit de prendre pour m un entier ni trop petit, ni trop grand.

Si l'on pose, par exemple, $m = 4$, on trouve, eu égard à (43),

$$\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{2}q_\lambda(2) - \frac{1}{2}q_\lambda(2x+8) -$$

$$-\log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}(2x+2)^{(2x+2)\lambda}(2x+4)^{(2x+4)\lambda}(2x+6)^{(2x+6)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}(2x+3)^{2(x+3)\lambda}(2x+5)^{(2x+5)\lambda}(2x+7)^{(2x+7)\lambda}}.$$

Le calcul de dernier terme de cette égalité ne présente pas des grandes difficultés; pour le calcul approché de $q_\lambda(2x+8)$ on peut employer la formule (39_1) dont nous avons déjà indiqué l'usage plus haut.

Sachant la valeur de la constante caractéristique $q_\lambda(2)$, nous obtiendrons la valeur numérique de $\log\beta_\lambda(x)$ pour $x<1$ avec l'approximation suffisante.

Posons, pour exemple. $x=\frac{1}{2}$.

On aura

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_\lambda(2)-\frac{1}{2}q_\lambda(9)+\log\frac{2^{2\lambda}.4^{4\lambda}.6^{6\lambda}.8^{8\lambda}}{1^{1\lambda}.3^{3\lambda}.5^{5\lambda}.7^{7\lambda}}=$$

$$=\frac{1}{2}q_\lambda(2)-\frac{1}{2}q_\lambda(9)+9^\lambda\log 9+\log\beta_\lambda(5).$$

Si l'on pose $\lambda=2$, on trouve (voir n° 33)

$$\log\beta_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_2(2)-\frac{1}{2}q_2(9)+9^2\log 9+\log\beta_2(5)=$$

$$=0{,}2131391994\ldots-100{,}9073484168\ldots+162\log 3-\frac{1}{2}q_2(9).$$

Or [l'égalité (39_2)],

$$\frac{1}{2}q_2(9)=\psi_2(9)\log 9+\frac{1}{2}p_2'(9)+C_3\frac{1}{9}+C_5\frac{2!}{9^3}+C_7\frac{4!}{9^5}+C_9\frac{6!}{9^7}+C_{11}\frac{8!}{9^9}$$

avec une erreur moindre que

$$|C_{13}|\frac{10!}{9^{11}}<0{,}00000000005\ldots\ .$$

Le calcul nous donne

$$162\log 3-\psi_2(9)\log 9=98{,}87510\ 59801\ 29\ldots\ ,$$

$$-\frac{1}{2}p_2(9)=\ 2{,}25\ ,$$

$$-C_5\frac{2!}{9^3}=\ 0{,}00001\ 14311\ 84\ldots\ ,$$

$$-C_9\frac{6!}{9^7}=\ 0{,}00000\ 00064\ 29\ldots\ ,$$

$$+101{,}87510\ 59801\ 29\ldots\ ;$$

$$-\frac{C_3}{9} = -0{,}00462\ 96296\ 29\ldots\,,$$

$$-C_7\frac{4!}{9^5} = -0{,}00000\ 01713\ 66\ldots\,,$$

$$-C_{11}\frac{8!}{9^9} = -0{,}00000\ 00004\ 50\ldots\,,$$

$$-0{,}00462\ 98014\ 45\ldots\,.$$

Par conséquent,

$$162\log 3 - \frac{1}{2}q_2(9) = 101{,}12048\ 76162\ 97\ldots\,,$$

et

$$\log\beta_2\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}21313\ 91994\ldots - 100{,}90734\ 84168\ldots + 101{,}12048\ 76162\ldots =$$

$$= 0{,}42627\ 8988\ldots$$

avec 9 figures exactes.

C'est le même nombre que nous avons déjà trouvé au n⁰ 43 pour $q_2(2)$ [1]).

47. Remplaçons dans (66) $2x$ par x et posons $m = 1$; il viendra

$$2\log v_\lambda(x\,,0) = q_\lambda(x) - q_\lambda(x+2) = 2\log\frac{x^{x\lambda}}{(x+1)^{(x+1)\lambda}}\,,$$

ou

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2\log\frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}}{x^{x\lambda}}\,. \tag{67}$$

Reprenons maitenant l'égalité (40) qui peut s'écrire ainsi:

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x +$$

$$+ p_\lambda(x) - \lambda!\int_0^1 \psi_\lambda(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+z+2k} - \frac{1}{x+z+2k+1}\right)dz.$$

[1]) Nous verrons plus loin qu'on a toujours

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2).$$

De cette égalité on tire, en y remplaçant x par $x+1$,

$$q_\lambda(x+1)=\lambda!\,\psi_\lambda(x+1)\log(x+1)+$$

$$+p_\lambda(x+1)-\lambda!\int_0^1\psi_\lambda(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+z+2k+1}-\frac{1}{x+z+2k+2}\right)dz.$$

On a donc

$$q_\lambda(x+1)+q_\lambda(x)=$$

$$=\lambda!\,[\psi_\lambda(x)\log x+\psi_\lambda(x+1)\log(x+1)]+p_\lambda(x+1)+p_\lambda(x)-$$

$$-\lambda!\int_0^1\psi_\lambda(z)\,\frac{dz}{x+z}. \qquad (68)$$

Considérons l'intégrale du second membre de cette équation. Posons

$$x+z=\xi.$$

On aura

$$\int_0^1\psi_\lambda(z)\frac{dz}{x+z}=\int_x^{x+1}\psi_\lambda(\xi-x)\frac{d\xi}{\xi}. \qquad (69)$$

La formule de Taylor donne

$$\psi_\lambda(-x+\xi)=\psi_\lambda(-x)+\psi'_\lambda(-x)\xi+$$

$$+\psi''_\lambda(-x)\frac{\xi^2}{2!}+\psi^{(3)}_\lambda(-x)\frac{\xi^3}{3!}+\ldots+\psi^{(\lambda-1)}_\lambda(-x)\,\frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}+\frac{\xi^\lambda}{\lambda!}.$$

Or, en vertu de (20) (pour $k=n$),

$$\psi_k(x)=(-1)^k\,\psi_k(1-x), \qquad (k=1,2,\ldots,\lambda)$$

d'où, en échangeant x par $-x$,

$$\psi_k(-x)=(-1)^k\,\psi_k(1+x).$$

Par conséquent,

$$\frac{\psi_\lambda(-x+\xi)}{\xi}=\frac{\psi_\lambda(x+1)}{\xi}-\psi_{\lambda-1}(1+x)+\psi_{\lambda-2}(1+x)\frac{\xi}{2!}-$$

$$-\psi_{\lambda-3}(1+x)\frac{\xi^2}{3!}+\ldots-\psi_1(1+x)\frac{\xi^{\lambda-2}}{(\lambda-1)!}+\frac{\xi^{\lambda-1}}{\lambda!},$$

car, en vertu de (23),

$$\psi_\lambda^{(k)}(1+x) = \psi_{\lambda-k}(1+x).$$

On trouve donc, en tenant compte de (69),

$$\int_0^1 \psi_\lambda(z)\frac{dz}{x+z} = \psi_\lambda(x+1)\log\frac{x+1}{x} + P_\lambda(x)\frac{1}{\lambda!},$$

où l'on a désigné par $P_\lambda(x)$ le polynome suivant (de degré $\lambda - 1$)

$$\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(x) = -\psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x)\frac{(x+1)^2 - x^2}{2.2!} -$$

$$-\psi_{\lambda-3}(1+x)\frac{(x+1)^3 - x^3}{3.3!} + \dots$$

$$-\psi_1(1+x)\frac{(x+1)^{\lambda-1} - x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{(x+1)^\lambda - x^\lambda}{\lambda.\lambda!}. \tag{70}$$

La formule (68) peut s'écrire ainsi

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = \lambda!\,[\psi_\lambda(x) + \psi_\lambda(x+1)]\log x + \Theta_\lambda(x),$$

ou bien, eu égard à (28_2),

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = 2x^\lambda \log x + \Theta_\lambda(x), \tag{71}$$

où l'on a posé

$$\Theta_\lambda(x) = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x).$$

Remplaçons dans (70) x par $x+1$; il viendra

$$q_\lambda(x+2) + q_\lambda(x+1) = 2(x+1)^\lambda \log(x+1) + \Theta_\lambda(x+1).$$

Soustrayant cette égalité et (71) l'une de l'autre, on trouve

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2\log\frac{(x+1)^{(x+1)^\lambda}}{x^{x^\lambda}} + \Theta_\lambda(x+1) - \Theta_\lambda(x),$$

d'où l'on conclut, eu égard à (67),

$$\Theta_\lambda(x+1) - \Theta_\lambda(x) = 0.$$

Cette identité montre que le polynome $\Theta_\lambda(x)$ doit être égal à une constante que nous désignérons par α_λ.

48. Il est aisé de prouver que

$$\alpha_\lambda = 0.$$

On a, en effet, quel que soit le nombre x,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x), \tag{71}$$

d'où, en remplaçant x par $-x$,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1-x) + p_\lambda(-x) - P_\lambda(-x). \tag{72}$$

Or [l'égalité (38)],

$$p_\lambda(x) = -p_\lambda(-x), \qquad p_\lambda(0) = 0.$$

Posant $x=0$ dans (71) et $x=1$ dans (72), on trouve, par conséquent,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1) - P_\lambda(0),$$

$$\alpha_\lambda = -p_\lambda(1) - P_\lambda(-1),$$

d'où

$$2\alpha_\lambda = -[P_\lambda(0) + P_\lambda(-1)].$$

Posons maintenant dans (70) $x=0$; on a

$$\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(0) = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3}\frac{1}{3.3!} + C_{\lambda-5}\frac{1}{5.5!} + \dots +$$
$$+ C_1 \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda.\lambda!},$$

car

$$\psi_{\lambda-2s-1}(1) = -C_{2s+1}, \qquad \psi_{\lambda+2s}(1) = 0.$$

D'autre part, en se rappelant que

$$\psi_{\lambda-2s-1}(0) = C_{2s+1}, \qquad \psi_{\lambda+2s}(0) = 0$$

et en posant dans (70) $x=-1$, on obtient

$$-\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(-1) = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3}\frac{1}{3.3!} + \dots +$$
$$+ C_1 \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda.\lambda!} = \frac{1}{\lambda!}P_\lambda(0).$$

Par conséquent,

$$a_\lambda = 0$$

et l'égalité (71) devient

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = 2x^\lambda \log x. \tag{73}$$

49. Indiquons, en passant, quelques conséquences de l'identité

$$\Theta_\lambda(x) = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x) = 0, \tag{71}$$

que nous venons d'établir.

$\Theta_\lambda(x)$ etant un polynome de degré $(\lambda - 1)$, on trouve

$$\Theta_\lambda(x) = \Theta_\lambda(0) + \Theta'_\lambda(0)\,x + \Theta''_\lambda(0)\,\frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \Theta_\lambda^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \ldots + \Theta_\lambda^{(\lambda-2)}(0)\,\frac{x^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!} + \Theta_\lambda^{(\lambda-1)}(0)\,\frac{x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

où, en vertu de (74),

$$\Theta_\lambda^{(k)}(0) = p_\lambda^{(k)}(1) + p_\lambda^{(k)}(0) - P_\lambda^{(k)}(0). \tag{75}$$

En se rappelant que $C_k = 0$ pour k pair, on peut écrire [l'égalité (38)]

$$p_\lambda(x) = \sum_{j=0}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\,\mu_{\lambda-j-1}\,x^j,$$

d'où

$$p_\lambda^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\mu_{\lambda-j-1}\,j(j-1)\ldots(j-k+1)\,x^{j-k}.$$

On a donc

$$p_\lambda^{(k)}(0) = C_{\lambda-k}\mu_{\lambda-k+1}\,k!, \tag{76}$$

$$p_\lambda^{(k)}(1) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\mu_{\lambda-j-1}\,j(j-1)\ldots(j-k+1). \tag{77}$$

Formons maintenant les dérivées de divers ordres du polynome $P_\lambda(x)$.

Il est aisé de s'assurer que

$$\frac{1}{\lambda!\,k!}P_\lambda^{(k)}(x) = -\psi_{\lambda-k-1}(1+x)\frac{1}{1.(k+1)!} +$$

$$+\psi_{\lambda-k-2}(1+x)\frac{(x+1)^2-x^2}{2.(k+2)!} - \psi_{\lambda-k-3}(1+x)\frac{(x+1)^3-x^3}{3.(k+3)!} +$$

$$+\ldots+(-1)^{k-1}\psi_1(1+x)\frac{(x+1)^{\lambda-k-1}-x^{\lambda-k-1}}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} +$$

$$+(-1)^k\frac{(x+1)^{\lambda-k}-x^{\lambda-k}}{(\lambda-k)\,\lambda!} \tag{78}$$

pour $k=1$, 2, 3.

De cette égalité on tire par différentiation, en tenant compte de (20),

$$\frac{1}{\lambda!\,(k+1)!}P_\lambda^{(k+1)}(x) = -\psi_{\lambda-k-2}(1+x)\frac{1}{1.(k+2)!} +$$

$$+\psi_{\lambda-k-3}(1+x)\frac{(x+1)^2-x^2}{2.(k+3)!} - \psi_{\lambda-k-4}(1+x)\frac{(x+1)^3-x^3}{3.(k+4)!} +$$

$$+\ldots+(-1)^k\psi_1(1+x)\frac{(x+1)^{\lambda-k-2}-x^{\lambda-k-2}}{(\lambda-k-2)(\lambda-1)!} +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{(x+1)^{\lambda-k-1}-x^3}{(\lambda-k-1)\,\lambda!}.$$

Donc l'égalité précédente étant exacte pour $k=1$, 2, 3, elle le sera aussi pour la valeur de k plus grande d'une unité; par conséquent, cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=1, 2, 3, \ldots, \lambda-1$.

Si l'on y pose $x=0$, on trouve

$$\frac{1}{\lambda!\,k!}P_\lambda^{(k)}(0) = \sum_{j=k}^{\lambda-1}(-1)^{j-k}\frac{C_{\lambda-1-j}}{(j+1)!\,(j-k)!}$$

et, eu égard à (75), (76), (77) et (74),

$$\frac{\Theta_\lambda^{(k)}(0)}{k!} = C_{\lambda-k}\mu_{\lambda-k-1} +$$

$$+\sum_{j=k}^{\lambda-1}\left[\frac{C_{\lambda-j}\mu_{\lambda-j-1}\,j(j-1)\ldots(j-k+1)}{k!} - (-1)^{j-k}\frac{C_{\lambda-j-1}\,\lambda!}{(j+1)!\,(j-k)!}\right] = 0.$$

$$(k=0, 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

Moyennant les équations (δ_1) du n° 16 nous obtiendrons les relations correspondantes entre les nombres de Bernoulli.

50. Revenons à l'équation générale (73).

L'égalité (67) du n° 47 donne [1])

$$q_\lambda[2(x+1)] - q_\lambda(2x) = 2\log\frac{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}{(2x)^{(2x)\lambda}},$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (43),

$$\log\frac{\beta_\lambda(x+1)}{\beta_\lambda(x)} = \log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}$$

ou

$$\beta_\lambda(x+1) = \frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}\beta_\lambda(x). \tag{79}$$

Cette équation a lieu, comme l'on voit, pour toutes les valeurs réelles et positives de x.

Pour x un entier elle résulte immédiatement de la définition de β_λ à l'aide du rapport que nous avons désigné plus haut (n^os^ 30 et 31) par $v_\lambda(2, x-2)$.

Si l'on remplace dans (73) $q_\lambda(x)$ par son expression en $\log\beta_\lambda(x)$

$$q_\lambda(x) = q_\lambda(2) - \log\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \log\pi_\lambda - \log\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right),$$

on trouve encore l'équation suivante

$$\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right)\beta_\lambda\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi_\lambda}{x^{x\lambda}}. \tag{80}$$

Posant enfin dans (73) $x=1$, on obtient

$$q_\lambda(2) + q_\lambda(1) = 0.$$

Par conséquent, en vertu de (43),

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2) = \log\pi_\lambda, \tag{81}$$

$$\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \pi_\lambda, \tag{81$_1$}$$

---

[1]) Remarquons, en outre, que cette dernière égalité résulte immédiatement de l'équation (73).

résultat, déjà trouvé au n⁰ 46 par le calcul direct dans le cas particulier de $\lambda = 2$.

Remarquons d'avance qu'il existe encore une relation simple entre $\log \beta_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(1-x)$, mais nous la déduirons plus tard.

51. Passons maintenant au développement des fonctions $q_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(x)$ en séries convergentes.

L'égalité (40) du n⁰ 26 donne

$$q_\lambda(x) = \lambda!\, \psi_\lambda(x) \log x + p_\lambda(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_\lambda^{(k)}(x), \tag{82}$$

où le terme général a l'expression suivante

$$u_\lambda^{(k)}(x) = -\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \left[\frac{1}{x+2k+z} - \frac{1}{x+2k+1+z}\right] dz.$$

Il est évident, d'après ce que nous avons dit au n⁰ 49, que

$$\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+z} =$$

$$= P_\lambda(x+2k) + \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k+1}{x+2k},$$

$$\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+1+z} =$$

$$= P_\lambda(x+2k+1) + \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+2) \log \frac{x+2k+2}{x+2k+1}.$$

On en tire, après des réductions simples,

$$u_\lambda^{(k)}(x) = P_\lambda(x+2k+1) - P_\lambda(x+2k) + \tag{83}$$

$$+ \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k}{x+2k+2} + \log\left(1 + \frac{1}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)^\lambda}.$$

Remplaçons $x+2k+1$ par ξ et posons

$$S_\lambda(\xi) = P_\lambda(\xi) - P_\lambda(\xi - 1).$$

Remarquant que

$$P_\lambda(\xi) = P_\lambda(0) + \xi P'_\lambda(0) + \frac{\xi^2}{2!} P''_\lambda(0) + \ldots +$$

$$+ \frac{\xi^k}{k!} P_\lambda^{(k)}(0) + \ldots + \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P_\lambda^{(\lambda-1)}(0),$$

$$P_\lambda(\xi - 1) = P_\lambda(-1) - \xi P'_\lambda(-1) + \frac{\xi^2}{2!} P''_\lambda(-1) + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{\xi^k}{k!} P_\lambda^{(k)}(-1) + \ldots - \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P_\lambda^{(\lambda-1)}(-1),$$

on trouve

$$S_\lambda(\xi) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{\xi^k}{k!} \left(P_\lambda^{(k)}(0) - (-1)^k P_\lambda^{(k)}(-1) \right).$$

Or, en vertu de (78),

$$P_\lambda^{(k)}(0) + P_\lambda^{(k)}(-1) = 0.$$

Par conséquent,

$$S_\lambda(\xi) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{\lambda-2}{2}} \frac{\xi^{2k}}{2k!} P_\lambda^{(2k)}(0).$$

Désignons par $F_{\lambda,k}$ la constante suivante

$$F_{\lambda,k} = 2\lambda! \left[C_{\lambda-k-1} \frac{1}{(k+1)!} - C_{\lambda-k-2} \frac{1}{2(k+2)!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^k C_1 \frac{1}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} + (-1)^k \frac{1}{(\lambda-k)\lambda!} \right].$$

On aura

$$S_\lambda(x + 2k + 1) = P_\lambda(x + 2k + 1) - P_\lambda(x + 2k) =$$

$$= F_{\lambda,0} + (x + 2k + 1)^2 F_{\lambda,2} + (x + 2k + 1)^4 F_{\lambda,4} + \ldots +$$

$$+ (x + 2k + 1)^{\lambda-2} F_{\lambda,\lambda-2}$$

et, en vertu de (83),

$$u_\lambda^{(k)}(x) =$$

$$= \log e^{S_\lambda(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k}{x+2k+2}\right)^{\lambda!\,\psi_\lambda(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)\lambda}.$$

On trouve donc, eu égard à (82), le développement suivant

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \log e^{S_\lambda(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k}{2+2k+2}\right)^{\lambda!\,\psi_\lambda(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)\lambda},$$

convergent pour toutes les valeurs positives de la variable x.

Le développement de $\log \beta_\lambda(x)$ résulte immédiatement de l'égalité (43).

Posant, en particulier, $\lambda = 0$, nous trouverons

$$\log \beta_0(x) = \log \frac{\pi}{4} - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(2x+2k)(2x+2k+2)}{(2x+2k+1)^2},$$

car

$$\psi_\lambda(x) = 1, \quad p_\lambda(x) = 0, \quad S_\lambda(x) = 0, \quad \lambda! = 1 \qquad \text{pour } \lambda = 0.$$

51. Il faudrait maintenant étudier les propriétés des dérivées de divers ordres ainsi que les relations entre celles-ci et les fonctions primitives $q_\lambda(x)$ [ou $\log \beta_\lambda(x)$] correspondant aux diverses valeurs de l'indice λ, déduire les expressions de $\log \beta_\lambda(x)$ sous la forme de certaines intégrales définies et appliquer les résultats obtenus à la théorie des fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, mais il est préférable de donner d'abord la définition des fonctions $q_\lambda(x)$ [et $\log \beta_\lambda(x)$] correspondant aux valeurs impaires de l'indice λ, ce qui fera l'objet de la seconde partie de mon travail qui paraîtra sous peu de temps. *(A suivre).*

ПЕРІОДИЧЕСКІЯ ФУНКЦІИ.

В. П. Ермакова.

1. Абелевы функціи.

Абелева функція есть мероморфная періодическая функція, причемъ число основныхъ періодовъ вдвое болѣе числа перемѣнныхъ. Напомню вкратцѣ, какъ получаются Абелевы функціи.

Дано нѣкоторое алгебраическое уравненіе съ двумя перемѣнными:

$$F(z, s) = 0. \tag{1}$$

Изъ этого уравненія мы можемъ разсматривать s какъ функцію z. Разсмотримъ интегралъ:

$$\int \varphi(z, s)\, \partial z,$$

въ которомъ подъинтегральная функція выражается раціонально черезъ z и s. Можетъ случиться, что такой интегралъ не обращается въ безконечность для всякаго значенія независимаго перемѣннаго z. Тогда мы имѣемъ такъ называемый интегралъ *перваго рода.*

Число линейно независимыхъ интеграловъ перваго рода всегда конечно, это число называется *рангомъ алгебраическаго уравненія* (1).

Пусть независимые интегралы перваго рода будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s)\partial z, \quad \int \varphi_2(z, s)\partial z, \ldots, \quad \int \varphi_m(z, s)\partial z.$$

Составимъ слѣдующія уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z, s)\, \partial z = x_j. \tag{2}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Изъ этихъ уравненій мы можемъ разсматривать верхніе предѣлы $z_1, z_2, \ldots z_n$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Произвольная алгебраическая симметрическая функція верхнихъ предѣловъ будетъ Абелевой функціей.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи говоря о періодической функціи, мы будемъ подразумѣвать лишь такую функцію, число основныхъ періодовъ которой вдвое болѣе числа перемѣнныхъ.

2. Цѣль изслѣдованія.

Теперь является вопросъ: кромѣ Абелевыхъ функцій, существуютъ ли еще другія періодическія функціи.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ доказать слѣдующую теорему:

Всякая мероморфная функція n перемѣнныхъ, имѣющая $2n$ періодовъ, выражается раціонально черезъ Абелевы функціи.

Послѣ открытія Göpel'емъ и Rosenhain'омъ функцій Θ многихъ перемѣнныхъ возникъ вопросъ: можетъ ли произвольная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами выражаться раціонально черезъ функціи Θ. На первый взглядъ казалось, что нѣтъ, потому что между періодами функцій Θ существуетъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ извѣстныхъ соотношеній. Въ разговорѣ съ Гермитомъ Риманъ въ 1860 году утверждалъ, что эти соотношенія должны существовать между $2n$ періодами всякой функціи n перемѣнныхъ, по крайней мѣрѣ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій. Тоже утверждалъ и Вейерштрасъ на своихъ лекціяхъ. Но ни тотъ, ни другой не дали доказательства [1]). Такое доказательство въ первый разъ было дано Poincaré и Picard'омъ въ замѣткѣ, представленной въ Парижскую Академію Наукъ 3 декабря 1883 года.

Такимъ образомъ изъ указанной замѣтки Poincaré и Picard'а вытекаетъ и изложенная здѣсь теорема. Остается только подъ сомнѣніемъ: выражается ли всякая періодическая функція черезъ Абелевы функціи *раціонально* или *алгебраически*.

Сверхъ того, по краткости изложенія, вышеупомянутая замѣтка доступна лишь небольшому кругу читателей. Вотъ почему я полагаю, что настоящая статья будетъ не безполезна для русскихъ читателей.

---

[1]) См. по этому поводу: Monatsber. d. Berl. Akademie der Wissensch., 1869, p. 855.

Journal für d. reine u. angew. Mathem., Bd. LXXXIX.

Bulletin des Sciences mathém. et astronom., 2-e série, t. VI, 1882. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C. W. Borchardt).

Прим. ред.

3. Особенныя точки функцій.

Чтобы для читателя ничего не оставалось неяснымъ, я долженъ выяснить, что называется мероморфною функціей. Не безполезно также упомянуть о томъ, какія могутъ быть особенныя точки функціи.

Прежде всего я предполагаю, что мы имѣемъ дѣло съ функціей одного перемѣннаго.

Точка $x = a$ называется *полюсомъ* функціи, если функція въ этой точкѣ обращается въ безконечность, но по умноженіи на нѣкоторую цѣлую степень $x - a$ принимаетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля.

Въ такомъ случаѣ функція можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ по цѣлымъ возрастающимъ степенямъ $x - a$, причемъ въ первомъ членѣ $x - a$ войдетъ въ отрицательной степени.

Можетъ случиться, что въ нѣкоторой точкѣ функція можетъ принимать произвольное значеніе, что зависитъ отъ того пути, по которому мы приходимъ въ разсматриваемую точку. Такая точка называется *существенно особенною точкою*. Для примѣра разсмотримъ функцію:

$$e^{\frac{1}{x}}.$$

Покажемъ, что въ точкѣ $x = 0$ эта функція можетъ принимать произвольное значеніе:

$$e^{\frac{1}{x}} = A,$$

Пусть одинъ корень этого уравненія будетъ $x = \alpha$,

$$e^{\frac{1}{\alpha}} = A;$$

тогда всякій другой корень будетъ

$$x = \frac{\alpha}{1 + 2n\pi\alpha i}.$$

Съ возрастаніемъ цѣлаго числа n до безконечности этотъ корень стремится къ нулю.

Точка $x = a$ называется *критическою точкою* функціи, если функція можетъ быть разложена въ рядъ по дробнымъ степенямъ $x - a$.

При обходѣ около критической точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній конечно.

Точка $x = a$ называется *трансцендентною* точкою функціи, если функція въ этой точкѣ принимаетъ опредѣленное значеніе (конечное или безконечное), но не можетъ быть разложена въ рядъ ни по цѣлымъ, ни

по дробнымъ степенямъ $x-a$. Такова точка $x=0$ въ функціи $\log x$. Точка $x=a$ будетъ трансцендентною въ функціи $(x-a)^m$, если показатель m есть число дѣйствительное несоизмѣримое. При обходѣ около трансцендентной точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній безконечно велико [1]).

Функція, не имѣющая конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *голоморфною.*

Такая функція всегда можетъ быть разложена въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $x-a$. Этотъ рядъ сходится для всѣхъ значеній x.

Функція, имѣющая полюсы и не имѣющая другихъ конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *мероморфною;* Вейерштрасъ показалъ, что мероморфная функція всегда можетъ быть выражена отношеніемъ двухъ голоморфныхъ функцій.

Функція, имѣющая конечныя существенно особенныя точки и не имѣющая ни критическихъ, ни трансцендентныхъ точекъ, называется *однозначною* (uniforme, eindeutig).

Функція, имѣющая критическія или трансцендентныя точки, называется *многозначною.*

Положимъ теперь, что мы имѣемъ функцію многихъ перемѣнныхъ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Совокупность частныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ называется точкою функціи. Чтобы опредѣлить характеръ точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, нужно положить:

$$x_1=a_1+h_1 t, \quad x_2=a_2+h_2 t, \ldots x_n=a_n+h_n t,$$

гдѣ $h_1, h_2, \ldots h_n$ произвольныя постоянныя числа. Послѣ такой подстановки функція многихъ перемѣнныхъ обратится въ функцію одного перемѣннаго t.

Остается теперь опредѣлить характеръ точки $t=0$.

4. Приводимость періодическихъ функцій.

Пусть даны три періодическія функціи двухъ перемѣнныхъ съ тѣми же четырьмя періодами:

$$f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2), \quad f_3(x_1, x_2). \tag{3}$$

[1]) Существенно особенная точка можетъ комбинироваться съ критическою точкою и съ трансцендентною точкою. Такъ, если показатель m есть число мнимое, то точка $x=a$ въ функціи $(x-a)^m$ будетъ одновременно и существенно особенной и трансцендентной. Въ функціи $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ точка $x=0$ будетъ и существенно особенной и критической.

Пусть даны еще двѣ періодическія функціи:

$$\varphi_1(x_3\,,\ x_4)\,,\quad \varphi_2(x_3\,,\ x_4). \tag{4}$$

Предположимъ, что эти функціи имѣютъ четыре одинаковые основные періода. Возьмемъ какое нибудь раціональное выраженіе изъ функцій (3) и (4); тогда получимъ періодическую функцію четырехъ перемѣнныхъ:

$$F(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4)\,,$$

съ восьмью періодами. Эта функція обращается въ періодическую функцію двухъ перемѣнныхъ, если вмѣсто x_3 и x_4 подставимъ какія нибудь постоянныя величины.

Теперь четыре независимыя перемѣнныя выразимъ линейно черезъ новыя перемѣнныя:

$$x_j = \alpha_j y_1 + \beta_j y_2 + \gamma_j y_3 + \delta_j y_4.$$
$$(j = 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, 4)$$

Тогда наша функція превратится въ періодическую функцію новыхъ перемѣнныхъ:

$$F(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4) = \Phi(y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ y_4). \tag{5}$$

Сообразно своему составу послѣдняя функція обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ. Если изъ уравненій:

$$\alpha_1 y_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 + \delta_1 y_4 = a_1\,,$$
$$\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 + \delta_2 y_4 = a_2\,,$$

опредѣлимъ двѣ перемѣнныя и подставимъ въ функцію (5), то эта функція превращается въ функцію двухъ перемѣнныхъ съ четырьмя періодами. Отсюда выясняется слѣдующая теорема.

Дана мероморфная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами; выразимъ $n - r$ независимыхъ перемѣнныхъ линейно черезъ остальныя независимыя перемѣнныя и подставимъ въ данную функцію; если послѣ этого данная функція превращается въ періодическую функцію съ $2r$ періодами, то данная функція можетъ быть выражена раціонально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

Точность этой теоремы подлежитъ нѣкоторому сомнѣнію, но это сомнѣніе можетъ быть устранено послѣ теоремы, которая будетъ доказана въ § 7.

Періодическую функцію назовемъ *неприводимою*, если она не можетъ быть выражена раціонально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

5. Неприводимыя рѣшенія періодическихъ уравненій.

Если дана одна періодическая функція, содержащая n перемѣнныхъ, то легко можно составить n независимыхъ функцій съ тѣми же $2n$ періодами. Покажемъ это.

Пусть дана періодическая функція:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ясно, что слѣдующая функція:

$$f(x_1 + a_1, x_2 + a_2, \ldots, x_n + a_n)$$

будетъ также періодическою съ тѣми же періодами. Мы можемъ всегда подобрать $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такъ, чтобы эти функціи были независимы.

Подобнымъ же образомъ имѣемъ еще третью періодическую функцію:

$$f(x_1 + b_1, x_2 + b_2, \ldots, x_n + b_n).$$

Постоянныя $b_1, b_2, \ldots, b_n$ опять можно выбрать такъ, чтобы послѣдняя функція не могла быть выражена черезъ предъидущія.

Продолжая далѣе, мы можемъ составить n независимыхъ періодическихъ функцій.

Положимъ, что мы имѣемъ n мероморфныхъ независимыхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами; приравняемъ эти функціи произвольнымъ постоянымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j. \qquad (6)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Число рѣшеній этихъ уравненій безконечно велико.

Если къ одному рѣшенію прибавимъ какой нибудь періодъ, то получимъ другое рѣшеніе.

Два рѣшенія періодическихъ уравненій назовемъ неприводимыми, если ихъ разность не приводится къ періоду.

Покажемъ, что число неприводимыхъ рѣшеній періодическихъ уравненій (6) конечно, если функціи, стоящія въ первыхъ частяхъ, мероморфны.

Для этой цѣли перейдемъ отъ мнимыхъ величинъ къ дѣйствительнымъ:

$$x_j = \xi_j + \eta_j i, \quad A_j = B_j + C_j i,$$
$$u_j = \varphi_j + \psi_j i.$$

Уравненія (9) превратятся въ слѣдующія:

$$\varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = B_j,$$
$$\psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = C_j. \tag{7}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Первыя части будутъ уже функціями $2n$ дѣйствительныхъ перемѣнныхъ съ $2n$ дѣйствительными періодами. Мы полагаемъ, что *опредѣлитель, составленный изъ элементовъ основныхъ періодовъ не обращается въ нуль.* Если бы этотъ опредѣлитель обратился въ нуль, то періодическая функція была бы невозможна, такъ какъ тогда можно было бы составить такой періодъ, всѣ элементы котораго были бы безконечно малы.

Преобразуемъ перемѣнныя $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ линейно къ новымъ перемѣннымъ: $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$. Коэффиціенты линейнаго преобразованія всегда можно подобрать такъ, чтобы каждый основной періодъ приводился къ увеличенію одного изъ новыхъ перемѣнныхъ на единицу. Такимъ образомъ уравненія (7) превращаются въ слѣдующія:

$$p_j(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = B_j,$$
$$q_j(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = C_j. \tag{8}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Функціи, стоящія въ первой части, не измѣняются, если каждое перемѣнное увеличимъ на единицу.

Мы ищемъ неприводимыя рѣшенія уравненій (8); но каждое такое рѣшеніе при помощи періодовъ можно привести въ такой видъ, чтобы

$$0 < y_j < 1. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Такимъ образомъ *всѣ неприводимыя рѣшенія будутъ заключаться въ конечномъ объемѣ* ($2n$ измѣреній). Еслибъ число неприводимыхъ рѣшеній было безконечно велико, то эти рѣшенія сгущались бы въ нѣкоторой точкѣ. Но въ такомъ случаѣ эта точка была бы существенно особенной точкой, по крайней мѣрѣ для одной изъ періодическихъ функцій. Но мероморфныя функціи не имѣютъ существенно особенныхъ точекъ.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе.

Число неприводимыхъ рѣшеній уравненій (6) всегда конечно.

Съ измѣненіемъ постоянныхъ $B_1, \ldots, B_n$, $C_1, \ldots, C_n$ измѣняются и рѣшенія уравненій (8). Эти рѣшенія, какъ показано выше, заключаются въ конечномъ объемѣ, слѣдовательно ни одно изъ перемѣнныхъ не обратится въ безконечность. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

Уравненія (6) всегда имѣютъ конечныя рѣшенія, каковы бы ни были числа A_1, $A_2, \ldots, A_n$, стоящія во вторыхъ частяхъ уравненій.

6. Зависимость между періодическими функціями.

Пусть имѣемъ $n+1$ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$
$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Между этими функціями должна существовать зависимость:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{10}$$

Нужно доказать, что эта зависимость будетъ алгебраическая относительно каждой функціи.

Для этой цѣли n какихъ нибудь изъ данныхъ функцій приравняемъ произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j. \tag{11}$$
$$(j=1,2,\ldots,n)$$

Было показано, что число неприводимыхъ рѣшеній этихъ уравненій конечно; пусть это число равно m.

Подставивъ эти рѣшенія въ функцію v, найдемъ для этой послѣдней функціи только m значеній.

Итакъ, произвольной системѣ значеній u_1, $u_2, \ldots, u_n$ соотвѣтствуетъ m значеній v. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (10) относительно v будетъ алгебраическое степени m. Сказанное распространяется на каждую функцію. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Между $n+1$ мероморфными функціями n перемѣнныхъ, имѣющими $2n$ періодовъ, существуетъ зависимость, алгебраическая относительно каждой функціи.

Если число неприводимыхъ рѣшеній уравненій (11) равно m, то уравненіе (10) будетъ, какъ показано выше, степени m относительно v. Можетъ ли это уравненіе имѣть кратные корни относительно v?

Положимъ, что уравненіе (10) имѣетъ кратные корни относительно v. Въ такомъ случаѣ кратные корни должны удовлетворять алгебраическому уравненію низшей степени:

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{12}$$

Но такъ какъ между функціями (9) существуетъ только одна зависимость, то уравненія (10) и (12) должны имѣть одинаковые корни, что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда уравненіе (10) можетъ быть представлено въ формѣ:

$$F_1^\mu = 0.$$

Каждый корень этого уравненія будетъ кратный, и степень кратности будетъ одна и та же, равна μ, причемъ μ должно быть дѣлителемъ числа m. Сказанное обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только при частномъ выборѣ функціи v. Вообще же всегда можно выбрать функцію v такъ, чтобы уравненіе (10) не имѣло кратныхъ корней.

Функціи (9) назовемъ основными, если уравненіе (10) не имѣетъ кратныхъ корней.

7. Раціональное выраженіе періодической функціи черезъ основныя функціи.

Возьмемъ n независимыхъ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

Приравняемъ эти функціи произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j. \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Положимъ, что число неприводимыхъ рѣшеній этихъ уравненій равно m. Подставимъ эти рѣшенія въ двѣ другія періодическія функціи, имѣющія тѣ же періоды, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для каждой функціи получимъ m значеній:

$$v_1, v_2, \ldots, v_m,$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_m. \tag{14}$$

Эти значенія будутъ корнями двухъ алгебраическихъ уравненій:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0, \qquad F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, w) = 0.$$

Мы можемъ, какъ сказано выше, подобрать функцію v такъ, чтобы ея m значеній были различны.

Составимъ теперь слѣдующую функцію:

$$\Phi(t) = (t - v_1)(t - v_2) \ldots (t - v_m).$$

Эта функція симметрична относительно корней (14), а потому коэффиціенты при каждой степени t выражаются раціонально черезъ функціи (13).

Составимъ далѣе слѣдующую симметрическую функцію корней (14):

$$\Phi(t)\left(\frac{w_1}{t - v_1} + \frac{w_2}{t - v_2} + \ldots + \frac{w_m}{t - v_m}\right) = \Theta(t). \tag{15}$$

Коэффиціенты этой функціи также выражаются раціонально черезъ функціи (13).

Въ равенствѣ (15) t произвольно; положимъ $t = v_j$. Такъ какъ между значеніями функціи v нѣтъ равныхъ, то получимъ:

$$\Phi'(v_j)\, w_j = \Theta(v_j),$$

откуда

$$w_j = \frac{\Theta(v_j)}{\Phi'(v_j)}.$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній j отъ 1 до m; поэтому проще можно написать такъ:

$$w = \frac{\Theta(v)}{\Phi'(v)}.$$

Во второй части, какъ показано выше, входятъ раціонально функціи (13). Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

Всякая мероморфная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами выражается раціонально черезъ $n+1$ основныхъ функцій.

8. Дифференціальныя уравненія періодическихъ функцій.

Возьмемъ систему $n+1$ основныхъ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Между этими функціями существуетъ алгебраическая зависимость:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{17}$$

Было показано, что каждая періодическая функція, имѣющая тѣ же періоды, какъ и функціи (16), выражается раціонально черезъ функціи (16). Отсюда слѣдуетъ, что частныя производныя функцій (16) должны выражаться раціонально черезъ тѣ же функціи; положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = P_{jk}.$$

Вторая часть послѣдняго уравненія должна быть раціональною функціей $u_1, u_2, \ldots, u_n, v$.

Такимъ образомъ, должны имѣть мѣсто дифференціальныя уравненія:

$$\partial u_j = P_{j1}\partial x_1 + P_{j2}\partial x_2 + \ldots + P_{jn}\partial x_n. \quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{18}$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно $\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n$, получимъ:

$$Q_{j1}\partial u_1 + Q_{j2}\partial u_2 + \ldots + Q_{jn}\partial u_n = \partial x_j. \quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{19}$$

Въ этихъ уравненіяхъ коэффиціенты Q_{jk} должны выражаться раціонально черезъ функціи (16).

Выраженія въ первыхъ частяхъ уравненій (13) должны быть полными дифференціалами; поэтому мы можемъ перейти къ интеграламъ:

$$\int (Q_{j1}\partial u_1 + Q_{j2}\partial u_2 + \ldots + Q_{jn}\partial u_n) = x_j. \quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{20}$$

Всѣ эти интегралы берутся отъ постоянной точки до перемѣнной $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Покажемъ, что ни одинъ изъ интеграловъ (20) не обращается въ безконечность ни при какихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Допустимъ, что одинъ изъ интеграловъ (20) обращается въ безконечность, когда $u_1 = a_1, u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$; тогда одно изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, u_n$ обязательно обращается въ безконечность. Въ такомъ случаѣ уравненія:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

не имѣютъ конечныхъ рѣшеній, что противорѣчитъ доказанному въ концѣ §-а 5-ого.

Интегралы, которые не обращаются въ безконечность при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, принято называть *интегралами перваго рода.*

Въ уравненіяхъ (20) съ измѣненіемъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ измѣняются перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и обратно. Станемъ непрерывно измѣнять перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ къ этимъ перемѣннымъ прибавились элементы какого нибудь періода функцій (16). Въ такомъ случаѣ перемѣнныя $u_1, u_2, \ldots, u_n$, описавъ *замкнутый циклъ*, возвратятся къ своимъ прежнимъ значеніямъ. Отсюда заключаемъ, что должны существовать $2n$ основныхъ цикловъ; интегралы (20), взятые по этимъ цикламъ, превращаются въ такъ называемые *модули періодичности,* т. е. въ элементы основныхъ періодовъ функцій (16). Произвольный замкнутый циклъ можетъ быть приведенъ къ комбинаціи основныхъ цикловъ. Интегралы (20), взятые по произвольному циклу, выразятся линейно черезъ элементы основныхъ періодовъ функцій (16); коэффиціенты въ этихъ выраженіяхъ будутъ цѣлыми числами.

Разсмотримъ такой замкнутый циклъ, когда измѣняется только одно перемѣнное u_1, всѣ же остальныя перемѣнныя не измѣняются,

$$u_2 = a_2, \; u_3 = a_3, \ldots, u_n = a_n.$$

Тогда уравненіе (17) приводится къ слѣдующему:

$$F(u_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, v) = 0. \tag{21}$$

Интегралы (20) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\int Q_{11} \partial u_1, \quad \int Q_{21} \partial u_1, \ldots, \int Q_{n1} \partial u_1. \tag{22}$$

Все это интегралы перваго рода.

Предположимъ, что между интегралами (22) нѣтъ линейной зависимости съ постоянными коэффиціентами; въ такомъ случаѣ рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n. Пусть

$$Q_{j1} = \varphi_j(u_1, v).$$

Подставимъ z вмѣсто u_1 и s вмѣсто v. Уравненіе (21) будетъ:

$$F(z, a_2, a_3, \ldots, a_n, s) = 0. \tag{23}$$

Интегралы (22) будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s)\partial z, \quad \int \varphi_2(z, s)\partial z, \ldots, \int \varphi_n(z, s)\partial z. \tag{24}$$

Это интегралы перваго рода; поэтому мы можемъ составить Абелевы функціи, какъ показано въ § 1. Для этой цѣли пишемъ уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z, s)\partial z = x_j. \tag{25}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Алгебраическія симметрическія функціи верхнихъ предѣловъ будутъ Абелевыми функціями.

Между этими функціями выберемъ $n+1$ основныхъ функцій и обозначимъ ихъ черезъ

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{26}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Періоды этихъ послѣднихъ функцій будутъ комбинаціями основныхъ періодовъ функцій (16). Отсюда слѣдуетъ, что каждый періодъ функцій (26) будетъ періодомъ и функцій (16); но въ такомъ случаѣ функціи (16), какъ доказано въ § 7, выражаются раціонально черезъ функціи (26). Это и нужно было доказать.

Мы доказали, что періодическія функціи (16) выражаются раціонально черезъ Абелевы функціи (26). Но при этомъ доказательствѣ мы предполагали, что рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n.

Предположимъ, что рангъ уравненія (23) меньше n. Въ такомъ случаѣ должна существовать одна или нѣсколько зависимостей формы:

$$a_1\varphi_1(z, s) + a_2\varphi_2(z, s) + \ldots + a_n\varphi_n(z, s) = 0.$$

Тогда изъ уравненій (25) найдемъ одну или нѣсколько зависимостей формы:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = a. \qquad (27)$$

Если мы примемъ во вниманіе только независимые интегралы (24), то въ результатѣ получимъ Абелевы функціи съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ и періодовъ. Черезъ такія Абелевы функціи опять могутъ быть выражены функціи (16), но лишь при томъ условіи, что между перемѣнными существуютъ зависимости (27). Здѣсь мы имѣемъ случай приводимости, указанной въ §-ѣ 4-омъ, когда функціи (16) могутъ быть выражены раціонально черезъ функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ. Но въ такомъ случаѣ мы прежде всего выразимъ функціи (16) раціонально черезъ неприводимыя функціи, а эти послѣднія въ свою очередь можемъ выразить черезъ Абелевы функціи. Такимъ образомъ теорема §-а 2-ого доказана.

КЪ ТЕОРІИ КОННЕКСОВЪ.

[Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)].

Д. М. Синцова.

§ I.

Общія понятія о конфигураціяхъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

1. Принимая за основной элементъ не точку, прямую или плоскость трехмѣрнаго (Евклидова) пространства въ отдѣльности, а сочетаніе изъ всѣхъ этихъ трехъ основныхъ элементовъ пространства, получаемъ всего ∞^{10} различныхъ элементовъ: каждая изъ ∞^3 точекъ можетъ быть соединена въ элементъ конфигураціи съ каждою изъ ∞^4 прямыхъ и ∞^3 плоскостей: пространство является поэтому многообразіемъ *десяти* измѣреній, притомъ квадратичнаго характера, потому что шесть однородныхъ координатъ p_{ik} прямой связаны уравненіемъ

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Такимъ образомъ разсматриваемое многообразіе можетъ быть отображено не въ плоскомъ многообразіи 10 измѣреній, а выдѣлено изъ плоскаго многообразія 11 измѣреній квадратичнымъ соотношеніемъ между 11 координатами.

Налагая на элементъ (x, p, u) одно простое условіе выдѣляемъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ совокупность ∞^9 элементовъ, налагая два простыхъ условія выдѣлимъ ∞^8 элементовъ и т. д.

Обращаемся сначала къ конфигураціи, выдѣляемой однимъ условіемъ. Пусть связь, налагаемая этимъ условіемъ, выражается аналитически однимъ уравненіемъ между координатами точки x, прямой p и плоскости u элемента (x, p, u):

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4;\quad p_{12} p_{13} \ldots p_{34};\quad u_1 u_2 u_3 u_4) = 0 \tag{1}$$

однороднымъ въ отдѣльности относительно x_i, относительно p_{ik} и относительно u_s. Такую совокупность ∞^9 элементовъ будемъ называть *коннексомъ* (x, p, u).

Характеризовать эту конфигурацію можно такъ. Беремъ какую-нибудь точку x_0 пространства. Можетъ случиться что подстановка ея координатъ въ уравненіе (1) обратитъ его въ тождество; тогда всякая прямая и всякая плоскость составятъ вмѣстѣ съ такою точкою элементъ (x_0, p, u), удовлетворяющій уравненію (1). Такую точку будемъ называть *основною точкою* коннекса.

Такъ если (1) приводится къ виду:

$$\varphi_1(x_1 x_2 x_3 x_4) f_1(x, p, u) +$$

$$+ \varphi_2(x_1 x_2 x_3 x_4) f_2(x, p, u) + \varphi_3(x_1 \ldots x_4) f_3(x, p, u) = 0$$

то основными точками будутъ точки пересѣченія поверхностей

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

Такія точки могутъ составлять цѣлую кривую,—напримѣръ въ коннексѣ вида:

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_4) f_1(x, p, u) + \varphi_2(x_1 \ldots x_4) f_2(x, p, u) = 0,$$

основными точками будутъ всѣ точки кривой

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0.$$

Основныя точки могутъ составить и поверхность, если уравненіе (1) распадается на два множителя, изъ которыхъ одинъ содержитъ только координаты x:

$$\varphi(x_1 \ldots x_4)\; f_1(x, p, u) = 0.$$

Въ частности уравненіе поверхности

$$f(x_1 \ldots x_4) = 0$$

можетъ быть разсматриваемо какъ уравненіе коннекса (x, p, u): каждая точка этой поверхности можетъ быть соединена съ каждою прямой и съ каждою плоскостью пространства и будетъ основною точкою, точки же, не лежащія на поверхности, не даютъ ни одного элемента.

Такимъ образомъ основная точка даетъ начало ∞^7 элементовъ.

Вообще говоря, однако, подстановка координатъ точки x_0 въ уравненіе (1), не обращаетъ его въ тождество, а даетъ уравненіе между коорди-

натами прямой и координатами плоскости, т. е. опредѣляетъ ∞^6 сочетаній (p, u), образующихъ коннексъ съ элементомъ (прямая, плоскость), который будемъ называть коннексомъ (p, u), принадлежащимъ точкѣ x_0, и обозначать $K_{x_0}(p, u)$.

Такіе коннексы имѣютъ въ свою очередь основныя прямыя и основныя плоскости, и слѣдовательно, если въ добавокъ къ точкѣ x_0 мы возьмемъ какую-нибудь прямую p_0, то можетъ случиться, что уравненіе (1) при такой подстановкѣ:

$$f(x_0, p_0, u) = 0,$$

обратится въ тождество независимо отъ значеній кординатъ $u_1 \dots u_4$. Примѣромъ можетъ послужить коннексъ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\varphi_1(x, p) f_1(x, p, u) + \\ + \varphi_2(x, p) f_2(x, p, u) + \dots + \varphi_7(x, p) f_7(x, p, u) = 0,$$

которое удовлетворяется независимо отъ значеній u всѣми сочетаніями (x, p), удовлетворяющими уравненіямъ

$$\varphi_1(x, p) = 0, \qquad \varphi_2(x, p) = 0 \ \dots \ \varphi_7(x, p) = 0.$$

Эти семь уравненій опредѣляютъ сочетанія (x, p) пересѣченія 7 коннексовъ съ элементомъ (точка, прямая), и число такихъ сочетаній (если φ_i напр. алгебраическія функціи между собою различныя) конечно. Подобныя сочетанія (точка, прямая), можно также называть *основными сочетаніями* (x, p) коннексовъ (1). Каждая основная точка $x_{осн}$ даетъ начало ∞^4 основныхъпаръ $(x_{осн}, p)$, гдѣ p любая прямая.

Если же взятыя точка и прямая не составляютъ основного сочетанія (x, p), то (1) сводится при подстановкѣ координатъ точки и прямой къ уравненію между координатами плоскости и слѣдовательно опредѣляетъ ∞^2 плоскостей, огибающихъ нѣкоторую поверхность,—только касательныя къ этой поверхности плоскости составляютъ элементъ коннекса (1) вмѣстѣ съ взятыми точкою и плоскостью. Эту поверхность можно называть поверхностью, принадлежащею въ коннексѣ (1) взятымъ прямой и точкѣ. Будемъ обозначать ее U_{xp}.

Такимъ образомъ если (x, p) есть основное сочетаніе, то въ коннексѣ (1) имѣется ∞^3 элементовъ, въ составъ которыхъ она входитъ, если же (x, p) обыкновенная (не основная), то ∞^2.

Подобнымъ образомъ придемъ къ представленію объ *основныхъ прямыхъ* и *основныхъ плоскостяхъ* и объ *основныхъ сочетаніяхъ* (p, u) и (x, u),

причемъ основная прямая даетъ начало ∞^3 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (p, u) и основная плоскость ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u) и ∞^4 основныхъ сочетаній (p, u), основная точка — ∞^4 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u).

Если сочетаніе (p, u) не основное, то ему принадлежитъ точечная поверхность X_{up}, неосновному сочетанію (x, u) комплексъ P_{xu}, прямой вообще коннексъ $K_p(x, u)$ съ элементомъ (точка, плоскость), плоскости (не основной)—коннексъ $K_u(x, p)$ съ элементомъ (точка, прямая).

Если (1) алгебраическое раціональное степени m относительно x_i, степени r относительно p_{ik} и степени n относительно u_i, то X_{pu} есть поверхность порядка m, P_{xu} — комплексъ ранга r и U_{xp} — поверхность класса n. Числа m, r, n называемъ соотвѣтственно порядкомъ, рангомъ и классомъ коннекса (1).

2. Коинциденція. Элементы общіе двумъ коннексамъ (2)

$$f(x, p, u) = 0 \qquad f_1(x, p, u) = 0$$

(выдѣляемые двумя условіями)—ихъ всего ∞^8—образуютъ *коинциденцію* (*простую* въ отличіе отъ дальнѣйшихъ, или просто коинциденцію). Здѣсь каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція прямыхъ (какъ и въ послѣдующемъ мы употребляемъ терминъ „принадлежитъ" въ томъ смыслѣ, что каждая прямая конгруэнціи дополняетъ (x, u) до элемента (x, p, u) коинциденціи) ранга rr', если данные коннексы суть

$$(m, r, n) \text{ и } (m', r', n').$$

Каждому сочетанію (x, p) принадлежитъ развертывающаяся класса nn' и каждому сочетанію (p, u) — кривая двоякой кривизны порядка mm'. Далѣе коинциденція содержитъ $mn' + nm'$ элементовъ, которыхъ прямая задана, точка лежитъ на нѣкоторой другой данной прямой и плоскость проходитъ черезъ какую нибудь третью данную прямую; она содержитъ $mr' + rm'$ элементовъ, которыхъ плоскость задана, прямая принадлежитъ данному пучку, и точка лежитъ на данной прямой, и $rn' + nr'$ элементовъ которыхъ точка есть данная, плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и прямая принадлежитъ данному пучку. Иначе говоря, въ коинциденціи (2) каждой точкѣ x пространства принадлежитъ коинциденція (p, u) съ характеристиками

$$(rr', nr' + rn', nn') —$$

пересѣченіе двухъ коннексовъ (p, u):

$$(r, n) \text{ и } (r', n'),$$

прямой p принадлежитъ вообще коинциденція (x, u)—пересѣченіе двухъ коннексовъ (x, u), одного порядка m и класса n, другого порядка m' и класса n'; характеристики этой коинциденціи (x, u) будутъ слѣдовательно:

$$mm', \quad mn' + nm' \quad \text{и} \quad rn'.$$

Наконецъ плоскости u принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, p), какъ пересѣченіе двухъ коннексовъ съ элементомъ (x, p), имѣющая характеристическія числа

$$mm', \quad mr' + rm', \quad rr'.$$

2a. Вышеприведенныя характеристическія числа получаются непосредственно изъ разсмотрѣнія уравненій, какъ числа элементовъ удовлетворяющихъ тѣмъ или другимъ условіямъ, поставленнымъ выше. Для разсмотрѣнія двухъ простѣйшихъ въ алгебраическомъ отношеніи конфигурацій это не представляетъ затрудненій. Но уже начиная съ конфигураціи опредѣляемой какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p, u) получаются въ числѣ характеристикъ такія, которыя даютъ количество элементовъ (x, p, u) конфигураціи, удовлетворяющихъ условіямъ, наложеннымъ одновременно и на точку и на прямую и на плоскость элемента: такія характеристики такимъ образомъ не сводятся къ характеристикамъ конфигурацій съ болѣе простыми элементами, которыя получаемъ предполагая что точка, прямая или плоскость элемента заданы. Хотя и эти числа могутъ быть получаемы изъ чисто-алгебраическихъ соображеній, но удобно примѣнить для систематическаго вывода ихъ пріемы энумеративной геометріи.

Именно, можно условіе принадлежать данному коннексу (m, r, u)— условіе простое—выразить равенствомъ:

$$\xi_1 = \alpha . p + \beta . g + \gamma . e$$

гдѣ p — условіе для точки лежитъ въ данной плоскости, g — условіе для прямой встрѣчать данную прямую, и e — простое же условіе для плоскости проходить черезъ данную точку. Наложивъ на элементъ (x, p, u) добавочное девятерное условіе: точка x должна лежать на данной прямой, прямая и плоскость должны быть даны, находимъ:

$$\xi_1 p^2 . G . e^3 = \alpha . p^3 . G . e^3 + \beta . p^2 . gG . e^3 + \beta . p^2 . Ge^4$$

и такъ какъ

$$G = 1, \quad e^3 = p^3 = 1, \quad gG = 0, \quad e^4 = 0,$$

$$\xi_1 p^2 G e^3 = \alpha .$$

Но мы можемъ число элементовъ, удовлетворяющихъ этому условію получить чисто алгебраически,—оно равно числу элементовъ, которые при данныхъ p_{ik} и u_i удовлетворяютъ (1) и уравненіямъ

$$\sum A_i x_i = 0\,,\quad \sum B_i x_i = 0\quad (A_i \text{ и } B_i\text{—постоянныя}).$$

Эти уравненія, если (1) порядка m относительно x, имѣютъ m общихъ рѣшеній, слѣдовательно $\alpha = m$.

Точно также найдемъ $\beta = r$, $\gamma = n$, и простое условіе принадлежать данному коннексу (1) выразится

$$\xi_1 = m.p + r.g + n.e.$$

Отсюда для коинциденціи (2)—пересѣченія двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n') получимъ аналогичный символъ,—двойное условіе для (x, p, u) принадлежать тому и другому коннексу одновременно выразится произведеніемъ условій принадлежности элемента каждому изъ нихъ въ отдѣльности:

$$\xi_2 = \xi_1 . \xi_1' = (m.p + r.g + n.e)(m'.p + r'.g + n'.e) =$$
$$= mm'.p^2 + (mr' + rm').pg + (mn' + nm')pe + rr'.g^2 +$$
$$+ (nr' + rn')ge + nn'.e^2.$$

Предполагая, что прямая и плоскость даны, накладываемъ семерное условіе $G.e^3$, получимъ слѣдовательно ∞' элементовъ, и можно еще добавить одно условіе для точки лежать въ данной плоскости u; такимъ образомъ:

$$\xi_2 . pGe^3 = mm'$$

что и выражаетъ высказанное выше: если прямая и плоскость даны, то точекъ x заключается въ каждой плоскости mm' — всѣ эти точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка mm' и т. д.

Но коинциденція можетъ и не составлять полнаго пересѣченія двухъ коннексовъ (x, p, u). Тогда для опредѣленія нужно знать всѣ ея характеристики. Условіе (двойное) принадлежать коинциденціи напишемъ вообще:

$$\xi_2 = \alpha_{200}p^2 + \alpha_{110}pg + \alpha_{101}pe + \alpha_{020}g^2 + \alpha_{011}ge + \alpha_{002}e^2$$

или сокращенно:

$$\xi_2 = \sum \alpha_{ikl} p^i g^k e^l$$

причемъ i, k, l цѣлыя положительныя числа или нули, подчиненныя условію

$$i + k + l = 2.$$

Здѣсь слѣдовательно, $(\alpha_{200}, \alpha_{101}, \alpha_{002})$ характеристики коинциденціи (x, u), принадлежащей данной прямой, $(\alpha_{200}, \alpha_{110}, \alpha_{020})$—характеристики коинциденціи (x, p), принадлежащей данной плоскости, $(\alpha_{020}, \alpha_{011}, \alpha_{002})$—характеристики коинциденціи (p, u), принадлежащей по (2) данной точкѣ.

3. Двойная коинциденція. Совокупность ∞^7 элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ, можно, какъ и въ коннексахъ съ элементомъ (точка, плоскость), назвать *бикоинциденціей*. Но здѣсь явится надобность разсматривать еще элементы общіе 4, 5 и т. д.коннексамъ (x, p, u). Поэтому будемъ называть совокупность элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ $(m, r, n,)$ (m', r', n'), (m'', r'', n''):

$$f(x, p, u)=0, \qquad f_1(x, p, u)=0, \qquad f_2(x, p, u)=0$$

и всякую вообще совокупность ∞^7 элементовъ (x, p, u) *двойною коинциденціею.*

Каждому сочетанію (p, u) здѣсь принадлежитъ $mm'm''$ точекъ пересѣченія поверхностей

$$X_{pu}, X'_{pu}, X''_{pu},$$

принадлежащихъ (p, u) въ коннексахъ

$$f=0, f_1=0, f_2=0;$$

каждому сочетанію (x, p) — $nn'n''$ плоскостей—общихъ касательныхъ поверхностей

$$U_{xp}, U'_{xp}, U''_{xp}$$

тѣхъ же коннексовъ. Наконецъ каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность ранга $2rr'r''$, образуемая прямыми, общими тремъ комплексамъ

$$P_{xu}, P'_{xu}, P''_{xu},$$

принадлежащимъ (x, u) въ тѣхъ же трехъ коннексахъ.

Плоскости u принадлежитъ бикоинциденція сочетаній (x, p), какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p) съ характеристиками

$$(mm'm'', \sum mm'r'', \sum mr'r'', 2rr'r'').$$

Изъ числа этихъ характеристикъ двѣ уже встрѣчены выше; изъ двухъ остальныхъ первая означаетъ число элементовъ (x, p), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а прямая принадлежитъ данному пучку, и слѣдовательно, можетъ быть также истолкована какъ порядокъ кривой двоякой кривизны, принадлежащей прямымъ даннаго пучка, или какъ рангъ комплекса прямыхъ, составляющихъ сочетанія (x, p) взятой бико-

инциденціи съ точками данной плоскости; вторая означаетъ число сочетаній (x, p), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, а прямая лежитъ въ данной плоскости или проходитъ черезъ данную точку, и слѣдовательно можетъ быть также истолкована, какъ порядокъ поверхности, образуемой точками, дополняющими до сочетанія разсматриваемой бикоинциденціи прямыя данной связки или даннаго поля, или же какъ рангъ конгруэнціи прямыхъ, дополняющихъ до сочетанія той же бикоинциденціи точки данной прямой. Зададимся далѣе прямою p; ей принадлежитъ бикоинциденція (∞^3) сочетаній (точка x, плоскость u) съ характеристиками:

$$(mm'm'', \sum mm'n'', \sum mn'n'', nn'n'')$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ порядокъ поверхности, точки которой составляютъ сочетаніе этой бикоинциденціи съ плоскостями данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, касательныя къ которой составляютъ сочетаніе бикоинциденціи съ точками данной прямой; третье—порядокъ кривой двоякой кривизны, точки которой составляютъ сочетаніе бикоинциденціи съ плоскостями даннаго пучка, и порядокъ поверхности, касательныя которой соединяются въ сочетаніе бикоинциденціи съ точками даннаго точечнаго поля. Данной точкѣ принадлежитъ въ двойной коинциденціи (3) бикоинциденція сочетаній (p, u) съ характеристиками

$$(2rr'r'', \sum nr'r'', \sum nn'r'', nn'n'');$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ число сочетаній (p, u), которыхъ прямая принадлежитъ данной связкѣ или данному полю, а плоскость—данному пучку, и слѣдовательно, означаетъ также классъ поверхности, принадлежащей прямымъ данной связки или поля, и рангъ конгруэнціи, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка; $\sum nn'r''$ означаетъ подобнымъ образомъ число сочетаній (p, u), которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, а плоскости—данной связкѣ, и слѣдовательно, есть рангъ комплекса, принадлежащаго плоскостямъ данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, принадлежащей прямымъ даннаго пучка.

Кромѣ перечисленныхъ характеристикъ, остается упомянуть еще объ одной, которую нельзя получить, предполагая данными точку, прямую или плоскость элемента (x, p, u) разсматриваемой двойной коинциденціи. Это число ея элементовъ (x, p, u), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, прямая принадлежитъ данной связкѣ или полю, и плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Число это равно для двойной коинциденціи (3) $\sum mr'n''$.

Условіе (тройное) принадлежать данной двойной бикоинциденціи можетъ быть изображено такъ:

$$\S_3 = \beta_{300} \cdot p^3 + \beta_{210} p^2 g + \beta_{201} p^2 e + \beta_{120} p g^2 + \beta_{111} p g e + \beta_{102} p e^2 + \beta_{030} g^3 +$$
$$+ \beta_{021} g^2 e + \beta_{012} g e^2 + \beta_{003} e^3 = \sum \beta_{ikl} p^i g^k e^l$$

(гдѣ $i + k + l = 3$ и i, k, l равны или болѣе 0 и не болѣе 3).

Если какъ выше было взято, двойная коинциденція опредѣляется, какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ

$$(m, r, n), \ (m', r', n') \text{ и } (m'', r'', n''),$$

то

$$\beta_{300} = mm'm'', \ \beta_{210} = \sum mm'r'', \ \beta_{201} = \sum mm'n'', \ \beta_{120} = \sum mr'r'',$$
$$\beta_{111} = \sum mr'n'', \ \beta_{102} = \sum mn'n'', \ \beta_{030} = rr'r'', \ \beta_{021} = \sum nr'r'',$$
$$\beta_{012} = \sum nn'r'', \ \beta_{003} = nn'n''.$$

Двойная коинциденція можетъ быть также задана, какъ пересѣченіе нѣкоторой простой коинциденціи съ характеристиками (α_{200}, α_{110}, ...) и коннекса (m, r, n). Тогда для нея характеристики выразятся такъ:

$$\beta_{300} = m\alpha_{210}; \ \beta_{210} = m\alpha_{110} + r\alpha_{200}; \ \beta_{201} = m\alpha_{101} + n\alpha_{200};$$
$$\beta_{120} = m\alpha_{020} + r\alpha_{110}; \ \beta_{111} = m\alpha_{011} + r\alpha_{101} + n\alpha_{110}; \ \beta_{102} = m\alpha_{002} + n\alpha_{101};$$
$$\beta_{030} = r\alpha_{020}; \ \beta_{021} = r\alpha_{011} + n\alpha_{020}; \ \beta_{012} = r\alpha_{002} + n\alpha_{011}; \ \beta_{003} = n\alpha_{002}.$$

4. **Тройная коинциденція.** Четверное условіе, наложенное на элементы (x, p, u), выдѣляетъ совокупность ∞^6 такихъ элементовъ, которую мы назовемъ тройною коинциденціею. Она можетъ быть получена, какъ пересѣченіе четырехъ коннексовъ, или двухъ простыхъ коинциденцій или двойной коинциденціи съ коннексомъ или составлять неполное пересѣченіе одного изъ указанныхъ типовъ.

Мы можемъ произвольно взять прямую p. Ей принадлежитъ пара (точечная поверхность, плоскостная поверхность),—точки одной и плоскости, касательныя ко второй, находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи. Если тройная коинциденція опредѣляется четырьмя коннексами

$$(m, r, n), \quad (m', r', n'), \quad (m'', r'', n''), \quad (m''', r''', n'''),$$

то порядокъ первой

$$\sum mn'n''n''',$$

класс второй

$$\sum mm'm''n''';$$

число сочетаній (точка, плоскость), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку (иными словами порядокъ кривой, принадлежащей въ этой паръ данной связкѣ или классъ развертывающейся, которой касательныя составляютъ сочетаніе пары съ точками даннаго поля) есть

$$\sum mm'n''n'''.$$

Прямымъ даннаго пучка принадлежитъ бикоинциденція съ характеристиками

$$(\sum rn'n''n''', \sum mr'n''n''', \sum mm'r''n''', \sum mm'm''r''')$$

прямымъ данной связки—коинциденція сочетаній (точка, плоскость) съ характеристиками

$$(\sum mm'r''r''', \sum mn'r''r''', \sum nn'r''r'''),$$

наконецъ если прямыя элемента (x, p, u) должны встрѣчать данную прямую, то сочетанія (x, u), соединяемыя съ этими прямыми, образуютъ коннексъ (∞^5) сочетаній (x, u) порядка

$$2\sum mr'r''r'''$$

и класса

$$2\sum nr'r''r'''.$$

Если зададимся точкою и прямою элемента, то такихъ элементовъ въ тройной коинциденціи имѣется

$$2rr'r''r'''.$$

Можно тѣ же числа истолковать и иначе изъ данной точки или задаваясь плоскостью. Въ общемъ условіе принадлежать тройной коинциденціи есть четверное условіе, которое можетъ быть изображено:

$$\xi_4 = \gamma_{310}p^3g + \gamma_{301}p^3e + \gamma_{220}p^2g^2 + \gamma_{211}p^2ge + \gamma_{202}p^2e^2 + \gamma_{130}pg^3 +$$
$$+ \gamma_{121}pg^2e + \gamma_{112}pge^2 + \gamma_{103}pe^3 + \gamma_{040}g^4 + \gamma_{031}g^3e + \gamma_{022}g^2e^2 + \gamma_{013}ge^3.$$

Если тройная коинциденція задана пересѣченіемъ четырехъ коннексовъ, какъ выше, то

$$\gamma_{310} = \sum rm^{I}m^{II}m^{III},\ \gamma_{301} = \sum mm^{I}m^{II}n^{III},\ \gamma_{220} = \sum mm^{I}r^{II}r^{III},$$
$$\gamma_{211} = \sum mm^{I}r^{II}n^{III},\ \gamma_{202} = \sum mm^{I}n^{II}n^{III},\ \gamma_{130} = \sum mr^{I}r^{II}r^{III},$$
$$\gamma_{121} = \sum mr^{I}r^{II}n^{III},\ \gamma_{103} = \sum mn^{I}n^{II}n^{III},\ \gamma_{040} = rr^{I}r^{II}r^{III},\ \gamma_{031} = \sum nr^{I}r^{II}r^{III},$$
$$\gamma_{022} = \sum nn^{I}r^{II}r^{III},\ \gamma_{013} = \sum rn^{I}n^{II}n^{III},\ \gamma_{112} = \sum mr^{I}n^{II}n^{III}.$$

Если тройная коинциденція задана пересѣченіемъ двойной коинциденціи

$$(\beta_{300}, \beta_{210}, \beta_{201}, \beta_{120}, \beta_{111}, \beta_{030}, \beta_{021}, \beta_{012}, \beta_{003})$$

съ коннексомъ $(m^{III}, r^{III}, n^{III})$, то для тѣхъ же чиселъ получаемъ выраженія:

$$\gamma_{310} = \beta_{300} r + \beta_{210} m; \; \gamma_{301} = \beta_{300} n + \beta_{201} m; \; \gamma_{220} = \beta_{120} m + \beta_{210} r;$$

$$\gamma_{211} = m\beta_{111} + r\beta_{201} + n\beta_{210}; \; \gamma_{202} = m\beta_{102} + n\beta_{201}; \; \gamma_{130} = m\beta_{030} + r\beta_{120};$$

$$\gamma_{121} = m\beta_{021} + r\beta_{111} + n\beta_{120}; \; \gamma_{112} = m\beta_{012} + r\beta_{102} + n\beta_{111};$$

$$\gamma_{103} = m\beta_{003} + n\beta_{102}; \; \gamma_{040} = r\beta_{030}; \; \gamma_{031} = r\beta_{021} + n\beta_{030};$$

$$\gamma_{022} = r\beta_{012} + n\beta_{021}; \; \gamma_{013} = r\beta_{003} + n\beta_{012}.$$

5. Четверная коинциденція состоитъ изъ ∞^5 элементовъ и можетъ быть выдѣлена изъ совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) какимъ либо пятернымъ условіемъ. Она можетъ быть, слѣдовательно, опредѣлена какъ пересѣченіе пяти коннексовъ, простой коинциденціи съ двойною или тройной съ коннексомъ.

Условіе ξ_5 принадлежать такой конфигураціи есть условіе пятерное, которое можетъ быть въ тѣхъ же символахъ изображено

$$\xi_5 = \sum \delta_{ilk} p^i g^l e^k \qquad (i + k + l = 5).$$

Данной прямой принадлежитъ ∞^1 сочетаній (x, u) образующихъ пару (кривая двоякой кривизны порядка δ_{203}, развертывающаяся поверхность класса δ_{302}), данной точкѣ ∞^2 сочетаній (прямая, плоскость), образующихъ пару (конгруэнція ранга δ_{023}, плоскостная поверхность класса $2\delta_{041}$), причемъ имѣется $2\delta_{032}$ сочетаній (p, u), которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую, а плоскость проходитъ черезъ данную точку. Данной плоскости принадлежитъ пара (точечн. поверхность порядка $2\delta_{140}$, конгруэнція ранга δ_{320}), причемъ $2\delta_{230}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую въ данной связкѣ. Если возьмемъ пучекъ плоскостей, то сочетанія (x, p), составляющія элементъ съ одной изъ плоскостей этого пучка, образуютъ пару (точечное пространство, комплексъ ранга $2\delta_{321}$), въ которой съ каждою точкою можетъ соединено $2\delta_{041}$ прямыхъ этого комплекса, прямыя, составляющія сочетаніе съ одною изъ точекъ данной прямой, образуютъ линейчатую поверхность ранга δ_{131}, а составляющія сочетанія съ одною изъ точекъ даннаго поля—конгруэнцію ранга δ_{221}. Двойственно сочетаніе (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (комплексъ ранга δ_{113}, плоскостное

пространство), въ которой съ каждой плоскостью можетъ быть соединено $2\delta_{140}$ прямыхъ; прямыя сочетаній (p, u), которыхъ плоскости принадлежатъ данному пучку, образуютъ линейчатую поверхность ранга $2\delta_{131}$, а прямыя сочетаній, которыхъ плоскости принадлежатъ данной связкѣ,— конгруэнцію ранга δ_{122}. Можно замѣтить также, чтобы исчерпать всѣ характеристики,—что въ совокупности элементовъ, которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, сочетанія (x, u) образуютъ пару (поверхность порядка δ_{113}, поверхность класса δ_{311}), причемъ сочетаній, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣемъ δ_{212}.

Если четверная коинциденція задана какъ пересѣченіе пяти коннексовъ

$$(m, r, n) \dots (m^{\mathrm{IV}}, r^{\mathrm{IV}}, n^{\mathrm{IV}}),$$

то:

$$\delta_{041} = \sum nr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{032} = \sum nn^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{023} = \sum nn^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{140} = \sum mr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{230} = \sum mm^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{320} = \sum mm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{131} = \sum mn^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{122} = \sum mn^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{221} = \sum mm^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{113} = \sum mr^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}}n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{212} = \sum mm^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}}n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{203} = \sum mm^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}}n^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{311} = \sum mm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}}n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{302} = \sum mm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}}n^{\mathrm{IV}}.$$

Если четверная коинциденція является, какъ пересѣченіе тройной коинциденціи съ коннексомъ (m, r, n), то имѣемъ, означая γ_{ikl} $(i + k + l = 4)$ характеристики тройной коинциденціи:

$$\delta_{041} = \gamma_{031}r + \gamma_{040}n; \quad \delta_{032} = \gamma_{022}r + \gamma_{031}n; \quad \delta_{023} = \gamma_{013}r + \gamma_{022}n;$$

$$\delta_{140} = \gamma_{040}m + \gamma_{130}r; \quad \delta_{230} = \gamma_{130}m + \gamma_{220}r; \quad \delta_{320} = \gamma_{220}m + \gamma_{310}r;$$

$$\delta_{131} = \gamma_{031}m + \gamma_{121}r + \gamma_{130}n; \quad \delta_{122} = \gamma_{022}m + \gamma_{112}r + \gamma_{121}n;$$

$$\delta_{221} = \gamma_{121}m + \gamma_{211}r + \gamma_{220}n; \quad \delta_{113} = \gamma_{013}m + \gamma_{103}r + \gamma_{112}n;$$

$$\delta_{212} = \gamma_{112}m + \gamma_{202}r + \gamma_{211}n; \quad \delta_{311} = \gamma_{211}m + \gamma_{301}r + \gamma_{310}n;$$

$$\delta_{203} = \gamma_{103}m + \gamma_{202}n; \quad \delta_{302} = \gamma_{202}m + \gamma_{301}n.$$

6. Пятерная коинциденція, составляемая ∞^4 элементами (x, p, u), удовлетворяющими какому нибудь шестерному условію, можетъ быть получена въ пересѣченіи шести коннексовъ, или въ пересѣченіи четверной коинциденціи съ коннексомъ или тройной съ простою

или въ пересѣченіи двухъ двойныхъ коинциденцій (пересѣченіе трехъ простыхъ коинциденцій есть частный случай пересѣченія простой коинциденціи съ тройной).

Если условіе для (x, p, u) принадлежать такой коинциденціи (алгебраической) изобразимъ:

$$\xi_6 = \mu_{330}p^3g^3 + \mu_{321}p^3g^2e + \mu_{312}p^3ge^2 + \mu_{303}p^3e^3 + \mu_{240}p^2g^4 + \mu_{231}p^2g^3e +$$

$$+ \mu_{222}p^2g^2e^2 + \mu_{213}p^2ge^3 + \mu_{141}pg^4e + \mu_{132}pg^3e^2 + \mu_{123}pg^2e^3 +$$

$$+ \mu_{042}g^4e^2 + \mu_{033}g^3e^3$$

то значенія отдѣльныхъ характеристикъ таковы.

Данной прямой принадлежитъ конечное число μ_{303} сочетаній (x, u) составляющихъ съ нею элементъ. Данной плоскости принадлежитъ пара (кривая двоякой кривизны порядка $2\mu_{240}$, линейчатая поверхность ранга $2\mu_{330}$). Данной точкѣ—пара (линейчатая поверхность ранга $2\mu_{033}$, развертывающаяся класса $2\mu_{042}$). Прямымъ даннаго пучка принадлежатъ (т. е. составляютъ элементъ съ одною изъ прямыхъ пучка) сочетанія (x, u), образующія пару (кривая двоякой кривизны порядка μ_{213}, развертывающаяся класса μ_{312}). Прямымъ данной связки—пара (поверхность порядка μ_{123}, поверхность класса μ_{321}),—каждая точка первой поверхности въ соединеніи съ опредѣленною касательною плоскостью второй дополняетъ одну изъ прямыхъ связки до элемента пятерной коинциденціи; при этомъ число сочетаній (x, u), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, равно μ_{222}.

Сочетанія (x, p) тѣхъ элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, образуютъ пару (поверхность порядка $2\mu_{141}$, конгруэнція ранга μ_{231}), причемъ $2\mu_{132}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую встрѣчающую данную прямую. Сочетанія (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точка лежитъ на данной прямой образуютъ пару (конгруэнція ранга μ_{123}; поверхность класса $2\mu_{141}$) причемъ $2\mu_{132}$ сочетанія имѣютъ плоскость, проходящую черезъ данную точку, и прямую, встрѣчающую данную прямую.

Если пятерная коинциденція опредѣляется какъ пересѣченіе шести коннексовъ

$$(m, r, n)\ (m^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{I}}, n^{\mathrm{I}}) \ldots (m^{\mathrm{V}}, r^{\mathrm{V}}, n^{\mathrm{V}}),$$

то ея характеристики выражаются съ помощью порядка, класса и ранга отдѣльныхъ коннексовъ слѣдующимъ образомъ

$$\mu_{330} = \sum mm^{I}m^{II}r^{III}r^{IV}r^{V} \qquad \mu_{321} = \sum mm^{I}m^{II}n^{III}n^{IV}r^{V}$$

$$\mu_{312} = \sum mm^{I}m^{II}r^{III}n^{IV}n^{V} \qquad \mu_{303} = \sum mm^{I}m^{II}n^{III}n^{IV}n^{V}$$

$$\mu_{240} = \sum mm^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}r^{V} \qquad \mu_{231} = \sum mm^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}n^{V}$$

$$\mu_{222} = \sum mm^{I}n^{II}n^{III}r^{IV}r^{V} \qquad \mu_{213} = \sum mm^{I}r^{II}n^{III}n^{IV}n^{V}$$

$$\mu_{141} = \sum mn^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}r^{V} \qquad \mu_{132} = \sum mr^{I}r^{II}r^{III}n^{IV}n^{V}$$

$$\mu_{123} = \sum mr^{I}r^{II}n^{III}n^{IV}n^{V} \qquad \mu_{042} = \sum nn^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}r^{V}$$

$$\mu_{033} = \sum nn^{I}n^{II}r^{III}r^{IV}r^{V}$$

Если пятерная коинциденція опредѣляется пересѣченіемъ четверной съ коннексомъ (m, r, n), то

$$\mu_{330} = m\delta_{230} + r\delta_{230}; \quad \mu_{321} = \delta_{221}m + \delta_{311}r + \delta_{320}n;$$

$$\mu_{312} = \delta_{212}m + \delta_{302}r + \delta_{311}n; \quad \mu_{303} = m\delta_{203} + n\delta_{302};$$

$$\mu_{240} = \delta_{140}m + \delta_{230}r; \quad \mu_{231} = \delta_{131}m + \delta_{221}r + \delta_{230}n;$$

$$\mu_{222} = \delta_{122}m + \delta_{212}r + \delta_{211}n; \quad \mu_{213} = \delta_{113}m + \delta_{203}r + \delta_{212}n;$$

$$\mu_{141} = \delta_{041}m + \delta_{131}r + \delta_{140}n; \quad \mu_{132} = \delta_{032}m + \delta_{122}r + \delta_{131}n;$$

$$\mu_{123} = \delta_{023}m + \delta_{113}r + \delta_{122}n; \quad \mu_{042} = \delta_{032}r + \delta_{041}n;$$

$$\mu_{033} = \delta_{023}r + \delta_{032}n.$$

7. Шестерная коинциденція. Семь коннексовъ или коннексъ и пятерная коинциненція или коинциденціи простая и четверная или коинциденціи двойная и тройная имѣютъ общими ∞^3 элементовъ, совокупности которыхъ придадимъ названіе шестерной коинциденціи.

Произвольная прямая пространства не принадлежитъ вообще такой конфигураціи, т. е. не входитъ въ составъ ни одного ея элемента; всѣ прямыя, входящія въ составъ элементовъ шестерной коинциденціи, образуютъ комплексъ, котораго рангъ означимъ λ_{313}, и каждой такой прямой принадлежитъ опредѣленное сочетаніе (x, u), вмѣстѣ съ этою прямою образующее элементъ конфигураціи. Произвольно заданной точкѣ принадлежитъ $2\lambda_{043}$ сочетаній (прямая, плоскость), произвольно заданной плоскости—$2\lambda_{340}$ сочетаній (точка, прямая). Элементовъ, которыхъ прямыя

принадлежать данному пучку, имѣется λ_{313},—ихъ прямыя суть прямыя комплекса. Элементовъ, которыхъ прямая проходитъ черезъ данную точку или лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1: прямыя суть прямыя вышеупомянутаго комплекса, принадлежащія связкѣ съ вершиною въ данной точкѣ и образующія конусъ порядка $2\lambda_{313}$ (или лежащія въ данной плоскости и огибающія плоскую кривую порядка $2\lambda_{313}$), точки этихъ элементовъ заполняютъ кривую двоякой кривизны порядка λ_{223}, а плоскости огибаютъ развертывающуюся класса λ_{322}. Совокупность сочетаній (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{133}$, развертывающаяся класса $2\lambda_{142}$). Если соберемъ всѣ элементы, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, то сочетанія (x, p) этихъ элементовъ образуютъ пару (кривая двоякой кривизны порядка $2\lambda_{241}$, линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{331}$). Наконецъ $2\lambda_{232}$ элементы имѣютъ точку въ данной плоскости, плоскость въ данной связкѣ, и прямую въ данномъ специальномъ линейномъ комплексѣ. Перечисленныя 10 характеристикъ такъ выражаются въ случаѣ, если шестерная коинциденція задана, какъ пересѣченіе семи коннексовъ

$$(m, r, n), \quad (m^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{I}}, n) \ldots (m^{\mathrm{VI}}, r^{\mathrm{VI}}, n^{\mathrm{VI}}):$$

$$\lambda_{340} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{331} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{322} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{043} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{133} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{223} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{241} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{142} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{313} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{232} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}.$$

Если получаемъ шестерную коинциденцію въ пересѣченіи пятерной съ коннексомъ (m, r, n), то тѣ же характеристики выразятся:

$$\lambda_{340} = m\mu_{240} + r\mu_{330}; \quad \lambda_{331} = m\mu_{231} + r\mu_{321} + n\mu_{330};$$

$$\lambda_{322} = m\mu_{222} + r\mu_{312} + n\mu_{321}; \quad \lambda_{043} = r\mu_{033} + n\mu_{042};$$

$$\lambda_{133} = m\mu_{033} + r\mu_{123} + n\mu_{132}; \quad \lambda_{223} = m\mu_{123} + r\mu_{213} + n\mu_{222};$$

$$\lambda_{241} = m\mu_{141} + r\mu_{231} + n\mu_{240}; \quad \lambda_{142} = m\mu_{042} + r\mu_{132} + n\mu_{141};$$

$$\lambda_{313} = m\mu_{213} + r\mu_{303} + n\mu_{312}; \quad \lambda_{232} = m\mu_{132} + r\mu_{222} + n\mu_{231}.$$

Въ виду того, что въ шестерной коинциденціи устанавливается извѣстнаго рода соотвѣтствіе между всѣми точками пространства, прямыми нѣкотораго комплекса и всѣми плоскостями пространства, можно называть шестерную коинциденцію элементовъ (x, p, u) *тройкою* (точечное пространство, комплексъ, плоскостное пространство).

8. Семерная коинциденція. Дальнѣйшую конфигурацію представляетъ совокупность ∞^8 элементовъ (x, p, u), выдѣляемая восьмернымъ условіемъ: пересѣченіемъ восьми коннексовъ или шестерной коинциденціи съ коннексомъ, пятерной коинциденціи съ простою, четверной съ двойною или двухъ тройныхъ. Характеристики ея

$$\nu_{341}, \nu_{242}, \nu_{143}, \nu_{332}, \nu_{233}, \nu_{323},$$

имѣютъ слѣдующее значеніе. Точки элементовъ образуютъ поверхность порядка $2\nu_{143}$, прямыя—конгруэнцію ранга ν_{323}, плоскости огибаютъ поверхность класса $2\nu_{341}$. Элементовъ, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1: точки эти образуютъ кривую пересѣченія вышеупомянутой поверхности съ данною плоскостью, прямыя покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2\nu_{233}$, плоскости огибаютъ развертывающуюся класса $2\nu_{242}$; двойственно элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣется также ∞^1: ихъ точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка $2\nu_{242}$, прямыя покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2\nu_{332}$ и плоскости огибаютъ конусъ, касательный къ вышеупомянутой поверхности класса $2\nu_{341}$ и имѣющій вершину въ данной точкѣ. Поэтому можемъ называть нашу фигуру тройкою: (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность).

Если семерная коинциденція задана восемью коннексами

$$(m, r, n) \ldots (m^{VII}, r^{VII}, n^{VII}),$$

то

$$\nu_{341} = \sum m m^{I} m^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} r^{VI} n^{VII}; \quad \nu_{143} = \sum m r^{I} r^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} n^{VI} n^{VII};$$

$$\nu_{242} = \sum m m^{I} r^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} n^{VI} n^{VII}; \quad \nu_{323} = \sum m m^{I} m^{II} r^{III} r^{IV} n^{V} n^{VI} n^{VII};$$

$$\nu_{332} = \sum m m^{I} m^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} n^{VI} n^{VII}; \quad \nu_{233} = \sum m m^{I} r^{II} r^{III} r^{IV} n^{V} n^{VI} n^{VII}.$$

Отсюда если всѣ коннексы

$$(m, r, n) \ldots (m^{VII}, r^{VII}, n^{VII}),$$

суть трилинейные, то порядокъ точечной поверхности тройки равенъ 560, рангъ конгруэнціи 560 и классъ плоскостной поверхности 560. Кривая двоякой кривизны и линейчатая поверхность, принадлежащія плоскостямъ

данной связки, будутъ порядка 840 и ранга 1120; принадлежащія точкамъ данной плоскости линейчатая поверхность и развертывающаяся оказываются ранга 1120 и класса 840.

Если поверхность задана пересѣченіемъ коннекса (m, r, n) съ шестерной коинциденціей, то

$$\nu_{341} = m\lambda_{340} + r\lambda_{331} + n\lambda_{340}; \qquad \nu_{143} = m\lambda_{043} + r\lambda_{133} + n\lambda_{142};$$
$$\nu_{242} = m\lambda_{142} + r\lambda_{232} + n\lambda_{241}; \qquad \nu_{323} = m\lambda_{223} + r\lambda_{313} + n\lambda_{332};$$
$$\nu_{332} = m\lambda_{232} + r\lambda_{322} + n\lambda_{331}; \qquad \nu_{233} = m\lambda_{133} + r\lambda_{223} + n\lambda_{232}.$$

9. Девять условій отдѣляютъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) ∞^1 такихъ элементовъ, которые образуютъ *тройку (кривая двоякой кривизны порядка $2\varkappa_{243}$, линейчатая поверхность ранга $2\varkappa_{333}$, развертывающаяся класса $2\varkappa_{342}$)*. Точка первой въ соединеніи съ опредѣленной образующей второй и опредѣленною плоскостью третьей образуютъ элементъ конфигураціи.

Если тройка задана, какъ пересѣченіе девяти коннексовъ

$$(m, r, n) \dots (m^{VIII}, r^{VIII}. n^{VIII}),$$

то

$$\varkappa_{342} = \sum m m^{I} m^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} r^{VI} n^{VII} n^{VIII};$$
$$\varkappa_{333} = \sum m m^{I} m^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} n^{VI} n^{VII} n^{VIII};$$
$$\varkappa_{243} = \sum m m^{I} r^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} n^{VI} n^{VII} n^{VIII}.$$

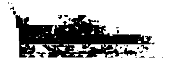
Если, напримѣръ беремъ девять трилинейныхъ коннексовъ, то порядокъ кривой есть 2520, рангъ линейчатой поверхности 3360 и классъ развертывающейся 2520.

Тройка можетъ быть задана также пересѣченіемъ коннекса съ тройкою (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность). Тогда три ея характеристики выразятся

$$\varkappa_{342} = m\nu_{242} + r\nu_{332} + n\nu_{341}, \quad \varkappa_{333} = m\nu_{233} + r\nu_{323} + n\nu_{332},$$
$$\varkappa_{243} = m\nu_{143} + r\nu_{233} + n\nu_{242}.$$

10. Десятерное условіе, наложенное на элементы, даетъ конечное ихъ число. Такимъ образомъ десять коннексовъ

$$(m, r, n) \dots (m^{IX} r^{IX} n^{IX})$$



имѣютъ общихъ элементовъ

$$N = 2\sum m m^{I} m^{II} r^{III} r^{IV} r^{V} r^{VI} n^{VII} n^{VIII} n^{IX}.$$

Конечное число общихъ элементовъ имѣютъ далѣе коннексъ и тройка (кривая двоякой кривизны, линейчатая поверхность, развертывающаяся). Число это равно

$$N = 2(m\varkappa_{243} + r\varkappa_{333} + n\varkappa_{342}).$$

Простая коинциденція пересѣкается съ тройкою (точечн. поверхность, конгруэнція, плоскостн. поверхность) въ

$$N = 2(\alpha_{200}\nu_{143} + \alpha_{110}\nu_{233} + \alpha_{101}\nu_{242} + \alpha_{020}\nu_{323} + \alpha_{011}\nu_{332} + \alpha_{002}\nu_{341})$$

элементахъ. Число элементовъ пересѣченія двойной коинциденціи съ шестерною опредѣляется формулою:

$$N = 2(\beta_{300}\lambda_{043} + \beta_{210}\lambda_{133} + \beta_{201}\lambda_{142} + \beta_{120}\lambda_{223} + \beta_{111}\lambda_{232} + \beta_{102}\lambda_{241} +$$

$$+ \beta_{030}\lambda_{313} + \beta_{021}\lambda_{322} + \beta_{012}\lambda_{331} + \beta_{003}\lambda_{340}).$$

Тройная коинциденція въ пересѣченіи съ пятерною даетъ

$$N = \gamma_{310}\mu_{033} + \gamma_{301}\mu_{042} + \gamma_{220}\mu_{123} + \gamma_{211}\mu_{132} + \gamma_{202}\mu_{141} + \gamma_{130}\mu_{213} +$$

$$+ \gamma_{121}\mu_{222} + \gamma_{112}\mu_{231} + \gamma_{103}\mu_{240} + \gamma_{040}\mu_{303} + \gamma_{031}\mu_{312} + \gamma_{022}\mu_{321} + \gamma_{012}\mu_{331})$$

элементовъ и наконецъ двѣ четверныхъ коинциденціи имѣютъ

$$N = 2(\delta_{320}\delta^{I}_{023} + \delta_{311}\delta^{I}_{032} + \delta_{302}\delta^{I}_{041} + \delta_{230}\delta^{I}_{113} + \delta_{221}\delta^{I}_{122} + \delta_{212}\delta^{I}_{131} +$$

$$+ \delta_{203}\delta^{I}_{140} + \delta_{140}\delta^{I}_{203} + \delta_{131}\delta^{I}_{212} + \delta_{122}\delta^{I}_{221} + \delta_{113}\delta^{I}_{230} + \delta_{041}\delta^{I}_{302} +$$

$$+ \delta_{032}\delta^{I}_{311} + \delta_{023}\delta^{I}_{320})$$

общихъ элементовъ.

Въ частности, напримѣръ, число элементовъ пересѣченія 10 трилинейныхъ коннексовъ равно

$$2520 + 3360 + 2520 = 8400.$$

11. Въ послѣдующемъ мы будемъ разсматривать главнымъ образомъ коннексъ и простую коинциденцію. Поэтому въ заключеніе настоящаго §-а остановимся еще на числѣ произвольныхъ коэффиціентовъ,

которое содержитъ общее уравненіе коннекса (m, r, n). Число членовъ его уравненія, а слѣдовательно, и число коэффиціентовъ равно

$$N_{(m, r, n)} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}{1.2.3.4.5} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}.$$

Число постоянныхъ, входящихъ въ это уравненіе, можетъ быть однако понижено съ помощью уравненія, связывающаго координаты прямой:

$$\frac{1}{2}(p\,,\,p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Поэтому одинъ и тотъ же коннексъ можетъ быть опредѣленъ не только уравненіемъ

$$f(x\,,\,p\,,\,u) = 0$$

но и всякимъ уравненіемъ

$$f(xpu) + (p\,,\,p).f_1(xpu) = 0$$

гдѣ f_1 функція однородная и степени m отн. x_i, $r-2$ отн. p_{ik} и степени n отн. u съ совершенно произвольными коэффиціентами. Съ помощью ея мы можемъ, слѣдовательно, во всякомъ уравненіи $f=0$ уничтожить

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r-1).r.(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

коэффиціентовъ, такъ что дѣйствительно независимыхъ остается

$$N^{\mathrm{I}}_{(m, r, n)} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)^2(r+3)}{1.3.4} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

формула эта справедлива и при $r < 2$.

На единицу меньшее число условій (напр., элементовъ) должно быть дано, чтобы опредѣлить вполнѣ коннексъ.

§ II.

Простѣйшія конфигураціи съ элементомъ (x, p, u).

1. Трилинейный коннексъ.

Уравненіе

$$f(x, p, u) = \sum a_{ikjl} x_i u_k p_{jl} = a_x (\mathfrak{aa} pp) u_\alpha = 0 \qquad (1)$$

линейное относительно x_i, p_{jl} и u_k опредѣляетъ трилинейный коннексъ. Оно содержитъ 96 коэффиціентовъ, и для полнаго опредѣленія конфигураціи должны быть заданы 95 ея элементовъ (x, p, u).

Основныхъ точекъ, прямыхъ или плоскостей общій (т. е. имѣющій уравненіе съ произвольными коэффиціентами) трилинейный коннексъ не содержитъ.

Но *основныя сочетанія* (x, p), (p, u), (x, u) принадлежатъ и общему коннексу (1, 1, 1).

Таковы будутъ прежде всего пары (точка, плоскость), общія шести билинейнымъ коннексамъ (x, u):

$$\frac{df}{dp_{jl}} = \sum a_{ikjl} x_i u_k = 0 \quad (j, l = 1, 2, 3, 4). \qquad (2)$$

Основныхъ сочетаній (точка, плоскость) общій трилинейный коннексъ имѣетъ 20, —по числу элементовъ пересѣченія шести билинейныхъ коннексовъ (x, u).

Основныя сочетанія (точка, прямая) общаго трилинейнаго коннекса суть элементы пересѣченія четырехъ билинейныхъ коннексовъ (x, p):

$$\sum a_{ikjl} x_i p_{jl} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4) \qquad (3)$$

Трилинейный коннексъ (1) *имѣетъ* ∞^3 *основныхъ сочетаній (точка, прямая) образующихъ пару (точечное пространство, комплексъ 4 ранга).* Прямыя этихъ сочетаній заполняютъ комплексъ 4 ранга

$$\Delta = \left| \frac{d^2 f}{dx_i du_k} \right| = (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}p^I p^I)(\mathfrak{cc}p^{II}p^{II})(\mathfrak{dd}p^{III}p^{III})(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) = 0. \quad (4)$$

Каждой прямой принадлежитъ опредѣленная вообще точка, координаты которой выполняютъ уравненія (3), при условіи (4) совмѣстныя. Исключенія составляютъ тѣ прямыя, которыя уничтожаютъ не только (4), но и всѣ его первые миноры. Такихъ прямыхъ трилинейный коннексъ содержитъ 162,—по числу прямыхъ пересѣченія четырехъ комплексовъ 3 ранга, опредѣляемыхъ уравненіями

$$\frac{d\Delta}{df_{11}} = 0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{22}} = 0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{33}} = 0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{44}} = 0$$

гдѣ мы для краткости обозначили

$$f_{ii} = \frac{d^2 f}{dx_i du_i}.$$

Обратно, каждой точкѣ пространства принадлежатъ двѣ прямыхъ вещественныхъ, или мнимыхъ, прямыя пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ (3). Прямымъ комплекса (4), лежащимъ въ данной плоскости, или проходящимъ черезъ даннýю точку, принадлежатъ точки кривой 6-го порядка, и точкамъ данной плоскости принадлежитъ конгруэнція 6-го ранга, лежащая въ комплексѣ (4). Прямымъ комплекса (4), встрѣчающимъ данную прямую, принадлежитъ поверхность 4-го порядка, и точкамъ данной прямой—линейчатая поверхность ранга 4, всѣ прямыя которой составляютъ основныя сочетанія трилинейнаго коннекса съ опредѣленными точками данной прямой.

Основныхъ сочетаній (прямая, плоскость) трилинейный коннексъ имѣетъ также ∞^3*: они опредѣляются уравненіями*

$$\frac{df(x,p,u)}{dx_i} = \sum a_{i,k;jl}\, u_k p_{jl} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3.\ 4) \tag{5}$$

и образуютъ пару (комплексъ 4 ранга, плоскостное пространство). Комплексъ этотъ, какъ легко видѣть, совпадаетъ съ полученнымъ выше комплексомъ (4).

Замѣтимъ, что комплексъ (4) не будетъ самымъ общимъ комплексомъ 4 ранга—онъ зависитъ не отъ 104 параметровъ, какъ общій, а лишь отъ 95.

Можно замѣтить, подобно тому, какъ имѣли выше для основныхъ сочетаній (точка, прямая): съ прямыми комплекса (4), принадлежащими данной связкѣ (или данному полю), составляютъ основное сочетаніе плоскости, огибающія развертывающуюся поверхность 6 класса, и прямыя комплекса (4), образующія основныя сочетанія съ плоскостями данной связки, образуютъ конгруэнцію 6 ранга, наконецъ прямымъ комплекса (4), встрѣчающимъ данную прямую, принадлежатъ (въ указанномъ смыслѣ) касательныя къ поверхности 4 порядка плоскости, и плоскостямъ даннаго пучка—лучи линейчатой поверхности 4 ранга.

Произвольно взятому сочетанію $(p,\ u)$, — если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ плоскость v, координаты которой суть

$$\sigma v_i = \frac{df}{dx_i} = a_i(\ \mathrm{aa}\, pp)\, u_x.$$

Плоскость v пересѣкается съ плоскостью u взятаго сочетанія по прямой q, аксіальныя координаты которой суть

$$\tau . q_{ik} = \sigma(v_i u_k) = (\text{aa} pp) u_\alpha (a_i u_k).$$

Эта прямая встрѣчаетъ прямую p сочетанія, если выполнено условіе

$$\sum q_{ik} p_{ik} = 0$$

т. е.

$$(\text{aa} pp)(a u \pi \pi) u_\alpha = 0 \tag{6}$$

(гдѣ π означаютъ аксіальныя координаты прямой p), т. е. если взятое (p, u) принадлежитъ опредѣленному этимъ уравненіемъ коннексу 2 ранга и 2-го класса. Итакъ существуетъ ∞^6 сочетаній (p, u), обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что точки встрѣчи прямой p элемента трилинейнаго коннекса съ плоскостью u того же элемента, и съ v совпадаютъ.

Прямая q совпадаетъ съ прямою p, если существуютъ равенства

$$\lambda (\text{aa} pp) u_\alpha (a_i u_k) = \mu . p_{ik}$$

независимыхъ соотношеній по исключеніи λ/μ получаемъ пять,—такихъ сочетаній имѣемъ слѣдовательно ∞^2,—они образуютъ пару: (конгруэнція, поверхность), характеристики этой пары суть (30, 160, 120), гдѣ 120— рангъ конгруэнціи, 30—классъ поверхности пары—т. е. число сочетаній пары, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и 160— число сочетаній, которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую и плоскость проходитъ черезъ данную точку, иными словами рангъ линейчатой поверхности, образуемой прямыми сочетаній, которыхъ плоскости принадлежитъ данной связкѣ, или классъ развертывающейся, огибаемой плоскостями, касательными къ поверхности пары, входящими въ составъ тѣхъ сочетаній, которыхъ прямыя встрѣчаютъ данную прямую.

Двойственно, если возьмемъ сочетаніе (x, p)—не принадлежащее къ числу основныхъ,—то ему въ коннексѣ принадлежитъ точка y какъ центръ связки плоскостей, составляющихъ съ (x, p) элементъ трилинейнаго коннекса. Координаты этой точки y:

$$\varrho y_k = a_x (\text{aa} pp) \alpha_k;$$

и слѣдовательно, прямая, соединяющая x и y, имѣетъ радіальныя координаты пропорціональныя опредѣлителямъ:

$$a_x (\text{aa} pp)(\alpha_i x_k) = \tau . q'_{ik}$$

прямая эта встрѣчаетъ прямую p элемента, если взятое нами сочетаніе (x, p) принадлежитъ коннексу 2-го порядка и 2-го ранга

$$a_x(\mathrm{aa}pp)(ax\,pp)=0 \qquad (7)$$

Точно такъ же, какъ и выше получимъ далѣе пару (поверхность, конгруэнція) съ характеристиками (30, 160, 120), для сочетаній (x, p) которой прямыя $q'=(x, y)$ и p совпадаютъ, 30 есть порядокъ поверхности, 120—рангъ конгруэнціи и аналогичное предыдущему значеніе имѣетъ третья характеристика 160.

Для сочетаній (x, p), принадлежащихъ (7), точка y лежитъ въ плоскости, опредѣляемой точкою x и прямой p сочетанія, или плоскости (x, p) и (y, p) совпадаютъ.

Сочетанію (x, u) принадлежитъ вообще линейный комплексъ. Комплексъ этотъ будетъ спеціальнымъ, если (x, u) принадлежитъ коннексу (x, u) порядка 2 и класса 2:

$$a_x b_x u_\alpha u_\beta\,(\mathrm{aa}\,\mathfrak{bb})=0. \qquad (8)$$

Прямой p принадлежитъ въ трилинейномъ коннексѣ (1) опредѣленный билинейный коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), устанавливающій, какъ извѣстно, коллинеарное преобразованіе пространства. Соотвѣтственно всѣмъ ∞^4 прямымъ пространства получимъ распредѣленіе всѣхъ ∞^9 элементовъ (x, p, u) трилинейнаго коннекса на ∞^4 системъ по ∞^5 элементовъ. Можно сказать, что изъ всего многообразія ∞^{15} коллинеацій, трилинейный коннексъ выдѣляетъ многообразіе ∞^4 коллинеацій, которыя для общаго трилинейнаго коннекса всѣ между собою различны (для совпаденія двухъ коллинеацій должны быть выполнены 15 условій, а величинъ для ихъ выполненія имѣемъ лишь 10). Всѣ ∞^4 билинейныхъ коннексовъ, устанавливающихъ эти коллинеаціи имѣютъ 20 общихъ элементовъ—основныя сочетанія (x, u) трилинейнаго коннекса. Особенности коллинеаціи, принадлежащей прямой, выдѣляютъ эту прямую изъ числа другихъ, и такимъ образомъ устанавливая инваріантныя формы для коллинеаціи, получаемъ коваріанты трилинейнаго коннекса.

Такимъ образомъ получаемъ прежде всего новое значеніе установленнаго выше комплекса 4-го ранга (4). *Его прямымъ принадлежатъ вырожденныя коллинеаціи.* Дѣйств., уравненіе его выражаетъ, что опредѣлитель коллинеаціи, принадлежащей прямой p, обращается въ 0.

Подобнымъ образомъ прямыя p, принадлежащія которымъ коллинеаціи находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ (т. е. если существуетъ ∞^9 тетраэдровъ, соотвѣтствующіе которымъ въ коллинеаціи тетраэдры въ нихъ вписаны), образуютъ линейный комплексъ

$$P_1=(\mathrm{aa}pp)\,a_\alpha=0. \qquad (9)$$

Это приводитъ насъ между прочимъ къ инваріанту трилинейнаго коннекса $(\mathfrak{aabb})\,a_\alpha b_\beta$ (9a), уничтоженіе котораго выражаетъ, что этотъ комплексъ есть вырожденный. Во вписанномъ положеніи тетраэдра находится квадратъ коллинеаціи принадлежащей p

$$(\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)\,a_x b_\alpha u_\beta = 0$$

если прямая принадлежитъ квадратичному комплексу

$$P_2 = (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)\,a_\beta b_x = 0 \tag{10}$$

и точно также прямыя комплекса 3 ранга:

$$P_3 = (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)(\mathfrak{cc}pp)a_\beta b_\gamma c_x = 0 \tag{11}$$

даютъ коллинеаціи, 3-я степень которыхъ находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ.

Можно установить еще комплексъ

$$P_3' = (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)(\mathfrak{cc}pp)\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

прямыя котораго даютъ коллинеаціи въ описанномъ положеніи тетраэдровъ.

Плоскости u принадлежитъ билинейный коннексъ (x, p) и соотвѣтственно всѣмъ плоскостямъ пространства получаемъ ∞^3 такихъ коннексовъ, т. е. распредѣляемъ ∞^9 элементовъ на ∞^3 системъ по ∞^6 элементовъ каждая. Получаемая система коннексовъ (x, p) линейна и опирается на пару [точечное пространство, комплексъ 4 ранга (4)].

Каждый билинейный коннексъ (x, p) имѣетъ двѣ основныхъ прямыхъ, которыя могутъ быть вещественны и различны, вещественны и совпадать или наконецъ могутъ быть мнимы. Такимъ образомъ каждой плоскости пространства принадлежатъ двѣ прямыя,—это именно прямыя комплекса (4), принадлежащія этой плоскости, и основной комплексъ (4) есть слѣдовательно, геометрическое мѣсто паръ основыхъ прямыхъ билинейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ плоскостямъ пространства.

Произвольно взятый билинейный коннексъ, принадлежащій плоскости, основныхъ точекъ не имѣетъ. Но въ числѣ ∞^3 плоскостей пространства существуетъ 20, которымъ принадлежатъ билинейные коннек-

сы (x, p), имѣющіе основную точку,—эти плоскости и соотвѣтствующія имъ точки опредѣляются уравненіями

$$\sum a_{i,k,jl}\, x_i u_k = \frac{df}{dp_{jl}} = 0 \qquad (2)$$

и суть слѣдовательно, плоскости и точки основныхъ сочетаній (x, u) трилинейнаго коннекса.

Двойственно точкѣ x принадлежитъ опредѣленный билинейный коннексъ (p, u), а всѣмъ ∞^3 точкамъ пространства—линейная система ∞^3 билинейныхъ коннексовъ (p, u). Основныя прямыя этихъ коннексовъ образуютъ тотъ же комплексъ 4 ранга (4).

Основныя плоскости имѣются только въ тѣхъ коннексахъ, которые выполняютъ тѣже уравненія (2), и слѣдовательно, тѣже 20 точекъ даютъ линейные комплексы (p, u), имѣющія каждый основную плоскость.

2. Коинциденція—пересѣченіе двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Элементы (x, p, u), общіе двумъ трилинейнымъ коннексамъ

$$\begin{aligned} f(x, p, u) &= \sum a_{i,k,jl}\, x_i u_k p_{jl} = 0, \\ F(x, p, u) &= \sum a'_{i,k,jl}\, x_i u_k p_{jl} = 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

образуютъ коинциденцію (простую) изъ ∞^8 элементовъ.

Произвольно взятому сочетанію (p, u) принадлежитъ вообще опредѣленная прямая — пересѣченіе плоскостей v и v', принадлежащихъ (p, u) въ томъ и другомъ коннексѣ,—точки этой прямой вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (p, u) составляютъ элементъ коинциденціи. Координаты этой прямой выразятся

$$\tau . Q_{ik} = \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{dF}{dx_k} - \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dF}{dx_i} = (\mathrm{aa}pp)\,(\mathrm{a'a'}pp) u_\alpha u_{\alpha'} \quad (a_i a'_k).$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ также прямая, какъ ось пучка плоскостей, каждая изъ которыхъ составляетъ элементъ коинциденціи вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (x, p). Прямая эта соединяетъ точки y и y', принадлежащія сочетанію (x, p) въ томъ и другомъ трилинейныхъ коннексахъ.

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція—пересѣченіе двухъ линейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ (x, u) въ томъ и другомъ коннексахъ (1).

Основными сочетаніями явятся тѣ, которымъ принадлежитъ высшее многообразіе точекъ, соотвѣтств. плоскостей и прямыхъ, чѣмъ для произвольно взятаго.

Такимъ образомъ основнымъ сочетаніемъ (p, u) будетъ такое, съ которымъ элементъ коинциденціи составятъ не ∞^1 точекъ, а ∞^2 или даже ∞^3. Впрочемъ послѣдняго обстоятельства не можетъ встрѣтиться, если оба трилинейныхъ коннекса, опредѣляющіе коинциденцію, будутъ общими. Въ самомъ дѣлѣ, для этого необходимо было бы одновременное выполненіе восьми уравненій

$$\frac{df}{dx_i} = 0 \qquad \frac{dF}{dx_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

съ семью неизвѣстными. Исключеніе u_k и p_{il} изъ этихъ восьми уравненій доставитъ соотношеніе между коэффиціентами коинциденціи, которое и будетъ выражаться уничтоженіемъ соотвѣтств. совмѣстнаго инваріанта двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Поэтому для коинциденціи возможны въ общемъ случаѣ только такія основныя сочетанія (p, u), съ которыми элементъ ея составляютъ ∞^2 точекъ, образующихъ плоскость. Возможно это прежде всего если (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ одного изъ трилинейныхъ коннексовъ, т. е. если (p, u) выполняютъ уравненія

$$\frac{df}{dx_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

или уравненія

$$\frac{dF}{dx_i} = 0 \qquad (i - 1, 2, 3, 4) \tag{5'}$$

Такихъ сочетаній коинциденція имѣетъ ∞^3.

Но кромѣ того, указанное обстоятельство встрѣтится всякій разъ, когда совпадутъ принадлежащія сочетанію плоскости v и v', и благодаря этому прямая ихъ пересѣченія станетъ неопредѣленною. Чтобы обстоятельство это встрѣтилось, должны быть выполнены уравненія

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{\frac{df}{dx_2}}{\frac{dF}{dx_2}} = \frac{\frac{df}{dx_3}}{\frac{dF}{dx_3}} = \frac{\frac{df}{dx_4}}{\frac{dF}{dx_4}} \tag{14}$$

что даетъ три независимыхъ соотношенія между величинами p_{ik} u_l. Такимъ образомъ коинциденція (13) имѣетъ ∞^4 основныхъ сочетаній

(x, u) образующихъ двойную коинциденцію (p, u). Чтобы получить характеристики этой послѣдней, замѣнимъ (14) тремя независимыми соотношеніями, напримѣръ,

$$f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0,\quad f'_{x_2}F'_{x_3}-f'_{x_3}F'_{x_2}=0,\quad f'_{x_3}F'_{x_4}-f'_{x_4}F'_{x_3}=0. \quad (15)$$

или символически—тремя независимыми опредѣлителями матрицы

$$(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)u_\alpha u_{\alpha'}\left\|\begin{matrix} a_1a_2a_3a_4 \\ a'_1a'_2a'_3a'_4 \end{matrix}\right\|=0.$$

Но система (15) не вполнѣ эквивалентна системѣ (14),—она удовлетворяется, если (p, u) удовлетворяетъ такимъ системамъ:

$$F'_{x_2}=0,\quad f'_{x_2}=0\quad f'_{x_3}F'_{x_4}-f'_{x_4}F'_{x_3}=0$$

и

$$F'_{x_3}=0,\quad f'_{x_3}=0\quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0 \quad (16)$$

но эти послѣднія не выполняютъ тождественно уравненія

$$F'_{x_4}f'_{x_1}-F'_{x_1}f'_{x_4}=0$$

слѣдующаго изъ (14),—которое также должно быть выполнено искомыми сочетаніями (p, u). Такія (p, u) должны быть отброшены. Отсюда находимъ, что полученное M_4 [1]) сочетаній (p, u) имѣетъ характеристики $(4, 12, 12, 8)$. Значеніе чиселъ таково: въ разсматриваемой двойной коинциденціи сочетаній (p, u) данной плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 8 ранга, данной прямой—4 плоскости; прямымъ даннаго поля („Strahlenfeld") или данной связки—поверхность 12 класса, прямымъ даннаго пучка—развертывающаяся поверхность 12 класса, обратно плоскостямъ данной связки—комплексъ 12 ранга, плоскостями даннаго пучка—конгруэнція 12 ранга. Въ составъ этой двойной коинциденціи входятъ и основныя сочетанія того и другого коннексовъ (13).

Аналогичнымъ образомъ мы находимъ основныя сочетанія (x, p) коинциденціи (13) изъ уравненій

$$\frac{\frac{df}{du_1}}{\frac{dF}{du_1}}=\frac{\frac{df}{du_2}}{\frac{dF}{du_2}}=\frac{\frac{df}{du_3}}{\frac{dF}{du_3}}=\frac{\frac{df}{du_4}}{\frac{dF}{du_4}} \quad (17)$$

---

[1]) M_4 = многообразіе четырехъ измѣреній,—обозначеніе, которымъ для краткости будемъ пользоваться и далѣе.

которыя символически изобразятся

$$(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)\,a_x a'_x \left\| \begin{matrix} \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 \\ \alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3\,\alpha'_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Уравненія (17) можно замѣнить другими тремя

$$f'_{u_1}F'_{u_2} - f'_{u_2}F'_{u_1} = 0 \quad f'_{u_2}F'_{u_3} - f'_{u_3}F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_3}F'_{u_4} - f'_{u_4}F'_{u_3} = 0 \quad (18)$$

къ которымъ слѣдуетъ добавлять слѣдующее уже изъ нихъ уравненіе

$$f'_{u_4}F'_{u_1} - f'_{u_1}F'_{u_4} = 0$$

чтобы исключить посторонніе сочетанія (x, p), удовлетворяющія уравненіямъ

$$f'_{u_3} = 0 \quad F'_{u_3} = 0 \quad f'_{u_3}F'_{u_4} - f'_{u_4}F'_{u_3} = 6$$

и

$$f'_{u_2} = 0 \quad F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_1}F'_{u_2} - f'_{u_2}F'_{u_1} = 0$$

что даетъ для характеристикъ двойной коинциденціи основныхъ сочетаній (x, p):

$$G.\S_3 = 4\,; \qquad pg_s\S_3 = 12 \qquad p^2g_p\S_3 = p^2g_e\S_3 = 12\,, \qquad p^3g\S_3 = 8$$

которыя показываютъ, что данной прямой принадлежатъ 4 точки, данной точкѣ—линейчатая поверхность восьмого ранга, прямымъ данной связки—кривая двоякой кривизны 12 порядка и точкамъ данной плоскости—комплексъ 12 ранга; прямымъ данной связки или даннаго поля—поверхность 12 порядка, и точкамъ данной прямой—конгруэнція 12 ранга.

Эта двойная коинциденція (x, p) содержитъ разумѣется основныя сочетанія и того и другого коннекса.

Наконецъ основныя сочетанія (x, u) коинциденціи (13) опредѣляются уравненіями:

$$\frac{\frac{df}{dp_{12}}}{\frac{dF}{dp_{12}}} = \frac{\frac{df}{dp_{13}}}{\frac{dF}{dp_{13}}} = \frac{\frac{df}{dp_{14}}}{\frac{dF}{dp_{14}}} = \frac{\frac{df}{dp_{34}}}{\frac{dF}{dp_{34}}} = \frac{\frac{df}{dp_{42}}}{\frac{dF}{dp_{42}}} = \frac{\frac{df}{dp_{23}}}{\frac{dF}{dp_{23}}} \qquad (19)$$

Замѣняя эту систему уравненіями:

$$\frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,\quad \frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,\quad \frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,,\tag{20}$$

$$\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0\,,$$

опредѣляющими ∞^1 элементовъ (x, u) образующихъ пару (кривая двойной кривизны, развертывающаяся поверхность), вводимъ посороннія рѣшенія,—пары, опредѣляемыя системами уравненій:

$$a)\ \frac{dF}{dp_{13}}=0\qquad \frac{df}{dp_{13}}=0\qquad \frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,,\quad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$b)\ \frac{dF}{dp_{14}}=0\qquad \frac{df}{dp_{14}}=0\qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,,\quad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$c)\ \frac{dF}{dp_{34}}=0\qquad \frac{df}{dp_{34}}=0\qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,\quad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$d)\ \frac{dF}{dp_{42}}=0\qquad \frac{df}{dp_{42}}=0\qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,\quad \frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,$$

которыя не выполняютъ уравненія, слѣдующаго также изъ (19):

$$\frac{dF}{dp_{23}}\cdot\frac{df}{dp_{12}}-\frac{dF}{dp_{12}}\cdot\frac{df}{dp_{23}}=0.$$

Постороннія рѣшенія эти должны быть отброшены при подсчетѣ порядка и класса пары. Но при этомъ мы дважды отбрасываемъ пары:

$$\frac{dF}{dp_{13}}=0 \quad \frac{df}{dp_{13}}=0 \quad \frac{dF}{dp_{34}}=0 \quad \frac{df}{dp_{34}}=0 \quad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0.$$

$$\frac{dF}{dp_{14}}=0 \quad \frac{df}{dp_{14}}=0 \quad \frac{dF}{dp_{42}}=0 \quad \frac{df}{dp_{42}}=0 \quad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0.$$

Поэтому порядокъ и классъ этихъ паръ должны быть добавлены. Такимъ образомъ въ концѣ концовъ получаемъ на основаніи теоремы о пересѣченіи пяти коннексовъ (x, u) [1]).

Точки основныхъ сочетаній (x, u) коинциденціи—пересѣченія двухъ трилинейныхъ коннексовъ образуютъ кривую 32-го порядка, а плоскости этихъ сочетаній огибаютъ развертывающуюся 32-го класса. Кривая эта проходитъ черезъ 20 точекъ основныхъ сочетаній (x, u) коннекса $f=0$ и черезъ 20 такихъ же точекъ коннекса $F=0$, а развертывающаяся касается 40 соотвѣтствующихъ плоскостей.

До сихъ поръ мы брали сочетанія (p, u), (x, p) и (x, u). Зададимся теперь прямою p^0. Въ разсматриваемой коинциденціи (13) этой прямой принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, u), пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ

$$f(x, p^0, u)=0, \quad F(x, p^0, u)=0. \tag{13}$$

Всѣмъ прямымъ пространства принадлежитъ такимъ образомъ ∞^4 такихъ коинциденцій (x, u), и по свойствамъ ихъ можно классифицировать прямыя.

Такъ прежде всего каждая коинциденція имѣетъ основной тетраэдръ, четыре вершины и четыре грани котораго преобразуются одинаково въ коллинеаціяхъ, устанавливаемыхъ тѣмъ и другимъ билинейнымъ коннексомъ. Тетраэдръ этотъ можетъ быть вполнѣ вещественный, или же нѣкоторые или даже всѣ его элементы могутъ быть мнимыми, наконецъ возможны его вырожденія. Отсюда является средство классифицировать коинденціи (x, u), а слѣдовательно, и прямыя, которымъ онѣ принадлежатъ въ (13).

Четыре основныя точки для коинциденціи

$$f(x, u)=a_x u_\alpha=0, \quad F(x, u)=a'_x u'_\alpha=0$$

[1]) Теорія коннексовъ, стр. 23.

опредѣляются изъ уравненій

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

что даетъ уравненіе 4-й степени для λ/μ:

$$0 = (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)\lambda^4 + 4(a'bcd)(\alpha'\beta\gamma\delta)\lambda^3\mu +$$
$$+ 6(abc'd')(\alpha\beta\gamma'\delta')\lambda^2\mu^2 + 4(ab'c'd')(\alpha\beta'\gamma'\delta')\lambda\mu^3 + (a'b'c'd')(\alpha'\beta'\gamma'\delta')\mu^4.$$

Примѣняя къ нашей коинциденціи, соотвѣтствующей прямой p, получимъ:

$$0 = \lambda^4(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)(\mathfrak{c}\mathfrak{c}pp)(\mathfrak{d}\mathfrak{d}pp)(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) +$$
$$+ 4(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'pp)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)(\mathfrak{c}\mathfrak{c}pp)(\mathfrak{d}\mathfrak{d}pp)(a'bcd)(\alpha'\beta\gamma\delta)\lambda^3\mu +$$
$$+ 6\lambda^2\mu^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)(abc'd')(\alpha\beta\gamma'\delta') +$$
$$+ 4(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'pp)(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)(ab'c'd')(\alpha\beta'\gamma'\delta')\lambda\mu^3 +$$
$$+ (\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'pp)(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'pp)(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)(a'b'c'd')(\alpha'\beta'\gamma'\delta')\mu^4.$$

Отдѣльные коэффиціенты суть совмѣстные коваріанты двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Приведу еще только одинъ примѣръ установленія подобнаго совмѣстнаго коваріанта.

Возьмемъ простѣйшій совмѣстный инваріантъ двухъ билинейныхъ кватернарныхъ формъ

$$f(x, u) = a_x u_\alpha \quad \text{и} \quad F(x, u) = a'_x u'_\alpha,$$

именно

$$j = a_{\alpha'} a'_\alpha = \sum_i \sum_k a_{ik} a'_{ki}.$$

Геометрическое его значеніе заключается въ томъ, что при $j = 0$ произведенія коллинеацій $f = 0$, $F = 0$ и лѣвое и правое: fF и Ff находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, т. е. если $f(x, u) = 0$ переводитъ точки A, B, C, D, въ A_1, B_1, C_1, D_1, а $F(x, u) = 0$ въ точки A_2, B_2, C_2, D_2, затѣмъ производя сначала коллинеацію, устанавливаемую $f(x, u) = 0$, а потомъ коллинеацію $F(x, u) = 0$ переведемъ A, B, C, D, въ $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$, а при обратномъ порядкѣ выполненіе этихъ коллинеарныхъ преобразованій въ $A_{2,1}$, $B_{2,1}$, $C_{2,1}$, $D_{2,1}$, то оба тетраэдра A_{12} B_{12} C_{12} D_{12} и A_{21} B_{21} C_{21} D_{21} вписаны въ тетраэдръ $ABCD$, т. е. A_{12} и A_{21} лежатъ въ плоскости BCD и т. д.

Томъ VIII, №№ 4 и 5.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 6.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

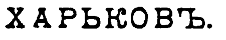
ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 6.

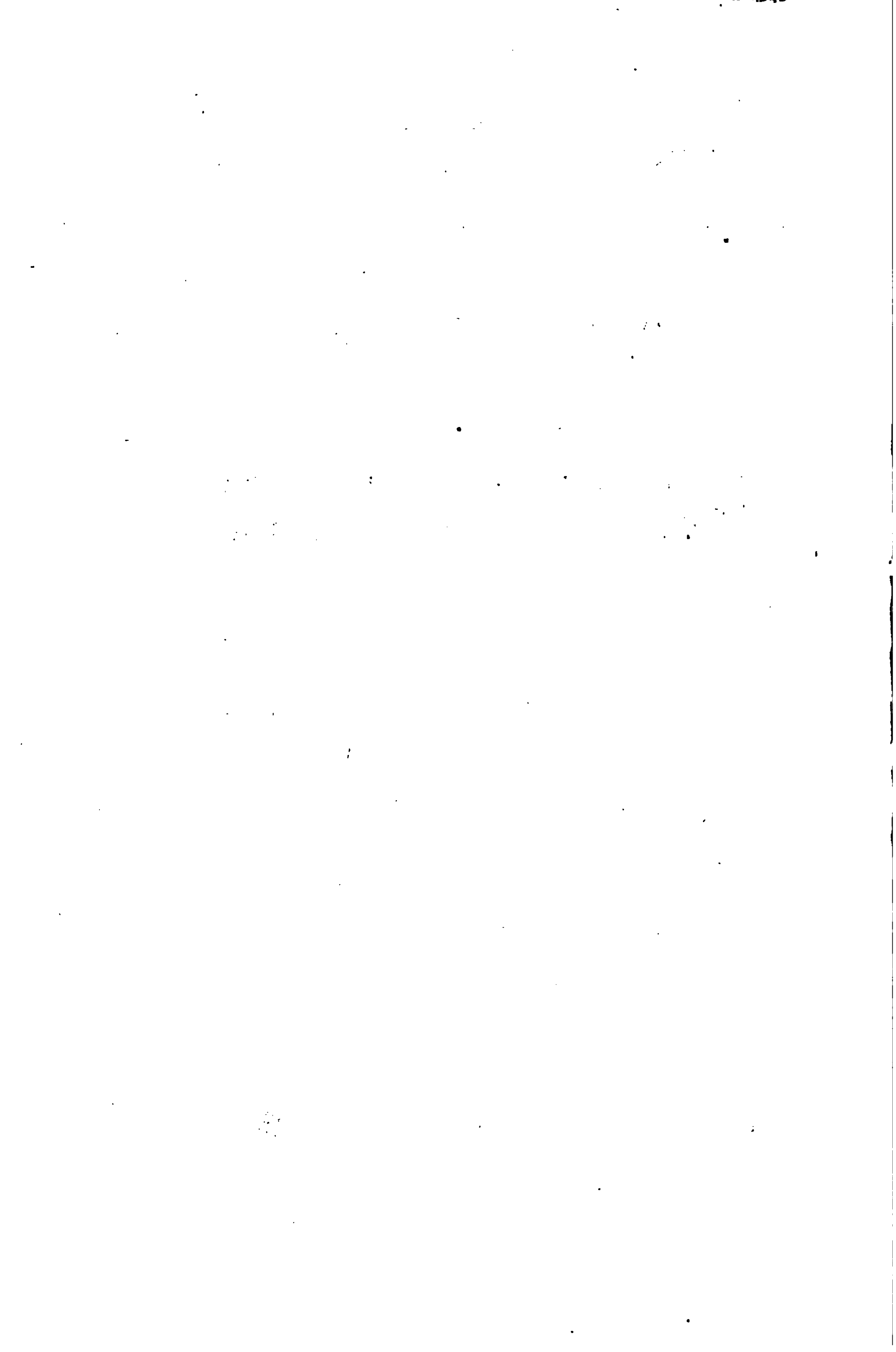


ХАРЬКОВЪ.



Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1904.





Составляя такой совмѣстный инваріантъ для коллинеацій, принадлежащихъ въ коинциденціи (13) прямой p, получимъ: прямыя, принадлежащая которымъ коинциденція (x, u) находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, образуютъ комплексъ 2 ранга:

$$(\mathrm{aa}pp)\,(\mathrm{a'a'}pp)\,a'_\alpha\,a_{\alpha'} = 0\,.$$

Плоскости u принадлежитъ ∞^5 сочетаній (x, p), образующихъ коинциденцію—пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ (x, p), и точкѣ x — ∞^5 сочетаній (p, u), образующихъ коинциденцію пересѣченія двухъ билинейныхъ коннексовъ (p, u).

Чтобы воспользоваться этимъ сведеніемъ на болѣе простыя образованія для изученія самой коинциденціи (13), нужно предварительно ознакомиться ближе со свойствами этихъ послѣднихъ болѣе простыхъ образованій, пока еще очень мало изученныхъ. Ограничимся поэтому въ настоящей статьѣ только указаніемъ на этотъ пріемъ сведенія.

3. Двойная коинциденція—пересѣченіе трехъ трилинейныхъ коннексовъ:

$$f(xpu) = 0\,, \qquad F(xpu) = 0\,, \qquad \Phi(xpu) = 0\,. \tag{15}$$

Сочетанію (p, u) принадлежитъ, вообще говоря, совершенно опредѣленная точка x съ координатами

$$\varrho x_i = (\,\mathrm{aa}\,pp)\,(\,\mathrm{a'a'}\,pp)\,(\mathrm{a''a''}\,pp) u_\alpha u_{\alpha'} u_{\alpha''} (aa'a'')_i$$

гдѣ такимъ образомъ символически изображенъ опредѣлитель матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} & \frac{dF}{dx_4} \\ \frac{d\Phi}{dx_1} & \frac{d\Phi}{dx_2} & \frac{d\Phi}{dx_3} & \frac{d\Phi}{dx_4} \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ подобнымъ образомъ совершенно опредѣленная вообще плоскость u, координаты которой пропорціональны опредѣлителямъ матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{df}{du_1} & \frac{df}{du_2} & \frac{df}{du_3} & \frac{df}{du_4} \\ \frac{dF}{du_1} & \frac{dF}{du_2} & \frac{dF}{du_3} & \frac{dF}{du_4} \\ \frac{d\Phi}{du_1} & \frac{d\Phi}{du_2} & \frac{d\Phi}{du_3} & \frac{d\Phi}{du_4} \end{array} \right\| \qquad (17)$$

или символически.

$$\sigma . u_i = (\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)(\mathrm{a}''\mathrm{a}''pp)\, a_x a'_x a''_x (\alpha\alpha'\alpha'')_i .$$

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга—пересѣченіе трехъ линейныхъ комплексовъ принадлежащихъ сочетанію (x, u) въ коннексахъ $f=0$, $F=0$ и $\Phi=0$.

Одна и таже точка принадлежитъ безчисленному множеству сочетаній (p, u). Если зададимся точкою x, то ей будутъ принадлежать ∞^4 сочетаній (p, u), образующихъ бикоинциденцію (p, u), въ которой плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга, прямой—одна плоскость, плоскостямъ пучка—конгруэнція 3 ранга, плоскостямъ связки—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—развертывающаяся 3. класса и прямымъ связки (поля)—поверхность 3. класса.

Если зададимся прямою, то ей принадлежитъ бикоинциденція ∞^3 сочетаній (x, u), въ которой точкѣ принадлежитъ плоскость, плоскости—точка, точкамъ прямой—развертывающаяся 3. класса, точкамъ плоскости поверхность 3. класса, плоскостямъ пучка—кривая двойной кривизны 3. порядка и плоскостямъ связки—поверхность 3. порядка.

Наконецъ плоскости u принадлежитъ ∞^4 сочетаній (x, p) образующихъ бикоинциденцію этихъ сочетаній, въ которой прямой принадлежитъ опредѣленная точка, точкѣ—линейчатая поверхность 2. ранга, точкамъ прямой—конгруэнція 3. ранга, точками плоскости—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—кривая 3 порядка (двоякой кривизны), прямымъ связки—поверхность 3. порядка.

До сихъ поръ мы говорили относительно обыкновенныхъ сочетаній.

Обращаясь къ *основнымъ сочетаніямъ,* опредѣлимъ прежде всего основныя сочетанія (p, u). Каждому такому сочетанію должна принадлежать въ двойной коинциденціи не одна точка, а безчисленное множество.

Таковы будутъ прежде всего сочетанія (p, u), основныя въ одномъ изъ трехъ трилинейныхъ коннексовъ $f=0$, $F=0$ или $\Phi=0$; во вторыхъ тѣ, которыя будутъ основными сочетаніями въ одной изъ простыхъ коинциденцій, образуемыхъ двумя какими-либо изъ трехъ этихъ коннексовъ. Наконецъ, основными сочетаніями (p, u) будутъ тѣ, для которыхъ

три плоскости, подчиняемыя этому сочетанію коннексами $f=0$, $F=0$ $\Phi=0$, проходятъ черезъ одну прямую. Для этого должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы (16).

Независимыхъ между ними только два, и мы получаемъ такимъ образомъ что основныя сочетанія (p, u) для (15) имѣются въ количествѣ ∞^5 и образуютъ коинциденцію (p, u).

Характеристики этой коинциденціи опредѣлимъ замѣтивъ, что если взять два какіе нибудь опредѣлителя матрицы (16) и приравнять нулю, то введемъ лишнюю коинциденцію сочетаній, которыя дѣлаютъ равными два столбца, общіе этимъ двумъ опредѣлителямъ, но не могутъ обратить въ нуль вообще двухъ остальныхъ опредѣлителей матрицы.

Мы получимъ такимъ образомъ, что въ коинциденціи основныхъ сочетаній (p, u) прямой принадлежитъ развертывающаяся 6 класса, плоскости конгруэнція 6 ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 класса, и плоскостямъ пучка—комплексъ 12 ранга.

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ, что ∞^5 основныхъ сочетаній (x, p) образуютъ коинциденцію, въ которой прямой принадлежитъ кривая двоякой кривизны 6. порядка, точкѣ—конгруэнція 6. ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 порядка и точкамъ прямолинейнаго ряда—комплексъ 12. ранга.

Основныя сочетанія (x, u) должны обращать въ нуль всѣ 15 опредѣлителей матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial p_{jl}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial p_{jl}} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_{jl}} \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (jl=1,2,3,4) \qquad (18)$$

Независимыхъ между ними четыре: основныхъ сочетаній (x, u) двойная коинциденція (15) имѣетъ ∞^2, образующихъ пару поверхностей. Порядокъ и классъ этихъ поверхностей опредѣлятся равными 36, а рангъ пары, т. е. порядокъ кривой, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка, и классъ развертывающейся, принадлежащей точкамъ даннаго прямолинейнаго ряда, равенъ 54.

4. Если обратимся теперь къ тройной коинциденціи, опредѣляемой пересѣченіемъ четырехъ трилинейныхъ коннексовъ, то замѣтимъ что основныхъ сочетаній (x, p) и (p, u), здѣсь уже не существуетъ, и до извѣстной степени можно сказать, что основнымъ сочетаніямъ предыдущихъ конфигурацій здѣсь соотвѣтствуютъ обыкновенныя сочетанія,—та-

кія, которыя даютъ элементы опредѣляемой коинциденціи. Дѣйствительно, если имѣемъ четыре трилинейныхъ коннекса

$$f(xpu)=0\,,\quad g(xpu)=0\,,\quad F(xpu)=0\,,\quad \Phi(xpu)=0\,,$$

то произвольному взятому сочетанію не соотвѣтствуетъ вообще говоря ни одной точки, произвольно взятое сочетаніе $(x\,,\,p)$ или $(p\,,\,u)$ не входитъ вообще говоря въ составъ ни одного элемента конфигураціи. Только тѣ сочетанія $(p\,,\,u)$ изъ общаго ихъ многообразія ∞^7 входятъ въ составъ элемента конфигурацій, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)=0$$

или символически

$$0=(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)(\mathrm{a''a''}pp)(\mathrm{a'''a'''}pp)\,u_\alpha u_{\alpha'} u_{\alpha''} u_{\alpha'''}(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') \qquad (19)$$

и слѣдовательно, принадлежатъ коннексу $(p\,,\,u)$ 4 ранга и 4 класса.

Точно также только тѣ сочетанія $(x\,,\,p)$ входятъ въ составъ элементовъ конфигураціи, которыя принадлежатъ коннексу $(x\,,\,p)$ 4 порядка и 4 ранга

$$0=a_x a'_x a''_x a'''_x\,(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)(\mathrm{a''a''}pp)(\mathrm{a'''a'''}pp)(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') \qquad (20)$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_4}\right)=0\,.$$

Если обратимся къ сочетаніямъ $(x\,,\,u)$, то замѣтимъ что каждому такому сочетанію принадлежатъ двѣ прямыхъ—прямыя пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ. Слѣдовательно, въ тройной коинциденціи только сочетанія $(x\,,\,u)$ и могутъ быть основными: для этого необходимо, чтобы принадлежащія такому сочетанію четыре линейныхъ комплекса имѣли общую линейчатую поверхность. Для этого должны обращаться въ нуль опредѣлители матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ этихъ четырехъ комплексовъ, что даетъ три независимыхъ условія: *тройная коинциденція — пересѣченіе четырехъ трилинейныхъ коннексовъ—имѣетъ M_3 основныхъ сочетаній $(x\,,\,u)$, образующихъ бикоинциденцію съ характеристиками (64, 192, 192, 64).*

5. Мы здѣсь ограничивались общими случаями, т. е. случаями, когда между коэффиціентами уравненій, опредѣляющихъ конфигураціи, не существуетъ связей. Но было бы, конечно, весьма важно, особенно въ виду дальнѣйшихъ приложеній, остановиться на случаяхъ вырожденій трилинейныхъ коннексовъ и ихъ коинциденцій.

Укажемъ только на нѣкоторые отдѣльные случаи. Трилинейный коннексъ имѣетъ вершину $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ координатнаго тетраэдра основною точкою, если его уравненіе имѣетъ видъ

$$x_1 f_1(p, u) + x_2 f_2(p, u) + x_3 f_3(p, u) = 0 \qquad (a)$$

къ такому виду помощію преобразованія координатъ можетъ быть сведено уравненіе всякаго трилинейнаго коннекса, имѣющаго основную точку, и слѣдовательно, вообще это уравненіе напишется

$$\alpha_x . f_1(p, u) + \beta_x . f_2(p, u) + \gamma_x . f_3(p, u) = 0 \qquad (a')$$

гдѣ α_x, β_x и γ_x означаютъ линейные однородные многочлены отъ $x_1 \ldots x_4$.

Замѣтимъ, что трилинейный коннексъ (a) имѣетъ уже не ∞^3 основныхъ сочетаній, а ∞^4, они опредѣляются уравненіями

$$f_1(p, u) = 0, \quad f_2(p, u) = 0, \quad f_3(p, u) = 0$$

и слѣдовательно образуютъ бикоинциденцію съ характеристиками *(1, 3, 3, 1)*.

Если многочлены α_x, β_x и γ_x связаны линейнымъ соотношеніемъ съ постоянными коэффиціентами, то преобразованіемъ координатъ можно уравненіе коннекса привести къ виду

$$x_1 . f_1(p, u) + x_2 . f_2(p, u) = 0.$$

Здѣсь каждая точка прямой—ребра ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) координатнаго тетраэдра будетъ основною, и такой коннексъ имѣетъ основныхъ сочетаній (p, u) ∞^5, образующихъ коинциденцію (1, 2, 1).

Наконецъ ∞^2 основныхъ точекъ—которыя притомъ составятъ плоскость,—трилинейный коннексъ можетъ имѣть только тогда, когда уравненіе его распадается:

$$\alpha_x . f(p, u) = 0.$$

Совершенно аналогичны двойственные случаи наличности одной основной плоскости, или пучка плоскостей или наконецъ связки плоскостей,—въ послѣднемъ случаѣ въ уравненіи коннекса долженъ выдѣляться множитель 1-й степени относительно u.

Комплексъ (4), о которомъ мы говорили въ началѣ этого §-а при этомъ уничтожается тождественно.

Аналогичныя замѣчанія могутъ быть сдѣланы и относительно основныхъ прямыхъ.

Трилинейный коннексъ можетъ имѣть пару основныхъ прямыхъ,— если 16 линейныхъ комплексовъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ всѣ таковы, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} = \lambda_{ik}\varphi_1 + \mu_{ik}\varphi_2 + \nu_{ik}\varphi_3 + \sigma_{ik}\varphi_4.$$

Далѣе всѣ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ могутъ быть выражены какъ линейныя функціи однихъ и тѣхъ же трехъ линейныхъ функцій отъ p, — тогда основныя прямыя образуютъ линейчатую поверхность 2 ранга, или наконецъ двухъ,— когда основныя прямыя образуютъ линейчатую конгруэнцію—пересѣченіе двухъ этихъ комплексовъ.

6. Остановимся теперь на значеніи въ теоріи коннексовъ (x, p, u) уравненій не содержащихъ одного ряда перемѣнныхъ, и притомъ на тѣхъ уравненіяхъ въ особенности, которыя выражаютъ соединенное положеніе точки, прямой, плоскости между собою.

Вообще говоря, уравненіе $f(x, u) = 0$, изображающее коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), представляетъ теперь, когда за элементъ принимаемъ соединеніе (точка, прямая, плоскость), коннексъ (x, p, u), которому принадлежатъ такіе элементы (x, p, u), которыхъ прямая произвольна, а сочетаніе (x, u) должно принадлежать коннексу $f(x, u) = 0$. Такой коннексъ слѣдовательно имѣетъ ∞^5 основныхъ сочетаній (x, u) и ни одного не основнаго.

Въ частности уравненіе $u_x = (ux) = \sum u_i x_i = 0$ тождественнаго коннекса (x, u) удовлетворяется такими элементами (x, p, u), которыхъ точка x лежитъ въ плоскости u, а прямая можетъ быть совершенно произвольна. Каждое изъ ∞^5 сочетаній (x, u) въ соединенномъ положеніи дастъ начало ∞^4 элементовъ (x, p, u) этого коннекса и никакихъ другихъ элементовъ принадлежащихъ $u_x = 0$ не существуетъ.

Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ условіями соединеннаго положенія точки и прямой.

Прежде всего условій этихъ не одно, а четыре выражаемыхъ уничтоженіемъ опредѣлителей матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix} \right\| = 0 \tag{21}$$

изъ которыхъ независимы только два.

Разъ точка и прямая находятся въ соединеніи то къ каждому изъ такихъ ∞^5 сочетаній можетъ быть добавлена каждая изъ ∞^3 плоскостей пространства.

Но чтобы получить только тѣ элементы (x, p, u), которыхъ сочетаніе (x, p) находится въ соединеніи, недостаточно разсматривать только два какія либо изъ указанныхъ опредѣлителей, а нужно одновременно разсматривать всѣ четыре.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ одно которое-нибудь изъ четырехъ уравненій (21), напримѣръ,

$$(xpp)_1 = x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0.$$
$$= \pi_{12} x_2 + \pi_{13} x_3 + \pi_{14} x_4 = 0. \qquad (A)$$

Оно изображаетъ конфигурацію такого характера.

Точкѣ x пространства, принадлежитъ вообще спеціальный линейный комплексъ (въ самомъ дѣлѣ для этого комплекса коэффиціенты при p_{12}, p_{13} и p_{14} равны нулю и слѣд., инваріантъ $c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23}$ обращается въ нуль). Этотъ спеціальный комплексъ образуется прямыми, лежащими въ плоскостяхъ проходящихъ черезъ точку x и черезъ вершину $u_1 = 0$ или $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, координатнаго тетраэдра и слѣдовательно, встрѣчающими прямую, соединяющую двѣ эти точки.

Комплексъ этотъ будетъ одинъ и тотъ же для всѣхъ точекъ такой прямой, за исключеніемъ только точки $u_1 = 0$ или $(x_4 = x_2 = x_3 = 0)$, для которой ось коннекса становится неопредѣленною, и съ которою элементъ конфигураціи составляетъ каждая прямая пространства, эта вершина координатнаго тетраэдра есть основная точка коннекса (A).

Если зададимся прямою p, то ей принадлежитъ плоскость, проведенная черезъ прямую и черезъ туже вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра—т. е. каждая точка x этой плоскости даетъ вмѣстѣ съ взятою прямою элементъ коннекса (A). Если однако прямая взятая проходитъ черезъ вершину $u_1 = 1$, то плоскость—мѣсто точекъ x—становится неопредѣленною: всѣ прямыя

$$p_{34} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{23} = 0$$

которыя въ количествѣ ∞^2 образуютъ указанную связку, суть основныя прямыя коннекса (A).

Подобнымъ образомъ уравненіе

$$(xpp)_2 = x_1 p_{34} + x_3 p_{41} + x_4 p_{12} = 0 \qquad (B)$$

представляетъ коннексъ, въ которомъ точкѣ x принадлежитъ спеціальный линейный комплексъ, составленный прямыми, встрѣчающими прямую

$(x, u_2 = 0)$, и прямой—точки плоскости, проведенной черезъ эту прямую и туже вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра, и основными прямыми—прямыя связки, имѣющей ее центромъ.

Если возьмемъ оба уравненія (A) и (B), то вмѣстѣ они опредѣлятъ коинциденцію сочетаній (x, p). Если теперь задаться точкою x, то соотвѣтственная прямая p должна встрѣчать прямую $(x, u_1 = 0)$ и прямую $(x, u_2 = 0)$,—т. е. это будутъ 1° прямыя проходящія черезъ x, 2° прямыя, лежащія въ плоскости, опредѣленной точками x, $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$. Но если точка x лежитъ на прямой $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, т. е. если изъ ея координатъ $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то всякая прямая встрѣчающая эту прямую составляетъ съ такою точкою элементъ коинциденціи (A), (B). Такимъ образомъ всѣ точки прямой $(u_1 = 0, u_2 = 0)$ суть основныя точки коинциденціи.

Если зададимся прямой p, то соотвѣтствующія точки x должны лежать въ плоскостяхъ $(p, u_1 = 0)$ и $(p, u_2 = 0)$ т. е. должны лежать на прямой p, ихъ пересѣченіи. Но если прямая p встрѣчаетъ ось $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, т. е. лежитъ въ одной изъ плоскостей пучка $\lambda u_1 + \varkappa u_2 = 0$, то каждая изъ точекъ этой плоскости составляетъ съ нею элементъ коиндиденціи, каждая такая прямая будетъ основною. Условіе этого $p_{34} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ при этомъ (A) и (B) сводятся къ

$$x_3 p_{12} + x_4 p_{23} = 0, \quad x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0$$

которыя будутъ совмѣстны при всякихъ p,— ибо исключая x_3 x_4 имѣемъ

$$p_{42} \cdot p_{13} - p_{23} \cdot p_{41} = p_{13} p_{42} + p_{14} p_{13} = 0, —$$

въ силу $p_{34} = 0$ къ этому сводится основное уравненіе

$$(p, p) = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0.$$

Итакъ получаемъ ∞^3 основныхъ прямыхъ,

Отсюда видимъ, сколько два взятыя уравненія (A) и (B) допускаютъ лишнихъ рѣшеній, кромѣ элементовъ (x, p) въ соединеніи.

Добавимъ теперь третье уравненіе (E)

$$(xpp)_3 = x_1 p_{24} + x_2 p_{41} + x_4 p_{12} = 0.$$

Съ точкою x составляютъ элементъ конфигураціи тѣ прямыя, которыя встрѣчаютъ три сходящихся въ точкѣ x прямыхъ, соединяющихъ x съ вершинами $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ координатнаго тетраэдра. Слѣдовательно, если x не лежитъ въ плоскости этихъ трехъ вершинъ, то прямыми, принадлежащими конфигураціи, могутъ быть только прямыя,

проходящія черезъ самую точку x. Но если точка x лежитъ въ плоскости $x_4 = 0$ координатнаго тетраэдра, то кромѣ вышеупомянутыхъ всякая прямая, лежащая въ той же плоскости, пересѣчетъ три прямыя $(x, u_1 = 0)$, $(x, u_2 = 0)$, $(x, u_3 = 0)$ и будетъ вмѣстѣ съ x составлять элементъ конфигураціи. Точки плоскости $x_4 = 0$ обладаютъ теперь тѣмъ свойствомъ, которое при опредѣленіи коинциденціи одними уравненіями (A) и (B) принадлежало всѣмъ точкамъ пространства.

Если возьмемъ точку ребра координатнаго тетраэдра, лежащаго въ грани его $x_4 = 0$,—напр., точку ребра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

то уравненіе (A), (B), (C) примутъ видъ

$$x_2 . p_{34} = 0, \quad x_1 . p_{34} = 0, \quad x_1 . p_{24} + x_2 . p_{41} = 0$$

которыя—при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ приводятся къ двумъ

$$p_{34} = 0, \quad x_1 p_{24} + x_2 p_{41} = 0.$$

Такимъ образомъ такой точкѣ принадлежитъ снова ∞^2 прямыхъ, точка ребра основной не будетъ, съ нею могутъ быть соединены прямыя связки съ центромъ въ $(x_1, x_2, 0, 0)$ и прямыя плоскости $x_4 = 0$.

Если наконецъ возьмемъ вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра то $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и (A) удовлетворяется тождественно, а (B) и (C) приводятся къ $x_1 p_{34} = 0$, $x_1 p_{24} = 0$, и такъ какъ $x_1 \neq 0$, то должно быть $p_{34} = 0$, $p_{24} = 0$.

Основное соотношеніе $(p, p) = 0$ даетъ тогда

$$p_{14} . p_{32} = 0 .$$

и такимъ образомъ имѣемъ одну изъ двухъ системъ

$$p_{34} = p_{24} = p_{14} = 0 \qquad \text{или же} \qquad p_{23} = p_{34} = p_{42} = 0.$$

Снова получаемъ ∞^2 прямыхъ, и вершина координатнаго тетраэдра основною точкою не будетъ.

Задаемся прямою p. Точки, принадлежащія этой прямой въ силу (A), (B), (C), должны принадлежать одновременно тремъ плоскостямъ, проведеннымъ черезъ прямую p и черезъ вершины $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ и $u_3 = 0$ координатнаго тетраэдра. Если три эти плоскости различны, или сводятся къ двумъ,—когда прямая p встрѣчаетъ ребро тетраэдра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \qquad \text{или} \qquad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

то x можетъ быть только точкою пересѣченія этихъ плоскостей, т. е. должна лежать на взятой прямой p. Но если p лежитъ въ плоскости трехъ помянутыхъ вершинъ (т. е. въ плоскости $x_4 = 0$ въ нашемъ случаѣ) то всѣ три плоскости сливаются въ одну, и каждая точка этой плоскости можетъ быть соединяема съ такою прямою въ элементъ конфигураціи. Итакъ получимъ что и при добавленіи 3-го уравненія получается еще ∞^2 основныхъ прямыхъ.

Возьмемъ наконецъ всѣ четыре уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &+ x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0\,, \\ x_1 p_{34} &+ \qquad + x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0\,, \\ x_1 p_{24} &+ x_2 p_{41} + \qquad + x_4 p_{12} = 0\,, \\ x_1 p_{23} &+ x_2 p_{31} + x_3 p_{12} + \qquad = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (21')$$

Теперь заданной прямой принадлежатъ точки, лежащія одновременно въ четырехъ плоскостяхъ,—проходящихъ черезъ взятую прямую и черезъ вершины координатнаго тетраэдра. Если даже прямая лежитъ въ одной изъ граней этого тетраэдра или совпадаетъ съ однимъ изъ его реберъ, то изъ четырехъ плоскостей двѣ будутъ различны и слѣдовательно, точки, дающія элементъ конфигураціи со взятою прямой должны непремѣнно лежать на самой прямой. Основныхъ прямыхъ нѣтъ. Если зададимся точкою, то принадлежащія ей прямыя должны встрѣчать четыре прямыхъ, соединяющихъ точку съ вершинами координатнаго тетраэдра; прямыя эти могутъ сводиться къ тремъ, не лежащимъ въ одной плоскости, если точка лежитъ въ одной изъ граней, на одномъ изъ реберъ или совпадаетъ съ одною изъ вершинъ этого тетраэдра, но во всякомъ случаѣ искомыя прямыя могутъ быть только прямыя, проходящія черезъ самую взятую точку.

Итакъ постороннія рѣшенія устраняются вполнѣ только при одновременномъ привлеченіи всѣхъ четырехъ уравненій (21′).

Совершенно аналогично убѣдимся что уравненія, выражающія соединенное положеніе прямой и плоскости

$$\left.\begin{aligned} &+ u_2 \pi_{34} + u_3 \pi_{42} + u_4 \pi_{23} = 0\,, \\ u_1 \pi_{34} &+ \qquad + u_3 \pi_{41} + u_4 \pi_{13} = 0\,, \\ u_1 \pi_{24} &+ u_2 \pi_{41} + \qquad + u_4 \pi_{12} = 0\,, \\ u_1 \pi_{23} &+ u_2 \pi_{31} + u_3 \pi_{12} + \qquad = 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

должны быть приняты во вниманіе всѣ четыре для того, чтобы со всякою плоскостью могли быть соединены только прямыя, въ ней лежащія, и со всякою прямою только плоскости, черезъ прямую проходящія.

Наконецъ замѣтимъ, что если хотимъ изъ всѣхъ ∞^{10} элементовъ (x, p, u) пространства выдѣлить тѣ, въ которыхъ точка x, прямая p и плоскость u находятся въ соединеніи, то нужно взять уравненія (21′) и (22), а уравненіе $u_x = 0$ уже въ нихъ заключается и такимъ образомъ получимъ ∞^6 элементовъ, которыхъ точка лежитъ на прямой и прямая лежитъ въ плоскости.

§ III.

Особенные элементы.

1. Если сочетаніе (p, u) не будетъ основнымъ, ему принадлежитъ въ силу уравненія коннекса

$$f(x, p, u) = 0 \tag{1}$$

опредѣленная поверхность X_{pu} порядка m (если f — степени m относительно x).

Если (1) имѣетъ основную точку, то всѣ поверхности X_{pu} проходятъ черезъ эту точку. Если (x, p) или (x, u) суть основныя сочетанія, то черезъ точку x проходятъ всѣ X_{pu} въ которыхъ p, resp. u суть прямая (или плоскость) основного сочетанія.

Изъ точекъ поверхности X_{pu} выдѣляются ея особенныя точки, онѣ даютъ начало кратнымъ элементамъ коннекса: каждую особенную точку можемъ считать соединеніемъ нѣсколькихъ обыкновенныхъ, стало быть и элементъ (x, p, u) коннекса (1), содержащій эту точку, явится кратнымъ элементомъ коннекса по отношенію къ точкѣ или *точечнымъ особеннымъ* элементомъ. Касательная къ X_{pu} въ ея точкѣ x

$$\sum X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

въ случаѣ точечно-особеннаго элемента становится неопредѣленною, потому что для особенной точкѣ поверхности X_{pu} должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \tag{3}$$

Вмѣсто (2) будемъ поэтому имѣть уравненіе

$$\sum X_i X_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \tag{4}$$

которое изображаетъ при этомъ конусъ, потому что изъ (3) слѣдуетъ, что гессіенъ (1) въ отношеніи x_i равенъ нулю:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| = a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} d_x^{m-2} (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)(\mathfrak{cc}pp)(\mathfrak{dd}pp)\, u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n u_\delta^n = 0. \quad (5)$$

Уравненія (3) опредѣляютъ ∞^6 элементовъ (x, p, u). Произвольно задать прямую p и плоскость u мы для общаго коннекса не можемъ. Сочетанія (p, u), принадлежащія которымъ поверхности X_{pu} обладаютъ особенною точкою, образуютъ по предыдущему коннексъ ранга $4(m-1)^3 r$ и класса $4(m-1)^3 n$. Каждая точка пространства является особенною точкою на поверхностяхъ X_{pu} принадлежащихъ ∞^3 сочетаніямъ (p, u) образующимъ пару (комплексъ ранга $4rn^3$, плоскостное пространство), въ которой каждой плоскости принадлежитъ $2r^4$ прямыхъ. Если зададимся прямою, то плоскости u огибаютъ поверхность $4(m-1)^3 n$ класса, а принадлежащія всѣмъ такимъ сочетаніямъ: (данная прямая, касательная къ этой поверхности) особенныя точки соотвѣтствующихъ X_{pu} покрываютъ поверхность порядка $4(m-1)^3 n$.

Если и всѣ вторыя производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ обращаются въ нуль, а производныя 3-го порядка въ 0 не обращаются, имѣемъ высшую особенность—касательныя къ такой точкѣ x къ X_{pu} огибаютъ конусъ 3-го порядка,—такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n), заданный общимъ уравненіемъ, содержитъ $13440(m-2)^3 r^4 n^3$.

2. Аналогично можно установить понятіе объ элементахъ, особенныхъ по отношенію плоскости — *плоскостныхъ особенныхъ элементахъ.* Такое наименованіе будемъ придавать тѣмъ элементамъ (x, p, u), которыхъ плоскость u есть особенная касательная поверхности U_{xp}, принадлежащей сочетанію (x, p) въ коннексѣ (1). Плоскости эти при данныхъ (x, p) опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial f(xpu)}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_4} = 0 \quad (6)$$

которые вообще говоря совмѣстными при данныхъ (x, p) не будутъ.

Но предполагая, что x и p могутъ принимать всевозможныя значенія, получимъ: *плоскостные особенные элементы коннекса (m, r, n) образуютъ тройную коинциденцію съ характеристиками*

$$4m^3 r,\ 4m^3(n-1),\ 6m^2 r^2,\ 12m^2 r(n-1),\ 6m^2(n-1)^2,$$
$$4mr^3,\ 12mr^2(n-1),\ 12mr(n-1)^2,\ 4m(n-1)^3,\ r^4,$$
$$4r^3(n-1),\ 6r^2(n-1)^2,\ 4r(n-1)^3, \quad (7)$$

значеніе которыхъ аналогично вышеприведеннымъ.

Для такихъ элементовъ уравненіе точки прикосновенія u и U_{xp}

$$\sum U_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \tag{8}$$

обращается тождественно въ нуль, и точки прикосновенія образуютъ въ плоскости u кривую 2-го класса

$$\sum U_i U_k \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} = 0 \tag{9}$$

потому что при выполненіи (6) опредѣлитель уравненія (9) обращается въ нуль:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} \right| = 0. \tag{10}$$

Мы предположили при этомъ, что не всѣ производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ обращаются въ нуль.

Если же всѣ эти производныя обращаются въ 0, имѣемъ высшую особенность. Такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n), котораго коэффиціенты не связаны никакими добавочными соотношеніями содержитъ конечное число $13440 m^3 r^4 (n-2)^3$.

При этомъ конечно предполагаемъ, что всѣ производныя 3-го порядка по x одновременно въ 0 не обращаются,—что и будетъ имѣть мѣсто для коннекса, заданнаго общимъ уравненіемъ.

3. Прежде чѣмъ говорить объ элементахъ коннекса (x, p, u), представляющихъ особенность относительно прямой, укажемъ на обстоятельство, которое встрѣчается и въ другихъ коннексахъ, именно на роль основныхъ сочетаній по отношенію къ точечнымъ и плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.

Пусть (p, u) есть основное сочетаніе коннекса (m, r, n)

$$f(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Тогда согласно самому опредѣленію основныхъ сочетаній при замѣнѣ x_i черезъ $x_i + \varepsilon x_i'$ (гдѣ x_i'—координаты какой нибудь совершенно произвольной точки) уравненіе также должно удовлетворяться при (p, u)—основномъ сочетаніи.

Итакъ при этомъ не только (1) выполнено, но и

$$f(x + \varepsilon x', p, u) = 0$$

или

$$f(x, p, u) + \varepsilon \sum x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \sum\nolimits_2 = 0.$$

Отбрасывая въ силу (1) 1-й членъ, раздѣляя на ε и переходя къ предѣлу $\varepsilon = 0$ получимъ: если (p, u) основное сочетаніе, то при совершенно произвольныхъ x'_i имѣемъ

$$\sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

а для этого необходимо должны обращаться въ нуль производныя, т. е. уравненія (3) выполнены. Итакъ: *если коннексъ (1) имѣетъ основное сочетаніе (p, u), то это сочетаніе въ соединеніи съ каждою точкою x пространства образуетъ элементъ удовлетворяющій уравненіямъ (3).*

Можно бы поэтому сказать, что *каждое основное сочетаніе (p, u) даетъ начало ∞^3 точечно-особенныхъ элементовъ,* но въ этомъ, — какъ уже приходилось говорить въ другомъ мѣстѣ [1], — является нѣкоторая натянутость: для основного сочетанія (p, u) уравненіе (1) удовлетворяется независимо отъ значеній x, уравненіе X_{pu} есть $0 = 0$.

Совершенно подобнымъ образомъ покажемъ, что *каждому основному сочетанію коннекса (1) соотвѣтствуетъ ∞^3 элементовъ (x, p, u), выполняющихъ уравненія (6).*

Поэтому въ дальнѣйшемъ прибѣгнемъ къ другому опредѣленію особенныхъ элементовъ. но предварительно закончимъ разборъ типовъ особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u).

4. Линейчатыми особенными элементами можно называть, — аналогично предыдущему, — тѣ элементы коннекса, которыхъ прямая есть особенная прямая коннекса K_{xu} принадлежащаго сочетанію (x, u) элемента.

Но при этомъ необходимо условиться относительно того, что называть особенными прямыми комплекса.

Koenigs [2]), слѣдуя Пашу, называетъ *особенными* прямыми комплекса $F = 0$ тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_{12}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{23}} = 0. \qquad (11)$$

Въ коннексѣ (m, r, n) элементовъ, которыхъ прямыя выполняютъ уравненіе (11), имѣется коинциденція, которой характеристики:

$$a_{200} = 2m^2, \quad a_{110} = 2m(2r - 1), \quad a_{101} = 4mn, \quad a_{020} = 2r(r - 1),$$
$$a_{110} = 2n(2r - 1), \quad a_{002} = 2n^2.$$

---

[1]) Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса § 1. Изв. Каз. Физ. Мат. Общ. 1902 г.

[2]) La géométrie réglée et ses applications, p. 77.

Въ послѣдующемъ намъ придется еще встрѣтиться съ этою коинциденціею. Замѣтимъ здѣсь, что пучекъ касательныхъ комплексовъ

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} P_{ik} + \lambda \sum \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = 0 \tag{12}$$

состоитъ для подобной прямой весь изъ спеціальныхъ комплексовъ, и всѣ оси этихъ комплексовъ образуютъ плоскій пучекъ.

Казалось бы однако болѣе правильнымъ давать подобнымъ прямымъ иное наименованіе, напримѣръ *спеціальныхъ*, сохраняя названіе особенныхъ прямыхъ для тѣхъ, свойства которыхъ имѣютъ большее сходство со свойствами особенныхъ точекъ кривыхъ линій и поверхностей.

Если линейчатое пространство изобразимъ въ плоскомъ пространствѣ пяти измѣреній квадратичнымъ M_4, то комплексъ p-го ранга выдѣлится изъ этого M_4 уравненіемъ p-ой степени между 5-ью координатами точки (или между 6-ью однородными), т. е. изобразится M_3—пересѣченіемъ двухъ M_4. Особенною точкою такого M_3 будетъ такая точка, въ которой два M_4 между собою касаются, и слѣдовательно, производныя ихъ уравненій по координатамъ пропорціональны.

Соотвѣтственно этому можемъ называть *особенною* прямою комплекса такую его прямую, которая выполняетъ шесть уравненій

$$\lambda' \frac{\partial F(p)}{\partial p_{ik}} + \mu' \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} = 0. \qquad (i,k=1,2,3,4) \tag{13}$$

Для такой прямой уравненіе пучка линейныхъ комплексовъ (12) приводится къ виду

$$\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'}\right) \sum \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'}\right)(p\,,\;P) = 0$$

т. е. сводится къ одному только спеціальному линейному комплексу, образуемому прямыми встрѣчающими „прямую прикосновенія“ p.

Уравненій (13) по исключеніи λ'/μ' пять, уравненіе комплекса въ силу (13) есть слѣдствіе основного уравненія $\frac{1}{2}(p\,,\;p) = 0$, слѣдовательно, такихъ особенныхъ прямыхъ комплексъ вообще не содержитъ а для существованія ихъ необходимо одно соотношеніе между коэффиціентами.

Другое свойство этихъ особенныхъ прямыхъ заключается въ слѣдующемъ. Линейные комплексы, содержащіе данную прямую p комплекса и находящіеся въ инволюціи съ каждымъ изъ касательныхъ по этой

прямой линейныхъ комплексовъ, образуютъ M_3—они опредѣляются уравненіями

$$(c\,,\,p)=0\,,\quad \sum c_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}=0.$$

Но для особенной прямой два эти уравненія сводятся къ одному, и линейные комплексы указаннаго свойства образуютъ уже M_4.

Для спеціальной же прямой (особенной по Koenigs'у) линейные комплексы эти образуютъ M_3 комплексовъ, содержащихъ двѣ данныхъ прямыхъ.

Очевидно, что каждая прямая, особенная въ указанномъ здѣсь смыслѣ, будетъ особенною и для Koenigs'a, т. е. будетъ также и спеціальною, но не обратно.

Принимая такое опредѣленіе особенныхъ прямыхъ можемъ ввести теперь понятіе о линейчатыхъ особенныхъ элементахъ коннекса (x, p, u).

Эти элементы опредѣляются слѣдовательно, уравненіями

$$\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{12}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}}{\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}}{\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}}{\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}}\qquad(14)$$

которыя могутъ быть замѣнены напримѣръ, такими

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{12}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\\
&\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}=0\,,\\
&\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,\qquad(15)\\
&\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0\,,\\
&\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}=0.
\end{aligned}$$

Къ уравненіямъ (14) должно быть конечно присоединено еще основное уравненіе $(p\,,\,p)=0$, и тогда уравненіе самаго коннекса есть слѣдствіе уравненій (14) и основного уравненія.

Чтобы опредѣлить характеристики этой четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ замѣтимъ, что переходъ отъ системы (14) къ системѣ (15) сопровождается введеніемъ излишнихъ рѣшеній, опредѣляемыхъ системами

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\\
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{dp_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,\\
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}=0\,,\\
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}=0\,,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

и еще тремя такими системами, въ которыхъ фигурируютъ послѣдовательно

$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}=0$ $\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{1k}}=0$ и 3 уравненія изъ системы (15)

$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}=0$ $\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0$ „ „ „ „

$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0$ $\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0.$ „ „ „ „

Но исключая эти системы мы дважды исключаемъ такія системы

1) $$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0\,,$$

2) $$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,.$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующимъ значеніямъ характеристикъ четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ коннекса (m, r, n):

$$\delta_{320} = m^3(10r^2 - 16r + 7), \quad \delta_{311} = 4m^3n(5r-4), \quad \delta_{302} = 10m^3n^2,$$

$$\delta_{230} = m^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{221} = 3m^2n(10r^2 - 16r + 7),$$

$$\delta_{212} = 6m^2n^2(5r-4), \quad \delta_{203} = 10m^2n^3,$$

$$\delta_{140} = m(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3),$$

$$\delta_{131} = 2mn(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{122} = 3mn^2(10r^2 - 16r + 7),$$

$$\delta_{113} = 4mn^3(5r-4), \quad \delta_{041} = n(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3),$$

$$\delta_{032} = n^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{023} = n^3(10r^2 - 16r + 7).$$

Не трудно убѣдиться, что уравненія (14) выполняются элементомъ (x, p, u), если (x, u) есть основное сочетаніе, а p — какая угодно прямая пространства.

Дѣйствительно, уравненіе коннекса, которое можно писать

$$f(xpu) + f_1(xpu)(p, p) = 0 \tag{1'}$$

[гдѣ $f_1(xpu) = 0$ совершенно произвольный, коннекса $(m, r-2, n)$], должно при подстановкѣ вмѣсто x, u координатъ основного сочетанія удовлетворяться не только координатами произвольной прямой p, но и безконечно близкой къ ней $p + \varepsilon p'$ (гдѣ $p + \varepsilon p'$ — также нѣкоторая прямая), т. е. должны имѣть

$$f(x, p+\varepsilon p', u) + f_1(x, p+\varepsilon p', u)(p+\varepsilon p', p+\varepsilon p') = 0.$$

Разлагая по степенямъ ε, отбрасывая члены отъ ε независящіе въ силу (1'), раздѣляя на ε и переходя къ предѣлу $\varepsilon = 0$, получимъ, что при произвольныхъ p'_{ik} должно быть

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{ik}} + (p, p) \sum p'_{ik} \frac{\partial f_1(xpu)}{\partial p_{ik}} + f_1(xpu).(p, p') = 0.$$

Второй членъ выпадаетъ въ силу $(p, p) = 0$ и остается уравненіе

$$\sum p'_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + f_1 \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ik}} \right) = 0,$$

которое при совершенно произвольныхъ p' (ограниченныхъ только условіемъ $p + \varepsilon p'$ — прямая) ведетъ за собою уравненія (14). Но хотя эти уравненія и выполнены, считать всякую прямую p особенною прямою комплекса, принадлежащаго основному сочетанію, является нѣкоторою натяжкою въ томъ отношеніи, что самый комплексъ имѣетъ уравненіе $0 = 0$ и является совокупностью всѣхъ прямыхъ пространства.

5. Указанными типами особенныхъ элементовъ еще далеко не исчерпываются возможные ихъ типы. Прежде всего элементъ (x, p, u) можетъ одновременно удовлетворять двумъ изъ трехъ системъ (3), (6) и (14).

Если элементъ (x, p, u) выполняетъ уравненія (3) и (6), т. е. точка его есть особенная точка поверхности X_{pu} и плоскость—особенная касательная поверхности U_{xp}, то можно такой элементъ называть *точечно-плоскостнымъ особеннымъ* элементомъ. Подобныхъ элементовъ коннексъ (1) имѣетъ вообще ∞^3, потому что изъ восьми уравненій (3) и (6) независимы только семь въ силу тождества

$$mnf(x, p, u) = n\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m\sum u_k \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0.$$

Отсюда замѣняя $\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$ черезъ $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial u_4}$ также черезъ $f = 0$ вводимъ излишнія рѣшенія: отъ шестерной коинциденціи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad f = 0$$

должны быть отброшены:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad x_4 = 0 \qquad (17)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 5), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad u_4 = 0. \qquad (18)$$

Отсюда и можемъ найти характеристики шестерной коинциденціи точечно-плоскостныхъ особенныхъ элементовъ:

$$\lambda_{340} = (35m^3 - 60m^2 + 30m - 4)r^4. \quad \lambda_{043} = (35n^3 - 60n^2 + 30n - 4)r^4.$$

$$\lambda_{331} = r^3[3n\{m^3 + 9m^2(m-1) + 9m(m-1)^2 + (m-1)^3\} + \\ + (n-1)\{m^3 + 27m^2(m-1) + 45m(m-1)^2 + 13(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{133} = r^3[3m\{n^3 + 9n^2(n-1) + 9n(n-1)^2 + (n-1)^3\} + \\ + (m-1)\{n^3 + 27n^2(n-1) + 45n(n-1)^2 + 13(n-1)^3\}].$$

$$\lambda_{241} = 3r^4[3n\{m^2 + 3m(m-1) + (m-1)^2\} +$$
$$+ (n-1)\{2m^2 + 11m(m-1) + 7(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{142} = 3r^4[3m\{n^2 + 3n(n-1) + (n-1)^2\} +$$
$$+ (m-1)\{2n^2 + 11n(n-1) + 7(n-1)^2\}].$$

$$\lambda_{232} = 3r^3[n^2\{3m^2 + 6m(m-1) + (m-1)^2\} +$$
$$+ n(n-1)\{6m^2 + 24m(m-1) + 10(m-1)^2\} +$$
$$+ (n-1)^2\{m^2 + 10m(m-1) + 9(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{318} = r[n^3\{m^3 + m^2(m-1)\} + n^2(n-1)\{3m^3 + 27m^2(m-1) + 18m(m-1)^2\} +$$
$$+ n(n-1)^2\{18m^2(m-1) + 45m(m-1)^2 + 9(m-1)^3\} +$$
$$+ (n-1)^3\{9m(m-1)^2 + 7(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{322} = 3r^2[n^2\{m^3 + 6m^2(m-1) + 3m(m-1)^2\} +$$
$$+ n(n-1)\{m^3 + 15m^2(m-1) + 21m(m-1)^2 + 3(m-1)^3\} +$$
$$+ (n-1)^2\{3m^2(m-1) + + 12m(m-1)^2 + 5(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{223} = 3r^2[m^2\{n^3 + 6n^2(n-1) + 3n(n-1)^2\} +$$
$$+ m(m-1)\{n^3 + 15n^2(n-1) + 21n(n-1)^2 + 3(n-1)^3\} +$$
$$+ (m-1)^2\{3n^2(n-1) + 12n(n-1)^2 + 5(n-1)^3\}].$$

Подобнымъ образомъ элементы, которые суть точечные особенные и линейчатые особенные, должны выполнять 4 уравненія (3) и 5 уравненій (14). Но эти девять уравненій опредѣляютъ не восьмерную, а семерную коинциденцію, потому что можемъ писать тождество

$$r\sum x_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + (p\,,\,p)\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) = m\sum p_{jl}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + (p\,,\,p)\frac{\partial f_1}{\partial p_{jl}} + f_1\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{jl}}\right)$$

или

$$r\sum x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = m\sum p_{jl}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + f_1\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{jl}}\right).$$

Для линейчатыхъ особенныхъ элементовъ правая часть сводится къ виду

$$m(f_1 - \lambda/\mu)(p\,,\,p) = 0.$$

Слѣдовательно, въ силу уравненій (14) имѣемъ уже $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, и такимъ образомъ изъ 4 уравненій (3) можемъ удержать только три.

Подобнымъ образомъ семерную коинциденцію образуютъ *линейчато-плоскостные* особенные элементы, для которыхъ одновременно должны быть выполнены девять уравненій (6) и (14), сводящихся къ восьми независимымъ.

Если наконецъ (x, p, u) выполняетъ всѣ три системы уравненій одновременно т. е. будетъ и точечнымъ особеннымъ, и плоскостнымъ особеннымъ и въ тоже время линейчатымъ особеннымъ элементомъ, то онъ долженъ выполнять тринадцать уравненій, изъ которыхъ два суть слѣдствія остальныхъ. Поэтому коннексъ (1) подобныхъ элементовъ вообще не имѣетъ, и для существованія ихъ между коэффиціентами уравненія (1) должно существовать соотношеніе.

Поэтому можно подобные элементы называть *собственно-особенными элементами* коннекса, въ противоположность вышеперечисленнымъ типамъ особенныхъ элементовъ, которые присущи каждому коннексу.

Собственныхъ особенныхъ элементовъ коннексъ при извѣстныхъ условіяхъ можетъ имѣть не только конечное, но и безконечно большое число, многообразіе ихъ можетъ составлять даже простую коинциденцію, какъ въ поверхностяхъ могутъ быть двойныя кривыя.

Вышеуказанныхъ особенныхъ (точечныхъ и т. д.) элементовъ коннексъ можетъ также содержать болѣе высокое, чѣмъ въ общемъ случаѣ многообразіе, и тогда они не будутъ уже обыкновенными особенностями.

6. Послѣ приведеннаго выше разбора особенныхъ элементовъ коннекса мы можемъ пополнить сказанное въ § I объ основныхъ точкахъ, прямыхъ и плоскостяхъ.

Основная точка, если она въ коннексѣ существуетъ, принадлежитъ всѣмъ ∞^7 поверхностямъ X_{pu} коннекса. Изъ нихъ на ∞^4 поверхностяхъ она будетъ особенною,—на тѣхъ именно, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (p, u), выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial x_i}\right)_{x=x_{осн.}} = 0. \qquad (i=1, 2, 3, 4) \qquad (19)$$

Такимъ образомъ каждая основная точка даетъ начало ∞^4 точечнымъ особеннымъ элементамъ.

Можетъ однако случиться, что уравненія (19) удовлетворяются независимо отъ значеній p и u.

Тогда такая основная точка представитъ высшую особенность и мы можемъ назвать ее *особенною основною точкою.* Она даетъ начало ∞^7

точечнымъ особеннымъ элементамъ. Переходною стадіей являются случаи, когда (19) имѣютъ ∞^5 или ∞^6 общихъ сочетаній (p, u).

Примѣръ такой особенной точки представятъ коннексы вида

$$f(xpu) = \varphi(xpu) \sum a_{ik} x_i x_k + \varphi_1(xpu) \sum a'_{ik} x_i x_k +$$
$$+ \varphi_2(xpu) \sum a''_{ik} x_i x_k = 0\,,$$

если знакъ суммъ распространяется на значенія $i, k = 1, 2, 3$. Тогда при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ обращаются въ нуль независимо отъ значеній p и u не только f, но и всѣ ея производныя по x; здѣсь $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ означаютъ совершенно произвольные коннексы $(m-2, r, n)$.

Подобнымъ образомъ основная плоскость касается всѣхъ ∞^7 поверхностей U_{xp} коннекса, и будетъ особенно касательною для тѣхъ ∞^4 изъ нихъ, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (x, p), выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial u_k}\right)_{u=u_{осн.}} = 0. \qquad (k=1, 2, 3, 4) \qquad (20)$$

Такимъ образомъ *каждая основная плоскость даетъ начало ∞^4 плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.*

Но можетъ случиться, что уравненія (13) сводятся къ двумъ или одному независимому уравненію и стало быть опредѣляютъ ∞^5 или ∞^6 сочетаній (x, p). Наконецъ возможны случаи, когда уравненія (13) выполняются тождественно, и слѣдовательно плоскость будетъ особенною касательною ко всѣмъ ∞^7 поверхностямъ U_{xp} коннекса. Въ послѣднемъ случаѣ называемъ ее *особенною основною плоскостью* коннекса.

То же самое можно замѣтить и относительно основныхъ прямыхъ. Основная прямая принадлежитъ всѣмъ ∞^6 комплексамъ P_{xu} коннекса. Она будетъ особенною прямою въ тѣхъ изъ нихъ, которые принадлежатъ сочетаніямъ (x, u), опредѣляемымъ уравненіями:

$$\lambda\left(\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{jl}}\right)_{p=p_{осн.}} + \mu\left(\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{jl}}\right)_{p=p_{осн.}} = 0. \qquad (jl=1,2,3,4) \qquad (21)$$

Каждая основная прямая ведетъ за собою ∞^1 линейчатыхъ особенныхъ элементовъ.

Можетъ случиться однако, что шесть уравненій сводятся къ меньшему числу независимыхъ или даже сводятся къ одному, опредѣляющему значеніе λ/μ. Въ послѣднемъ случаѣ основная прямая будетъ особенною прямою во всѣхъ ∞^6 комплексахъ P_{xu} и мы придадимъ ей тогда наименованіе *особенной основной прямой* коннекса (1).

Мы можемъ далѣе говорить объ *особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ* (x, u), (x, p), (p, u).

Пусть (x^0, u^0) есть основное сочетаніе коннекса (1). Тогда всѣ коннексы $K_p(x, u)$, принадлежащіе всѣмъ прямымъ пространства, содержатъ элементъ (x^0, u^0). Это сочетаніе для нѣкоторыхъ изъ нихъ можетъ быть собственно особеннымъ элементомъ,—если при извѣстныхъ значеніяхъ p выполняются уравненія.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad \frac{\partial f}{\partial u_i}=0.$$

Если же эти уравненія выполняются сочетаніемъ (x^0, u^0) при всякихъ значеніяхъ p, то мы назовемъ (x^0, u^0) особеннымъ основнымъ сочетаніемъ.

Такимъ же образомъ придемъ къ понятію объ особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ (x, p) и (p, u).

7. Въ предыдущемъ были указаны недостатки даннаго опредѣленія особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u),—оно только съ натяжкою примѣнимо къ тѣмъ особеннымъ элементамъ, въ составъ которыхъ входитъ какое либо основное сочетаніе коннекса.

Можно избѣжать этого, если разсматривать не поверхность принадлежащую сочетанію (p, u) и т. д., какъ мы это дѣлали выше, а напримѣръ коннексъ $K_p(x, u)$, принадлежащій прямой p въ коннексѣ (1). Тогда точечными особенными элементами коннекса (1) назовемъ тѣ, коихъ сочетаніе (x, u) есть точечный особенный элементъ $K_p(x, u)$, плоскостными особенными тѣ, которыхъ сочетаніе (x, u) есть плоскостной особенный элементъ того же коннекса $K_p(x, u)$, и точечно-плоскостными особенными элементами (1)—тѣ, которыхъ сочетаніе (x, u) есть собственно-особенный элементъ коннекса $K_p(x, u)$.

Предполагая, что опредѣленіе особенныхъ элементовъ для коннекса съ элементомъ (точка, плоскость) достаточно выяснено, придемъ къ опредѣленію вышеуказанныхъ типовъ особенныхъ элементовъ (1). Обращаясь къ особенностямъ коннексовъ $K_u(x, p)$ и $K_x(p, u)$, получимъ представленіе и объ остальныхъ типахъ особенностей коннекса (x, p, u).

Недостатки такого опредѣленія: 1° для коннексовъ съ элементомъ (точка прямая) и (прямая, плоскость) понятіе особеннаго элемента еще недостаточно выяснено, и надо было бы предварительно остановиться на этомъ вопросѣ, не относящемся непосредственно къ предмету настоящей статьи; 2° хотя мы и избѣжимъ, держась этого опредѣленія, неудобствъ, вызываемыхъ при первомъ опредѣленіи основными сочетаніями, но основныя точки, прямыя и плоскости приводятъ къ тѣмъ же затрудненіямъ: уравненія соотвѣтствующихъ имъ коннексовъ приводятся къ виду $0=0$.

Связывать подобно Клебшу понятіе объ особенныхъ элементахъ съ понятіемъ о сопряженномъ коннексѣ нельзя потому, что, какъ уже было это мною указано въ другомъ мѣстѣ [1]), сопряженнаго коннекса для разсматриваемыхъ конфигурацій не существуетъ.

8. Соприкасающійся трилинейный коннексъ. Какъ для коннекса съ элементомъ (точки, плоскость) при опредѣленіи особенныхъ элементовъ въ основу можно положить соприкасающійся билинейный коннексъ,—т. е. рядомъ съ уравненіемъ $f(x, u)=0$ такого коннекса разсматривать уравненіе

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k = 0,$$

можно и для коннексовъ (x, p, u) ввести аналогичный, но уже трилинейный коннексъ. Но такъ какъ уравненіе коннекса (x, p, u) можетъ быть изображено въ различныхъ видахъ

$$f(xpu)+f_1(xpu)(p, p)=0,$$

смотря по выбору коннекса $f_1=(m, r-2, n)$, то и за сопряженный трилинейный коннексъ мы не можемъ принять прямо

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0,$$

но должны разсматривать цѣлую систему ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ

$$\sum_{i,k,jl} \frac{\partial^3 f(x, p, u)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k (p, P) = 0. \qquad (22)$$

Это обстоятельство, конечно, нѣсколько усложняетъ примѣненіе соприкасающагося трилинейнаго коннекса для изученія коннекса. Но для установленія понятія объ особенныхъ элементахъ онъ оказывается пригоднымъ.

Элементъ (x, p, u), для котораго составленъ соприкасающійся коннексъ, и который можно назвать элементомъ прикосновенія, принадлежитъ соприкасающемуся коннексу, такъ какъ подстановка $X=x$, $U=u$, $P=p$ даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} X_i P_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} \cdot (p, p) =$$
$$= mrn\, f(xpu) + mn\, f_1(xpu) \cdot (p, p) = 0.$$

---

[1]) Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. „Изв. Каз. Ф.-М. О.“ (2) 1902. Въ § V я остановлюсь на этомъ подробнѣе.

При этомъ сочетаніе (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося коннекса (независимо отъ f_1), если его уравненіе выполняется независимо отъ значеній X.

Но подстановка $P=p$, $U=u$ въ уравненіе (22) даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} p_{jl} u_k . X_i + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} X_i u_k . (p, p) = 0$$

или

$$rn \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + n(p, p) \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} X_i = 0$$

и наконецъ, въ силу $(p, p) = 0$,

$$rn \sum_i \frac{\partial f(xpu)}{\partial x_i} X_i = 0 .$$

Итакъ *сочетаніе (p, u) элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса, если (x, p, u) выполняетъ условія*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 , \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

т. е. когда по предыдущему *элементъ будетъ точечнымъ особеннымъ элементомъ коннекса (1).*

Мы и можемъ опредѣлить точечный особенный элементъ тѣмъ именно свойствомъ, что его сочетаніе (p, u) есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Точно также нетрудно убѣдиться, что *плоскостной особенный элементъ коннекса таковъ, что его сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.* Дѣйствительно, подстановка $X=x$, $P=p$ въ уравненіе (28) соприкасающагося коннекса доставитъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} x_i p_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} x_i U_k . (p, p)$$

$$= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + m \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k (p, p)$$

$$= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0 .$$

Уравненіе это удовлетворяется независимо отъ значеній U, если выполнены уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0. \qquad (k=1,2,3,4) \qquad (6)$$

Наконецъ, если выполнены уравненія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{jl}} = 0\,, \qquad (jl=1,2,3,4) \qquad (13)$$

то изъ всей совокупности ∞^{16} различныхъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ для ∞^{15} сочетаніе $(x\,,\,u)$ элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ, и съ другой стороны всѣ остальные соприкасающія коннексы сводятся для того же сочетанія къ одной и той же совокупности прямыхъ, встрѣчающихъ прямую p элемента прикосновенія.

Дѣйствительно, подставимъ въ уравненіе (22) соприкасающагося трилинейнаго коннекса $X = x\,,\ U = u$. Получимъ:

$$mn \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} + mn\, f_1 . (p\,,\,P) = 0\,,$$

или

$$mn \sum_{jl} P_{jl} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{jl}} \right) = 0.$$

Для того чтобы сочетаніе $(x\,,\,u)$ было основнымъ, коэффиціенты при 6-и координатахъ P_{jl} должны быть равны нулю, т. е. должно быть

$$-\frac{1}{2} f_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{12}}}{\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{12}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{13}}}{\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{14}}}{\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{14}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{34}}}{\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{34}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{42}}}{\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{42}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{23}}}{\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{23}}}.$$

Такимъ образомъ если уравненія (13) выполнены, то равны и эти шесть отношеній. Но отсюда при данныхъ $x\,,\ p\,,\ u$ получаемъ значеніе которое должно имѣть $f_1(x\,,\,p\,,\,u)$, т. е. опредѣляется одна изъ 16 величинъ $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k}$, которыя являются параметрами въ уравненіи соприкасающагося коннекса и произвольныхъ остается только 15.

Если же значеніе шести отношеній (его означимъ λ/μ) не равно $-\frac{1}{2} f_1$, то уравненіе комплексовъ сводится къ

$$mn \left(\lambda/\mu + \frac{1}{2} f_1 \right) . (p\,,\,P) = 0\,,$$

т. е. къ

$$(p\,,\;P)=0.$$

Если напротивъ уравненія, которыми въ n^0 4 этого §-а мы опредѣлили линейчатые особенные элементы коннекса (1), невыполнены, то $(x\,,\,u)$ не будетъ основнымъ сочетаніемъ ни на одномъ изъ ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ, которые мы объединяемъ подъ именемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Можно поэтому дать такое опредѣленіе: *линейчатые особенные элементы суть тѣ элементы коннекса, для которыхъ изъ общей совокупности ∞^{16} соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ выдѣляется группа въ ∞^{15} такихъ коннексовъ, имѣющихъ сочетаніе $(x\,,\,u)$ элемента своимъ основнымъ сочетаніемъ, а остальные сводятся къ комплексу $(p,\,P)=0$.*

Можно формулировать отношеніе особенныхъ элементовъ къ соприкасающемуся коннексу нѣсколько иначе.

Весь „пучекъ" соприкасающихся коннексовъ опирается на коинциденцію

$$\sum\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial u_k\,\partial p_{jl}}\,X_i U_k P_{jl}=0\,,\quad (p\,,\;P)=0 \tag{23}$$

и элементы этой коинциденціи принадлежатъ каждому изъ ∞^{16} коннексовъ (22).

Въ ней прямая p есть основная прямая, и потому всякое сочетаніе $(X\,,\,p)$ и $(p\,,\,U)$ есть основное сочетаніе ея.

Напротивъ, ни точка x, ни плоскость u не будутъ основными точками, и сочетаніе $(x\,,\,u)$ основнымъ сочетаніемъ коинциденціи вообще не будетъ.

Поэтому относительно сочетаній $(x\,,\,p)$ и $(p\,,\,u)$ элемента прикосновенія можно поставить вопросъ, когда они будутъ основными сочетаніями не только для коинциденціи, но и для всѣхъ ∞^{16} соприкасающихся коннексовъ. Это и приводитъ къ полученному уже выше результату.

1. *Сочетаніе $(p\,,\,u)$ есть основное сочетаніе каждаго изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если ими выполнены уравненія*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\,;\qquad (i=1,2,3,4)$$

элементъ $(x\,,\,p\,,\,u)$ назовемъ точечнымъ особеннымъ.

2. *Сочетаніе $(x\,,\,p)$ есть основное сочетаніе каждаго изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если имъ выполнены уравненія*

$$\frac{\partial f}{\partial u_k}=0\,;\qquad (k=1,2,3,4)$$

элементъ (x, p, u) *называемъ плоскостнымъ особеннымъ.*

3. *Сочетаніе* (x, u) *будетъ основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, на которую опираются всѣ соприкасающіеся коннексы, если выполнены уравненія*

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{jl}} = 0, \qquad (j, l = 1, 2, 3, 4)$$

элементъ (x, p, u) *называемъ линейчатымъ особеннымъ.*

§ IV.

Особенные элементы коинциденціи (простой).

1. Ограничимся случаемъ коинциденціи, заданной пересѣченіемъ двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n'):

$$f(x, p, u) = 0, \quad F(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Если f и F различныхъ степеней относительно перемѣнныхъ, то можно назвать все же „пучкомъ" коннексовъ фигуру опредѣляемую уравненіемъ

$$\lambda f(xpu) + \mu F(xpu) = 0 \tag{2}$$

при λ и μ постоянныхъ [1]), такое опредѣленіе соотвѣтствуетъ геометрическому смыслу совокупности коннексовъ, опирающихся на данную коинциденцію, но требуетъ соединенія въ одно уравненіе двухъ формъ различныхъ степеней. Примемъ поэтому, что λ и μ суть однородныя функціи x, p, u степеней $m_0 - m$, $r_0 - r$, $n_0 - n$ и $m_0 - m'$, $r_0 - r'$, $n_0 - n'$, гдѣ m_0, r_0, n_0 наибольшія изъ паръ чиселъ: m и m', r и r', n и n'. Однако при произвольныхъ коэффиціентахъ въ λ и въ μ и при всевозможныхъ значеніяхъ x_i и u_i, отношеніе λ/μ можетъ имѣть только ∞^1 значеній.

Всѣ эти коннексы имѣютъ при произвольныхъ коэффиціентахъ въ λ и μ общими элементы коинциденціи (1).

Точечные особенные элементы этой совокупности коннексовъ опредѣляются уравненіями

$$V = \frac{\partial(\lambda f + \mu F)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} + f \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + F \frac{\partial \mu}{\partial x_i}. \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

---

[1]) Срв., напримѣръ, Study, Methoden zur Theorie der ternärer Formen по отношенію къ тернарнымъ коннексамъ.

Будемъ разыскивать тѣ особенные элементы, которые являются таковыми на всѣхъ коннексахъ (2), т. е. принадлежатъ коинциденціи (1). Для такихъ элементовъ уравненія (3) приводятся съ помощію (1) къ виду

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad (i=1,2,3,4) \qquad (4)$$

какъ если бы λ и μ были постоянныя, и даютъ слѣдовательно

$$\frac{F'_{x_1}}{f'_{x_1}} = \frac{F'_{x_2}}{f'_{x_2}} = \frac{F'_{x_3}}{f'_{x_3}} = \frac{F'_{x_4}}{f'_{x_4}}. \qquad (4')$$

Уравненія эти показываютъ, что x должно быть или особенною точкою на одной изъ поверхностей X_{pu}, X'_{pu}, принадлежащихъ сочетанію (p, u) въ томъ и другомъ коннексахъ, или же точкою касанія этихъ поверхностей, т. е. эта точка должна быть особенною точкою кривой, принадлежащей сочетанію (p, u) въ коинциденціи (1).

Здѣсь однако также является то затрудненіе, что сочетаніе (p, u) можетъ быть основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, для котораго двѣ поверхности X_{pu} и X'_{pu} совпадаютъ вполнѣ или отчасти и уравненія (4′) выполняются всѣми точками этой общей части. Удобно поэтому и для коинциденціи прибѣгнуть къ соприкасающейся коинциденціи, т. е. разсматривать коинциденцію, опредѣленную такими уравненіями:

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + (p, P) . \sum \frac{\partial^2 f_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i . U_k = 0 \\ &\sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + (p, P) . \sum \frac{\partial^2 F_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i . U_k = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Эта коинциденція, зависящая отъ 30 произвольныхъ параметровъ, опирается на двойную коинциденцію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0, \quad \sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0 \quad (p, P) = 0, \quad (6)$$

которая прямую p имѣетъ основною прямою, а слѣдовательно, каждое сочетаніе, составленное этою прямою съ какою либо точкою или плоскостью, будетъ ея основнымъ сочетаніемъ.

Напротивъ (x, u) будетъ вообще не основнымъ сочетаніемъ.

Поэтому можемъ установить такое опредѣленіе особенныхъ элементовъ коинциденціи (1).

Элементъ (x, p, u) есть точечный особенный элементъ коинциденціи, если его сочетаніе (p, u) есть основное сочетаніе для каждой соприкасающейся коинциденціи.

Для этого уравненія (5) при постановкѣ $P=p$, $U=u$ должны сводиться къ одному. Но эта подстановка даетъ

$$rn\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}X_i=0, \qquad r'n'\sum\frac{\partial F}{\partial x_i}X_i=0.$$

Чтобы два эти уравненія свелись къ одному, должны быть выполнены условія

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial F}{\partial x_i}=0, \qquad (i=1,2,3,4) \qquad (4)$$

какъ и выше.

Къ четыремъ уравненіямъ (4) можемъ добавить слѣдующее

$$m\lambda f+m'.\mu.F=0$$

которое показываетъ, что изъ шести уравненій (1) и (4) независимыхъ только пять, а по исключеніи λ/μ только четыре; такимъ образомъ *точечные особенные элементы коинциденціи (1) образуютъ тройную коинциденцію.*

Въ составъ ея входятъ: 1^0 четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $f=0$, принадлежащихъ коннексу $F=0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,3,4) \qquad F=0,$$

и 2^0 четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $F=0$, принадлежащихъ коннексу $f=0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,3,4) \qquad f=0.$$

Характеристика первой четверной коинциденціи:

$\mu'_{041}=r^3(rn'+4nr')$; $\mu'_{140}=r^3[rm'+4(m-1)r']$;

$\mu'_{032}=2r^2n(2rn'+3nr')$; $\mu'_{131}=4r^2[m'nr+3(m-1)nr'+(m-1)n'r]$;

$\mu'_{230}=2r^2(m-1)[2m'r+3(m-1)r']$; $\mu'_{023}=2n^2r(2nr'+3n'r)$;

$\mu'_{122}=6nr[m'nr+2(m-1)nr'+2(m-1)n'r]$;

$$\mu'_{221} = 6(m-1)r[2m'nr + 2(m-1)nr' + (m-1)n'r];$$

$$\mu'_{320} = 2(m-1)^2 r[3m'r + (m-1)r'];$$

$$\mu'_{113} = 4n^2[m'nr + (m-1)nr' + 3(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{311} = 4(m-1)^2[(m-1)n'r + (m-1)nr' + 3m'nr];$$

$$\mu'_{212} = 6(m-1)n[2m'nr + (m-1)nr' + 2(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{203} = 2(m-1)n^2[2m'n + 3(m-1)n'];$$

$$\mu'_{302} = 2(m-1)^2 n[3m'n + 2(m-1)n'].$$

Характеристики 2-ой отличаются только обмѣномъ мѣстъ соотвѣтственно m и m', n и n', r и r'.

Чтобы опредѣлить характеристики тройной коинциденціи, замѣтимъ, что, взявъ уравненія (1) $f=0$, $F=0$, (4) $\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0$, изъ двухъ первыхъ имѣемъ $\sum x_i f'_{x_i} = 0$ $\sum x_i F'_{x_i} = 0$ или, умножая первые на λ, второе на μ и складывая:

$$\sum x_i(\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0, \tag{7}$$

т. е. одно изъ уравненій (4) есть слѣдствіе 3-хъ остальныхъ и (1).

Но если возьмемъ только пять уравненій

$$f=0, \quad F=0, \quad \lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0, \qquad (i=1,2,3) \tag{8}$$

то изъ (7) получимъ:

$$x_4 . (\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4}) = 0,$$

т. е. уравненія (8) даютъ не только $\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4} = 0$, но еще $x_4 = 0$. Вліяніе этихъ постороннихъ рѣшеній должно быть исключено.

Въ силу $x_4 = 0$ уравненіе (7) приводится къ виду:

$$\sum_{i=1}^{i=3} x_i(\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0$$

и слѣдовательно между тремя послѣдними уравненіями (8) оказывается линейная связь. Поэтому, добавляя уравненіе $x_4 = 0$, можемъ одно изъ нихъ отбросить, т. е. постороннія рѣшенія опредѣлятся уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad \lambda f'_{x_1} + \mu F'_{x_1} = 0, \quad \lambda f'_{x_2} + \mu F'_{x_2} = 0; \tag{9}$$

но при этомъ опять таки ввели излишнія рѣшенія (т. е. ихъ излишне отбросили и слѣдовательно ихъ нужно добавить), опредѣляемыя уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad x_3=0, \quad \lambda f'_{x_1}+\mu F'_{x_1}=0. \qquad (10)$$

Уравненія (8) замѣнимъ черезъ

$$f=0, \quad F=0, \quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0, \quad f'_{x_2}F'_{x_3}-f'_{x_3}F'_{x_2}=0 \qquad (8')$$

причемъ вводимъ излишнія рѣшенія

$$f=0, \quad F=0, \quad f'_{x_2}=0, \quad F'_{x_2}=0. \qquad (8'')$$

Точно также (9) замѣнятся уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0 \qquad (9')$$

и (10) черезъ

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad x_3=0, \qquad (10')$$

потому что послѣднее уравненіе (8) даетъ только значеніе λ/μ.

Отсюда найдемъ искомыя характеристики:

$$\gamma_{310}=(mr'+rm')[(m+m'-2)^2+2]+2mm'[(m-2)r+(m'-2)r'],$$

$$\gamma_{301}=(mn'+nm')[(m+m'-2)^2+2]+2mm'[(m-2)n+(m'-2)n'],$$

$$\gamma_{220}=m'r^2(3m+m'-4)+rr'[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2]+$$
$$+mr'^2(m+3m'-2),$$

$$\gamma_{211}=n[2m'r(3m+m'-4)+r'[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2)]+$$
$$+n'[r(2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2)+2mr'(3m'+m-4)],$$

$$\gamma_{202}=m'n^2(3m+m'-4)+nn'[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2]+$$
$$+mn'^2(m+3m'-2),$$

$$\gamma_{130}=(mr'+rm')(r+r')^2+2rr'[(m-2)r+(m'-2)r'],$$

$$\gamma_{121}=(mn'+nm')(r+r')^2+2(mr'+rm')(n+n')(r+r'),$$

$$\gamma_{112}=(mr'+rm')(n+n')^2+2(mn'+nm')(n+n')(r+r'),$$

$$\gamma_{103}=(mn'+nm')(n+n')^2+2nn'[(m-2)n+(m'-2)n'],$$

$$\gamma_{040} = rr'(r^2 + rr' + r'^2),$$

$$\gamma_{031} = (nr' + rn')(r + r')^2 + 2rr'(nr + n'r'),$$

$$\gamma_{022} = r^2n'(3n + n') + rr'(3n^2 + 4nn' + 3n'^2) + r'^2n(3n' + n),$$

$$\gamma_{013} = (nr' + rn')(n + n')^2 + 2nn'(nr + n'r').$$

2. *Плоскостные особенные элементы коинциденціи суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе для каждой изъ соприкасающихся коинциденцій.*

Сочетаніе (x, p) будетъ основнымъ для всѣхъ коинциденцій, опредѣленныхъ уравненіями (5), если послѣ подстановки $X = x$, $P = p$ они сводятся къ одному. Но подстановка даетъ

$$mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) \cdot mr \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

$$m'r' \sum \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) . m'r' \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

или

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k = 0. \tag{11}$$

И такимъ образомъ поставленному условію удовлетворимъ

1⁰ если
$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

или

2⁰ если
$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

или

3⁰ если
$$\lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} + \mu \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

Первыя уравненія даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $f = 0$, принадлежащіе коннексу $F = 0$. Они образуютъ четверную коиндиценцію.

Вторыя даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $F = 0$, принадлежащіе коннексу $f = 0$, — они также образуютъ четверную коинциденцію.

Наконецъ третья система уравненій вмѣстѣ съ уравненіями коинциденціи даетъ по исключеніи λ/μ четыре независимыхъ уравненія, кото-

рыя опредѣляютъ тройную коинциденцію плоскостныхъ особенныхъ элементовъ коинциденціи.

Это будутъ элементы (xpu), для которыхъ U_{xp} и U'_{xp} касаются и u есть касательная въ общей точкѣ.

Характеристики опредѣлимъ такъ же, какъ для многообразія точечныхъ особенныхъ элементовъ.

Наконецъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (1) суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, u) есть основное сочетаніе для двойной коинциденціи (6), на которую опирается многообразіе соприкасающихся коинциденцій (5).*

Для такихъ элементовъ три уравненія

$$(p, P)=0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl}=0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} P_{jl}=0, \tag{13}$$

къ которымъ при подстановкѣ $X=x$, $U=u$ сводятся уравненія (6), должны сводиться къ двумъ, т. е. должны существовать такія λ, μ, ν, что уравненіе

$$\lambda(p, P)+\mu \sum \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl}+\nu \sum \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} P_{jl}=0 \tag{14}$$

выполняется независимо отъ значеній P_{jl}, и слѣдовательно, для такихъ элементовъ имѣемъ при нѣкоторыхъ λ, μ, ν:

$$\frac{1}{2}\lambda \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{jl}}+\mu \frac{\partial f}{\partial p_{jl}}+\nu \frac{\partial F}{\partial p_{jl}}=0 \qquad (j=1,2,3,4) \tag{15}$$

и слѣдовательно должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial p_{12}} & \frac{\partial f}{\partial p_{13}} & \frac{\partial f}{\partial p_{14}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_{12}} & \frac{\partial F}{\partial p_{13}} & \frac{\partial F}{\partial p_{14}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \end{matrix}\right|=0.$$

Это даетъ четыре независимыхъ уравненія, но, прибавляя къ нему два уравненія (1), получаемъ не шесть независимыхъ уравненій, а только пять, потому что умножая шесть уравненій (15) каждое на соотвѣтственное p_{jl} и суммируя, получимъ:

$$\lambda(p, p)+r\mu f+r'\nu F=0$$

и слѣдовательно, если къ шести уравненіямъ (15) добавимъ два уравненія (1), то изъ шести первыхъ окажется независимыхъ только пять, и изъ нихъ должны быть исключены λ/ν и μ/ν.

Такимъ образомъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (простой) образуютъ четверную коинциденцію.*

Характеристики ея опредѣлятся подобно тому, какъ находили характеристики тройной коинциденціи, хотя и нѣсколько сложнѣе. На этомъ я уже не буду останавливаться.

§ V.

Сопряженный коннексъ. Обобщеніе конфигураціи.

1. Подобно сочетанію (точка, плоскость), сочетаніе (точка, прямая, плоскость) является само себѣ двойственнымъ,—поэтому можно было-бы ожидать, что для разсматриваемыхъ коннексовъ долженъ существовать коваріантный сопряженный коннексъ, какъ и для коннексовъ съ элементомъ (точка, плоскость).

На самомъ дѣлѣ оказывается однако, что для разсматриваемыхъ коннексовъ сопряженнаго коннекса, вообще говоря, не существуетъ.

Возьмемъ какой-нибудь элементъ (x, p, u) коннекса

$$f(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Сочетанію (p, u) этого элемента,— если оно не будетъ основнымъ,— принадлежитъ поверхность X_{pu}, на которой и лежитъ точка x элемента. Поверхность X_{pu} имѣетъ въ точкѣ x опредѣленную вообще говоря касательную плоскость, уравненіе которой

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0. \tag{2}$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) въ силу коннекса подчиняется опредѣленная, вообще говоря, плоскость (2), координаты которой

$$\sigma v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

Точно также сочетанію (x, p) того же элемента принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная поверхность U_{xp}, и плоскость u элемента есть одна изъ касательныхъ плоскостей этой поверхности. Точка ея прикосновенія къ U_{xp} опредѣлится уравненіемъ

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0 \tag{4}$$

и такимъ образомъ элементу $(x, p. u)$ подчиняется далѣе опредѣленная, вообще говоря, точка, которой координаты опредѣляются помощью уравненій коннекса (1):

$$\varrho . y_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}. \qquad (k=1,2,3,4) \qquad (5)$$

До сихъ поръ обращеніе идетъ такъ же, какъ въ тернарномъ коннексѣ и въ коннексѣ съ элементомъ (точка, плоскость).

Но когда возьмемъ сочетаніе (x, u) элемента и будемъ разсматривать соотвѣтственный комплексъ P_{xu}, которому принадлежитъ прямая p элемента, то получится уже нѣчто иное.

Комплексъ P_{xu} имѣетъ для своей прямой p не одинъ касательный линейный комплексъ, а безчисленное множество. Соотвѣтственно этому, если исходить изъ уравненія (1), которое можетъ быть замѣнено любымъ уравненіемъ

$$f(xpu) + \frac{1}{2} f_1 (xpu) . (p, p) = 0, \qquad (6)$$

уравненіе касательнаго къ P_{xu} комплекса изобразится

$$\sum \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} P_{ik} + f_1 . (p, P) = 0. \qquad (7)$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) подчиняется не прямая, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, потому что при данныхъ x, p, u можно разсматривать $f_1 (xpu)$, какъ одинъ произвольный параметръ въ (7).

При этомъ прямая и при томъ одна получится только при условіи

$$\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = \lambda \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ik}},$$

ибо тогда (7) какъ уже видѣли выше принимаетъ видъ:

$$(\lambda + f_1) (p, P) = 0.$$

Такимъ образомъ *элементу (x, p, u) подчиняется одна опредѣленная прямая и при томъ сама прямая элемента, если элементъ будетъ линейчато-особеннымъ.*

Далѣе мы получимъ прямую (хотя и не одну, а ∞^1 прямыхъ), если (7) изображаетъ спеціальный линейный комплексъ,—т. е. если инваріантъ его обращается въ нуль,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{1}{2}f_1\frac{\partial(p,p)}{\partial p},\ \frac{\partial f}{\partial p}+\frac{1}{2}f_1\frac{\partial(p,p)}{\partial p}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial p_{12}}+f_1\cdot p_{34}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}}+f_1\cdot p_{12}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial p_{13}}+f_1\cdot p_{42}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{42}}+f_1\cdot p_{13}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial p_{14}}+f_1\cdot p_{23}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}}+f_1\cdot p_{14}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial p},\ \frac{\partial f}{\partial p}\right)+f_1\sum p_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}+\frac{1}{2}f_1^2\cdot(p,p)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p},\ \frac{\partial f}{\partial p}\right)+rf_1\cdot f+$$

$$+\frac{1}{2}f_1^2\cdot(p,p)=\left(\frac{\partial f}{\partial p},\ \frac{\partial f}{\partial p}\right).$$

Такимъ образомъ касательный комплексъ можетъ быть спеціальнымъ только въ томъ случаѣ, если прямая p есть спеціальная прямая комплекса P_{xu}, и тогда всѣ касательные комплексы будутъ спеціальными. Мы получимъ, какъ совокупность ихъ осей пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку встрѣчи p и прямой q, которой аксіальныя координаты суть $\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}$.

Итакъ: *элементу (x, p, u) подчиняется пучекъ прямыхъ, если p есть спеціальная прямая комплекса P_{xu}, т. е. если элементъ (x, p, u) принадлежитъ коинциденціи пересѣченія (1) коннексомъ $(2m, 2r-2, 2n)$*:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p},\ \frac{\partial f}{\partial p}\right)=0. \tag{8}$$

Какъ уже было упомянуто ранѣе, въ составъ этой коинциденціи входятъ и линейчатые особенные элементы коинциденціи.

Всѣмъ прочимъ элементамъ коннекса принадлежитъ не прямая и не пучекъ прямыхъ, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, содержащихъ прямую элемента и имѣющихъ одинъ и тотъ же параметръ.

Такимъ образомъ для коннексовъ съ элементами (x, p, u) какъ въ томъ случаѣ, если (8) не выполняется тождественно, такъ и въ томъ, когда (8) выполняется тождественно для всякаго элемента коннекса, *не существуетъ сопряженнаго коннекса,* т. е. такого коваріантнаго коннекса, которой бы состоялъ изъ такихъ же элементовъ, какъ исходный, и элементы котораго находились бы, вообще говоря, въ однозначномъ и однозначно-обратимомъ соотвѣтствіи съ элементами исходнаго.

Тоже самое, очевидно, имѣетъ мѣсто и по тѣмъ же причинамъ для коннексовъ съ элементомъ (x, p) и (p, u), если бы даже условиться ставить два этихъ типа коннексовъ во взаимную связь.

2. Такое отсутствіе сопряженнаго коннекса заставляетъ остановиться на причинахъ его и попытаться такъ измѣнить введенныя опредѣленія, чтобы возможно было построеніе аналогичной теоріи.

Обратимся прежде всего къ опредѣленію касательныхъ линейныхъ комплексовъ. Если прямую трехмѣрнаго пространства изобразимъ точкою пятимѣрнаго плоскаго многообразія, лежащей на квадратичномъ M_4, то комплексъ прямыхъ изобразится пересѣченіемъ двухъ M_4: одного, котораго уравненіе есть уравненіе даннаго комплекса, и другого, упомянутаго выше квадратичнаго многообразія.

Мы имѣемъ такимъ образомъ задачу найти касательное плоское M_3 для трехмѣрнаго же многообразія—пересѣченія двухъ M_4:

$$f(z)=0, \quad (\text{соотвѣт. уравненіе комплекса } f(p)=0) \tag{1}$$

$$\omega(z)=(z,\ z)=0 \quad \left(\text{соотв. } \frac{1}{2}(p,\ p)=p_{12}p_{34}+p_{13}p_{12}+p_{14}p_{23}=0\right). \tag{2}$$

Если z означаетъ точку прикосновенія, Z—точку касательнаго M_3, то уравненія послѣдняго будутъ:

$$\sum_i \frac{\partial f}{z_i} Z_i=0, \quad \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial\omega}{\partial z_i} Z_i=(z,\ Z)=0. \tag{3}$$

Вмѣсто этого разсматриваютъ (ср. Koenigs, l. c. стр. 71 и сл.), какъ касательное многообразіе, такое, которое лежитъ также на $\omega(z)=0$. Поэтому пришлось бы или принимать за касательное многообразіе такое M_2, которое опредѣляется уравненіями (2) и (3), или же, чтобы имѣть, какъ и въ геометріи точки и плоскости, снова касательное многообразіе 3-хъ измѣреній, взять, какъ это и дѣлается, плоское M_4, опредѣленное уравненіями (3), но тогда получается не одно касательное многообразіе, а ∞^1 ихъ,—ибо черезъ M_3, опредѣленное уравненіями (3), можно провести пучекъ плоскихъ M_4:

$$\lambda\sum \frac{\partial f}{\partial z_i} Z_i+\mu\sum\frac{\partial\omega(z)}{\partial z_i} Z_i=0. \tag{4}$$

Имѣя за собою достоинство первенства примѣненія, пріемъ этотъ не болѣе естественъ, чѣмъ указанная выше возможность примѣнять не уравненія (2) и (4), а уравненія (2) и (3), т. е. вмѣсто пучка касательныхъ комплексовъ разсматривать касательную коинциденцію.

При опредѣленіи линейчато-особенныхъ элементовъ—намъ и пришлось воспользоваться этимъ пріемомъ.

Для примѣненій представилъ бы однако извѣстныя удобства другой пріемъ,—именно разсматривать въ качествѣ касательнаго M_3 именно то, которое опредѣляется уравненіями (3).

При этомъ, конечно, придется выйти изъ геометріи прямой въ тѣсномъ смыслѣ слова и перейти до извѣстной степени въ геометрію линейныхъ комплексовъ. Дѣйств., отбрасывая (2) по отношенію къ Z, мы считаемъ Z не прямою, а линейнымъ комплексомъ и слѣдовательно за плоское касательное къ комплексу (1) M_3 беремъ плоское M_3 линейныхъ комплексовъ, полярныхъ данному и содержащихъ прямую прикосновенія.

Полученное плоское M_3 линейныхъ комплексовъ мы имѣемъ право называть касательнымъ потому, что если возьмемъ прямую $z + dz$ (предположеніе, что $z + dz$ есть прямая даетъ $(z, dz) = 0$) и допустимъ, что эта прямая есть одинъ изъ спеціальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3, то она удовлетворитъ уравненію

$$\sum f'_{z_i} \cdot (z_i + dz_i) = 0 ,$$

или въ силу $f(z) = 0$ уравненію

$$\sum f'_{z_i} \cdot dz_i = df(z) = 0 ;$$

и слѣдовательно, подстановка $z + dz$ въ уравненіе комплекса даетъ результатъ 2-го порядка малости, и обратно если прямыя z и $z + dz$ принадлежатъ комплексу, то прямая $z + dz$ представляетъ одинъ изъ спеціальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3.

3. Примѣненіе вышеприведенныхъ соображеній къ коннексамъ (x, p, u) дастъ вмѣсто соприкасающагося трилинейнаго коннекса такую конфигурацію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k C_{jl} = 0 \quad (C, p) = 0$$

гдѣ C_{jl} шесть величинъ, независимыхъ между собою и опредѣляющихъ не прямую, а линейный комплексъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ конфигураціямъ, въ которыхъ элементомъ является уже не комбинація (точка, прямая, плоскость), а соединеніе (точка, линейный комплексъ, плоскость).

Такія конфигураціи можно изучать систематически, какъ это дѣлается по отношенію къ коннексамъ различныхъ типовъ.

Изъ общаго числа ∞^{11} подобныхъ элементовъ одно уравненіе выдѣляетъ совокупность ∞^{10} ихъ, которые образуютъ, скажемъ, коннексъ (x, c, u); два уравненія выдѣляютъ ∞^9, образующихъ коинциденцію (x, c, u) и т. д.

Съ этой точки зрѣнія разсматриваемый въ настоящей статьѣ коннексъ является коинциденціей особеннаго типа,—онъ выдѣляется двумя уравненіями

$$f(x\,,\ c\,,\ u)=0\,,\qquad (c\,,\ c)=0\,,$$

изъ которыхъ второе выражаетъ, что беремъ не всевозможные линейные комплексы, а только спеціальные.

Можно замѣтить, употребляя терминологію аналогичную той, которую примѣняли выше, что эта коинциденція имѣетъ каждый спеціальный линейный комплексъ (каждую прямую) основнымъ, ибо второе уравненіе имъ выполняется независимо отъ значеній x и u.

Можно дать опредѣленіе особенныхъ элементовъ, какъ коннекса $f(x\,,\ c\,,\ u)=0$, такъ этой коинциденціи, причемъ для послѣдней придемъ къ упомянутой выше соприкасающейся коинциденціи и т. д.

Не останавливаясь на дальнѣйшихъ подробностяхъ, замѣтимъ только, что коннексы съ элементомъ (точка, линейный комплексъ, плоскость) допускаютъ обращеніе, т. е. имѣютъ сопряженный коннексъ. Дѣйствительно каждому элементу $(x\,,\ c\,,\ u)$ такого коннекса принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная плоскость (касательная къ X_{cu}): $\sigma v_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\,2,\,3,\,4)$, опредѣленная точка (точка прикосновенія плоскости u элемента съ поверхностью U_{xc}): $\varrho y_k=\dfrac{\partial f}{\partial u_k}$ $(k=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4)$.

Наконецъ, составляя поляру $f(x\,,\ c\,,\ u)$ относительно координатъ комплекса, получимъ:

$$\sum\frac{\partial f}{\partial c_{jl}}\,C_{jl}=0\,,$$

которое для данныхъ x и u изображаетъ плоское M_5 линейныхъ комплексовъ, содержащее комплексъ прикосновенія c и обладающее тѣмъ свойствомъ, что комплексъ $c+dc$, безконечно близкій къ c и ему принадлежащій, обращаетъ уравненіе коннекса (для данныхъ x, u) въ безконечно малую 2-го порядка отн. dc_{jl}. Это есть касательное плоское M_5 линейныхъ комплексовъ. Оно опредѣляетъ одинъ совершенно опредѣленный линейный комплексъ, съ которымъ всѣ его комплексы находятся въ инволюціи, именно комплексъ K, котораго координаты суть:

$$\tau\,\frac{\partial(k\,,\ k)}{\partial k_{jl}}=\frac{\partial f}{\partial c_{jl}}.$$

Такимъ образомъ элементу $(x\,,\ c\,,\ u)$ подчиняется элементъ того же типа $(y\,,\ k\,,\ v)$.

Совокупность всѣхъ элементовъ (y, k, v), соотвѣтствующихъ всѣмъ элементамъ коннекса $f(x, c, u) = 0$, опредѣляетъ, слѣдовательно, новый коннексъ $F(y, k, v) = 0$ того же типа, который и будетъ *сопряженнымъ* первому.

Связь ихъ взаимная,—можно показать, что если для коннекса $F(y, k, v) = 0$ будемъ искать сопряженный, то получимъ исходный коннексъ $f(x, c, u) = 0$: *коннексъ сопряженный сопряженному есть исходный коннексъ.*

Такимъ образомъ, что касается теоріи сопряженнаго коннекса и связанныхъ съ нимъ свойствъ, указанный въ этомъ §-ѣ обобщенный коннексъ является болѣе близкимъ аналогомъ тернарнаго коннекса и коннекса съ элементомъ (точка, плоскость), чѣмъ коннексъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

Напротивъ этотъ послѣдній коннексъ представляетъ бо́льшую аналогію въ томъ, что касается главной коинциденціи и связанной съ нею интеграціонной задачи.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 15 февраля 1902 года.

1. Прочитана телеграмма К. А. Андреева съ выраженіемъ благодарности Обществу за поздравленія по поводу 30-лѣтія ученой дѣятельности.

2. Прочитаны письма проф. Zaremba и проф. Korn'a съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены-корреспонденты Общества.

3. А. М. Ляпуновъ и В. А. Стекловъ предложили въ члены Общества профессора Тулузскаго Университета E. Cosserat; рѣшено произвести баллотировку въ слѣдующемъ засѣданіи.

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе; „О Римановой функціи ζ съ тремя аргументами".

5. *М. А. Тихомандрицкій* отъ имени Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „О діаметрахъ кривыхъ 3-го порядка".

Засѣданіе 5 апрѣля 1902 года.

1. Прочитано письмо отъ историко-филологическаго Общества при Харьковскомъ Университетѣ съ выраженіемъ благодарности за поздравленія, принесенныя Математическимъ Обществомъ въ день двадцатипятилѣтія историко-филологическаго Общества.

2. По предложенію распорядительнаго Комитета единогласно выбраны въ почетные члены Общества: академикъ А. А. Марковъ, профессоръ Электротехническаго Института К. А. Поссе и профессоръ Университета св. Владиміра В. П. Ермаковъ.

3. По предложенію А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова въ члены-корреспонденты Общества единогласно выбранъ профессоръ Кіевскаго Политехническаго Института А. П. Котельниковъ.

4. *М. А. Тихомандрицкій* отъ имени Д. Д. Мордухай-Болтовского сдѣлалъ сообщеніе: „Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ"

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

1 октября 1902 года.

1. Доложенъ и утвержденъ годичный отчетъ о дѣятельности Общества за истекшій 1901—1902 ак. годъ.

2. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 1902—1903 акад. годъ; избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя: проф. Л. О. Струве и пр. доц. В. П. Алексѣевскій, секретаремъ пр. доц. А. П. Пшеборскій.

3. Единогласно безъ баллотировки избранъ въ почетные члены Общества проф. М. А. Тихомандрицкій.

4. Постановлено просить А. П. Пшеборскаго разсмотрѣть статью, присланную капитаномъ Фроловымъ изъ Онеги и дать о ней отзывъ.

Засѣданіе 18 октября 1902 года.

1. Предсѣдатель доложилъ, что имъ получено письмо отъ М. А. Тихомандрицкаго съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ почетные члены Общества.

2. *В. А. Стекловъ* отъ имени *В. П. Ермакова* сдѣлалъ сообщеніе: „Варіаціонное исчисленіе въ изложеніи Вейерштрасса“.

3. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О циклическихъ кривыхъ 3-го порядка“.

4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторыя приложенія основной теоремы мемуара: Problème de refroidissement d'une barre hétérogène“.

Засѣданіе 3 декабря 1902 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ Обществомъ книгахъ.

2. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“.

3. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О первыхъ интегралахъ системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“.

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе „О Римановой функціи ζ двухъ аргументовъ“,

---

Засѣданіе 7 февраля 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.

2. *I. I. Сикора* сдѣлалъ сообщеніе: „Фотографическія изслѣдованія кометы 1902 г.“.

3. *I. I. Сикора* сдѣлалъ сообщеніе: „О сѣверномъ сіяніи на Мурманѣ“.

4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ замѣчательномъ равенствѣ“.

5. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе теоремы Malus'a“.

6. Въ число членовъ Общества безъ избранія принятъ проф. Д. М. Синцовъ.

Засѣданіе 18 апрѣля 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.

2. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“.

3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ и каноническихъ“.

Засѣданіе 27 апрѣля 1902 года.

1. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной группѣ преобразованій пространства“.

2. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ особыхъ элементахъ коннекса“.

3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій“.

4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе „О разложеніи данной функціи въ рядъ по функціямъ Чебышева“.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

12 октября 1903 года.

1. Предсѣдатель напомнилъ о смерти почетнаго члена Общества проф. Н. В. Бугаева и дѣйствительнаго члена приватъ-доцента М. Н. Косача и предложилъ почтить память ихъ вставаніемъ.

2. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности и состояніи Общества за предыдущій 190²/₃ акад. годъ.

3. В. А. Стекловъ предложилъ въ почетные члены Общества академиковъ Poincaré, Picard'а и Appell'я, которые избраны единогласно par acclamation.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 190$^3/_4$ акад. годъ. Избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и приватъ-доцентъ В. П. Алексѣевскій и секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшеборскій.

Засѣданіе 24 октября 1903 года.

1. В. А. Стекловъ предложилъ въ члены-корреспонденты Общества проф. Hadamard (Парижъ) и проф. Hurwitz (Цюрихъ). Постановлено баллотировать ихъ въ будущемъ засѣданіи.

2. Вслѣдствіе просьбы Владимірскаго общества любителей естествознанія о высылкѣ изданій Математическаго Общества постановлено высылать таковыя, начиная съ VIII тома.

3. *В. А. Стекловъ* отъ имени *В. П. Ермакова* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу объ интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ 1-го порядка".

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Замѣтка о функціяхъ Kinkelin'а".

5. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторыя приложенія одной формулы суммированія".

Засѣданіе 31 октября 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письма академиковъ Poincaré, Picard'а и Appell'я съ выраженіемъ благодарности за избраніе ихъ въ почетные члены Общества.

2. Предсѣдатель сообщилъ о предстоящемъ 2 ноября чествованіи тридцатилѣтія ученой дѣятельности проф. Харьковскаго Университета М. С. Дринова. Постановлено просить г. предсѣдателя привѣтствовать юбиляра отъ имени Общества.

3. Единогласно избраны въ члены-корреспонденты Общества проф. Hurwitz (Цюрихъ) и Hadamard (Парижъ).

4. *А. П. Грузинцевъ* прочелъ некрологъ М. П. Косача.

5. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи гаммоморфныхъ функцій".

6. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ особенномъ свойствѣ рядовъ, наиболѣе часто встрѣчающихся въ анализѣ".

Засѣданіе 28 ноября 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письма проф. Hurwitz'а и Hadamard'а съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены Общества.

2. *М. А. Тихомандрицкій* доложилъ статью *В. П. Ермакова*: „О періодическихъ функціяхъ".

3. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ полиномахъ, входящихъ въ формулы суммированія Эйлера и Буля.





Томъ VIII, № 6.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

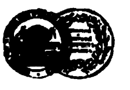
Commnications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ IX.



ХАРЬКОВЪ.



Типографія и Литографія М. Зильберберг и С-вья.
Рыбная улица, домъ № 30-й.
1906.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ.*

СОДЕРЖАНІЕ

XI-го тома.

TABLE DES MATIÈRES

du tome IX.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му 1906 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: В. А. Стекловъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. П. Грузинцевъ и Д. М. Синцовъ.
3. Секретарь: А. П. Пшеборскій.

В. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго унив.
2. P. Appel, проф. Парижскаго университета, академикъ.
3. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ. проф. универ. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго унив.
6. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. унив.
7. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
9. E. Picard, проф. Парижскаго университета, академикъ.
10. H. Poincaré, проф. Парижскаго университета, академикъ.
11. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. элект.-техн. инст.
12. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьков. унив.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Томскаго технол. инст.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. преп. Старобѣл. гимн.
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьков. коммерч. учил.
5. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.

6. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
7. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумскаго реальн. учил.
8. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьк. унив.
9. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
10. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Кіев. полит. инст.
11. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. техн. инст.
12. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф., СПБ.
13. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронеж. кадетск. корпуса.
14. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьков. гимн.
15. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьков. техн. инст.
16. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьковской гимн.
17. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
18. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
19. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго унив.
20. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
21. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, б. преп. Харьк. реал. учил.
22. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Харьков. техн. инст.
23. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьков. техн. инст.
24. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
25. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
26. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьковскаго унив.
27. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. политехн. инст.
28. Раевскій Сергѣй Александровичъ, окр. инсп. Харьков. учебн. окр.
29. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьков. унив.
30. Роговскій Евгеній Александровичъ, проф. Харьков. унив.
31. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, бывш. преп. Урюп. реальн. учил.
32. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Кіевск. политехн. инст.
33. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, директ. Усть-Медвѣд. реал. учил.
34. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковск. обсерват.
35. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьков. унив.
36. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
37. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьков. унив.
38. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьков. унив.
39. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывшій лабор. Харьк. унив.
40. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Урюп. реальн. учил.
41. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, бывш. преп. 1-й Харьк. гимн.
42. Шиллеръ Николай Николаевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
43. Шимковъ Андрей Петровичъ, директ. Москов. сельско-хозяйств. инст.
44. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьков. реальн. учил.
45. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьков. гимн.
46. Чернай Николай Андреевичъ, проф. Харьков. техн. инст.

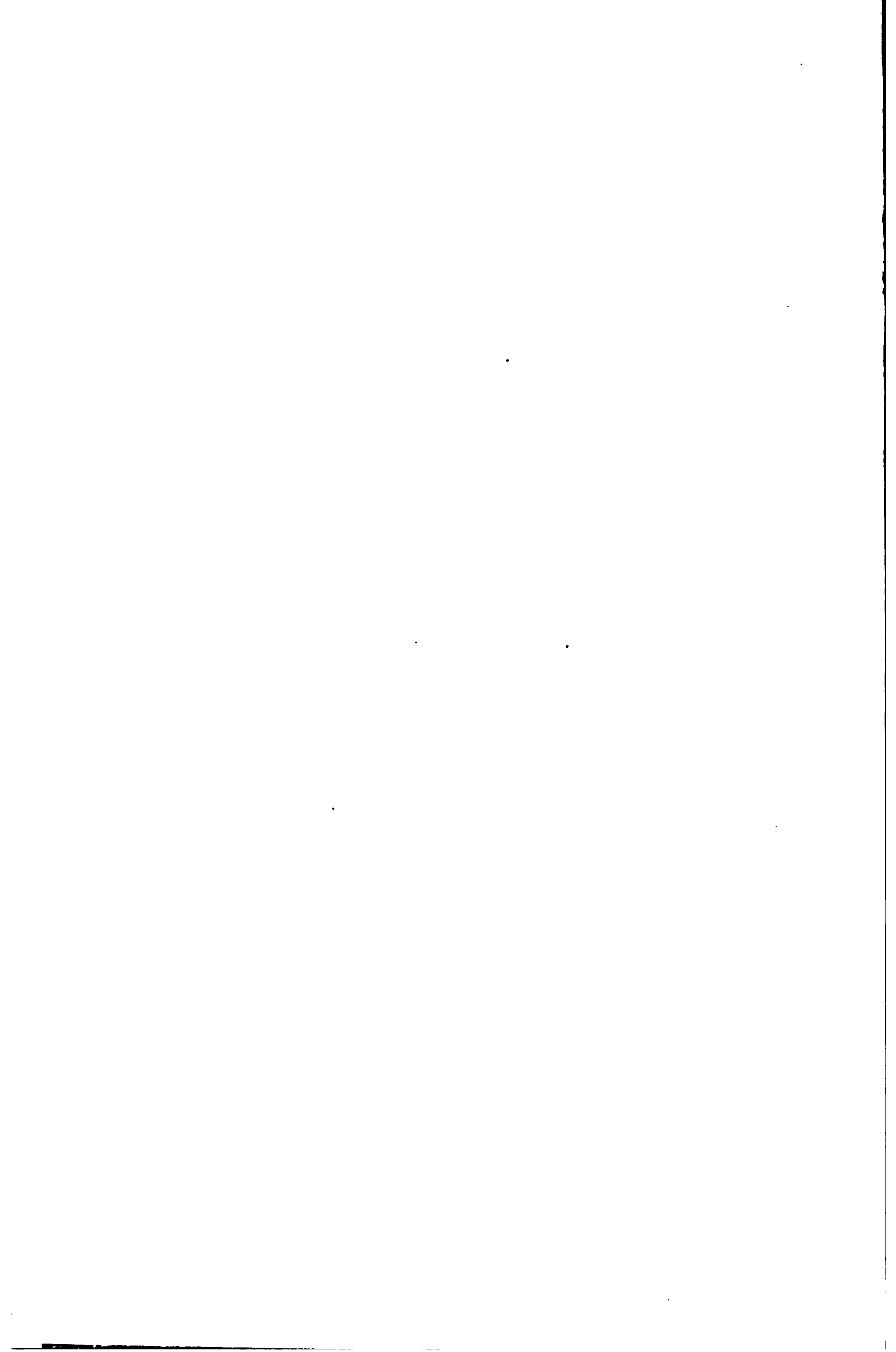
D. Члены-корреспонденты.

a) русскіе.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
2. Вороной Георгій Өеодосѣевичъ, проф. Варшавскаго унив.
3. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.
4. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
5. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. унив.
6. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, бывш. проф. Варшавск. унив.
7. Тороповъ Константинъ Александровичъ, преп. Таганр. техн. учил.

b) иностранные.

1. Cosserat E., проф. Тулузскаго унив.
2. Hadamard J., проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
3. Hurwitz A., проф. политехникума въ Цюрихѣ.
4. Kneser A., проф. Бреславскаго унив.
5. Korn A., проф. Мюнхенскаго унив.
6. Zaremba S., проф. Краковскаго унив.



Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 6.

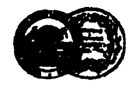
СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.



Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.



(Рыбная улица, домъ № 30-й).



1904.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, 15-го Декабря 1904 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ.*

Annals of Math.

ДИСПЕРСІЯ МЕТАЛЛОВЪ.

А. П. Грузинцева.

Въ изслѣдованіи „Электромагнитная теорія проводниковъ [1]“ (Харьковъ 1899 г.), а также въ статьѣ „Къ теоріи дисперсіи: случай многихъ полосъ поглощенія“ мы получили общія формулы для дисперсіи въ проводникахъ такихъ, какъ металлы. Эти формулы связываютъ показатель преломленія n и коэффиціентъ поглощенія $n\varkappa$ при нормальномъ паденіи съ длиной волны λ слѣдующимъ образомъ:

$$n^2(1-\varkappa^2) = K\mu + \sum_1^m \frac{(P_i\lambda^2 - Q_i)\lambda^2}{(\lambda^2-\lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda^2};$$

$$2n^2\varkappa = D\mu + \sum_1^m \frac{(T_i\lambda^2 + R_i)\lambda^3}{(\lambda^2-\lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda^2},$$

причемъ K—діэлектрическая постоянная средины, μ—коэффиціентъ магнитной проницаемости ея, D зависитъ отъ электропроводности средины ($D = 2C\tau$, C коэффиціентъ электропроводности, выраженный въ абсолютныхъ электростатическихъ единицахъ, τ—періодъ). Буквой i обозначенъ нумеръ іона, число которыхъ есть m.

Примѣнимъ наши формулы къ спектральной области, лежащей между величинами λ' и λ'' ($\lambda' < \lambda''$).

Разсмотримъ полосу поглощенія, лежащую далеко за λ', въ области ультрафіолетовыхъ лучей. Обозначимъ указателемъ u принадлежность ко-

[1]) Записки Импер. Харьковскаго Университета. кн. 1, 1899 г.

[2]) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, т. VII, 1900 г.

личествъ къ этой области; тогда, пренебрегая дробью $\frac{\lambda_u^4}{\lambda^4}$ и дробью $\frac{Q_u}{\lambda^2}$, получимъ для этой области членъ:

$$\frac{P_u \lambda^2}{\lambda^2 + (g_u^2 - 2\lambda_u^2)} = \frac{P_u \lambda^2}{\lambda^2 + z_u^2}, \tag{1}$$

если положимъ, что

$$g_u^2 - 2\lambda_u^2 = z_u^2.$$

При этомъ z^2 можетъ быть и положительнымъ, $(g_u > \lambda_u \sqrt{2})$ и отрицательнымъ $(g_u < \lambda_u \sqrt{2})$ количествомъ.

Если предположимъ полосу поглощенія далеко за λ'', т. е. въ области инфракрасныхъ лучей, то, обозначивъ въ этомъ случаѣ указателемъ r принадлежность количествъ къ этой области и, слѣдовательно, пренебрегая дробью $\frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}$, получимъ отъ этой полосы членъ:

$$-\frac{Q_r}{\lambda_r^4}\lambda^2 = -k_r \lambda. \tag{2}$$

Наконецъ можемъ допустить полосу поглощенія внутри области $(\lambda' - \lambda'')$, тогда получимъ для нея: $\lambda_i = \lambda$ и слѣдовательно соотвѣтствующій членъ:

$$\frac{(P_i \lambda_i^2 - Q_i)\lambda_i^2}{g_i^2 \lambda_i^2} = \frac{P_i \lambda_i^2 - Q_i}{g_i^2} = M_i. \tag{3}$$

Этотъ членъ при очень маломъ g_i можетъ быть достаточно большимъ.

Соединяя члены (1), (2), (3) и полагая:

$$\sum k_r = k; \qquad K\mu - \sum M_i = A_0$$

и также для краткости письма:

$$n^2(1 - \varkappa^2) = A, \tag{a}$$

получимъ окончательно:

$$A = A_0 - k\lambda^2 + \sum \frac{P_u \lambda^2}{\lambda^2 + z_u^2}.$$

Если предположимъ, что въ ультрафіолетовой области существуетъ лишь одинъ іонъ, тогда получаемъ просто (положивъ $P_u = -P$)

$$A = A_0 - k\lambda^2 - \frac{P\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}, \tag{I}$$

а если пренебрежемъ, буде возможно, коэффиціентомъ k, то будемъ имѣть очень простую формулу:

$$A = A_0 - \frac{P\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}. \qquad (Ia)$$

Совершенно подобнымъ образомъ получаемъ и вторую дисперсіонную формулу, взявъ:

$$2n^2\varkappa = -B \qquad (b)$$

въ такомъ видѣ:

$$B = -\frac{Q\lambda^3}{\lambda^2 + z^2}. \qquad (II)$$

Всѣ эти формулы получаются и въ теоріи Гельмгольца (коэффиціентъ $\gamma = 0$).

Болѣе точная, но за то и болѣе сложная формула получилась-бы для функціи B, если-бы не пренебрегали нѣкоторыми членами. Нашли-бы слѣдующія части B:

1) при очень маломъ $\frac{\lambda_u}{\lambda}$:

$$\sum_u \frac{(T_u\lambda^2 + R_u)\lambda}{\lambda^2 + z_u^2}$$

2) при очень маломъ $\frac{\lambda}{\lambda_r}$:

$$\sum (T_r\lambda^2 + R_r)\cdot\frac{\lambda^3}{\lambda_r^3}\cdot\frac{1}{\lambda_r}$$

3) при $\lambda_i = \lambda$:

$$\sum\left(\frac{T_i\lambda_i^2 + R_i}{g_i^2}\right)\lambda_i = \sum N_i = B_0$$

и тогда получили-бы:

$$-B = D_0\lambda + B_0 + \lambda^3\sum_u \frac{T_u}{\lambda^2 + z_u^2} + \lambda\sum_u \frac{R_u}{\lambda^2 + z_u^2} \qquad (IIa)$$

и при одномъ іонѣ въ области ультрафіолетовой:

$$-B = B_0 + D_0\lambda + \frac{(T\lambda^2 + R)\lambda}{\lambda^2 + z^2} \qquad (IIb)$$

или:

$$-B = B_0 + B_1\lambda + \frac{B_2\lambda}{\lambda^2 + z^2} \tag{IIc}$$

гдѣ:

$$B_1 = D_0 + T, \qquad B_2 = R - Tz^2.$$

Или, лучше:

$$-B = B_0 + \frac{(D_0 + T)\lambda^3 + (D_0 z^2 + R)\lambda}{\lambda^2 + z^2}$$

или:

$$-B = B_0 + \frac{Q\lambda^3}{\lambda^2 + z^2} + \frac{Q_1\lambda}{\lambda^2 + z^2}. \tag{IId}$$

§ 1. Такимъ образомъ, предполагая поглощеніе въ областяхъ очень малыхъ и очень большихъ волнъ, мы думаемъ, что дисперсія металловъ можетъ быть представлена слѣдующими формулами:

$$A = A_0 - k\lambda_1^2 - \frac{P\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + z^2} \tag{I}$$

и

$$B = -\frac{Q\lambda_1^3}{\lambda_1^2 + z^2}. \tag{II}$$

Въ этихъ формулахъ длина λ_1 должна быть выражена въ $0^\mu,1$ (т. е. въ 10^{-5} см.), а количество

$$z^2 = g_m^2 - 2\lambda_m^2$$

можетъ быть и положительно ($g_m > \lambda_m\sqrt{2}$) и отрицательно ($g_m < \lambda_m\sqrt{2}$), причемъ λ_m и g_m относятся къ *одной* полосѣ поглощенія, лежащей внутри области примѣненія формулъ (I) и (II) т. е. внутри области, крайнія значенія λ_1 въ которой суть: λ_1' и λ_1'' ($\lambda_1' < \lambda_1''$). Займемся теперь примѣненіемъ этихъ формулъ къ существующимъ наблюденіямъ надъ металлами [1]) и прежде всего примѣнимъ наши формулы къ *никкелю* на томъ основаніи, что Друде примѣнялъ формулы своей электронной теоріи именно только къ этому металлу.

---

[1]) Примѣненіе къ металламъ дисперсіонныхъ формулъ, на сколько мнѣ извѣстно, производится здѣсь впервые.

Опредѣленіе постоянныхъ коэффиціентовъ произведемъ слѣдующимъ простымъ пріемомъ. Сначала изъ формулы (II)-й имѣемъ:

$$Q+\frac{B}{\lambda_1^3}z^2=-\frac{B}{\lambda_1}. \qquad (A)$$

Примѣняя это уравненія къ двумъ, лучше всего, крайнимъ, наблюденіямъ, опредѣлимъ Q и z^2.

Затѣмъ формула (I) по исключеніи дроби $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+z^2}$ при помощи (II) даетъ

$$A_0-k\lambda_1^2+\frac{B}{\lambda_1}\cdot\frac{P}{Q}=A. \qquad (B)$$

Примѣняя это уравненіе къ прежнимъ (крайнимъ) наблюденіямъ и одному промежуточному, будемъ имѣть *три* уравненія, изъ коихъ и найдемъ: A_0, k и $\frac{P}{Q}$, а, слѣдовательно, и P. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, а именно при очень малыхъ k или для очень малыхъ λ_1, можно довольствоваться болѣе простой формулой, чѣмъ (I), и тогда вмѣсто (B) получимъ:

$$A_0+\frac{B}{\lambda_1}\cdot\frac{P}{Q}=A, \qquad (C)$$

такъ что достаточно будетъ *двухъ* наблюденій n и $n\varkappa$ или R и одной изъ этихъ величинъ.

§ 2. Обращаемся къ *никкелю*. Рубенсъ и Дюбуа въ 1890 году опредѣлили показатели преломленія n по способу Кундта (тонкой прозрачной призмы) для нѣкоторыхъ металловъ, въ томъ числѣ и для никкеля для *пяти* различныхъ волнъ [1]), сверхъ того Рубенсъ и Гагенъ нѣсколько позже опредѣлили отражательную способность никкеля (какъ и другихъ металловъ) [2]), R, а изъ этихъ данныхъ можно уже опредѣлить $n\varkappa$, а слѣдовательно A и B и затѣмъ сравнивать ихъ съ данными опыта. Опредѣленіе $n\varkappa$ по n и R можетъ быть совершено слѣдующимъ образомъ. Мы знаемъ, что

$$R=\frac{n^2(1+\varkappa^2)+1-2n}{n^2(1+\varkappa^2)+1+2n};$$

откуда находимъ:

$$\frac{1+R}{1-R}=\frac{n^2+1+n^2\varkappa^2}{2n}=q,$$

---

[1]) Ann. d. Physik und Chemie. 41. p. 522 (1890).
[2]) Ann. d. Physik 8, p. 16—17 (1902) или Zeitschrift f. Jnst.-Kunde, 1899. p. 305.

гдѣ положено:

$$q = \frac{1+R}{1-R}.$$

Поэтому опредѣляемъ $n\varkappa$ изъ формулы:

$$n^2\varkappa^2 = 2nq - n^2 - 1. \qquad (D)$$

§ 3. Такимъ образомъ находимъ A и B для $\lambda_1 = 4{,}31$ и $\lambda_1 = 6{,}71$ значенія: —4,685; —8,182 для 1-й волны и —11,704; —16,252 для 2-й.

Примѣняя къ этимъ двумъ случаямъ формулы (A) и (C), находимъ:

$$z^2 = 10{,}826;\ Q = 3{,}005;\ P = 40{,}252 \text{ и } A_0 = 20{,}742.$$

Такимъ образомъ можно полагать, что дисперсія никкеля въ области спектра ($0^{\mu}{,}431 - 0^{\mu}{,}671$), т. е. отъ линіи G до линіи $Li\alpha$, представится формулами:

$$A = 20{,}742 - \frac{40{,}252 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 10{,}826},$$

$$B = -\frac{3{,}005 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 10{,}826}.$$

Для повѣрки вычислимъ значенія A и B для ряда λ_1 и сравнимъ съ наблюденіями, часть которыхъ интерполирована нами. Результаты разсчетовъ сопоставимъ въ таблицѣ:

λ_1	$B_{выч.}$	$B_{набл.}$	$A_{выч.}$	$A_{набл.}$
4,31	— 4,689	— 4,685	— 8,183	— 8,182
4,50	— 5,488	— 6,102	— 8,812	— 9,418
4,86	— 6,859	— 6,918	—10,014	—10,717
5,00	— 7,347	— 7,204	—10,49	—10,80
5,50	— 8,901	— 8,156	—12,17	—12,07
5,89	— 9,938	— 9,222	—13,487	—13,067
6,00	—10,204	— 9,576	—13,86	—13,52
6,50	—11,299	—10,388	—15,55	—14,79
6,71	—11,708	—11,704	—16,255	—16,252
7,00	—12,226	—13,823	—17,23	—18,04

Послѣднее наблюденіе экстраполировано нами изъ наблюденій Рубенса и Гагена 1902 года.

§ 4. Друде въ 1900 году [1]) при помощи своей электронной теоріи далъ новыя формулы для дисперсіи металловъ и примѣнилъ ихъ къ никкелю въ предположеніи существованія 2-хъ родовъ электроновъ. Въ нашихъ обозначеніяхъ его формулы будутъ имѣть видъ:

$$A = 1 - \left(\frac{P_1}{\lambda_1^2 + z_1^2} + \frac{P_2}{\lambda_1^2 + z_2^2}\right)\lambda_1^2, \tag{1}$$

$$B = -\left(\frac{q_1}{\lambda_1^2 + z_1^2} + \frac{q_2}{\lambda_1^2 + z_2^2}\right)\lambda_1^3, \tag{2}$$

причемъ P_1, P_2, q_1, q_2, z_1^2 и z_2^2 суть постоянныя и между q_1 и q_2 существуетъ зависимость, представляющая электропроводность металла съ точки зрѣнія электронной теоріи. Эта зависимость имѣетъ видъ:

$$q_1 + q_2 = C, \tag{3}$$

гдѣ постоянная $C = 6{,}38 . \sigma_r$, а σ_r есть коэффиціентъ электропроводности, отнесенной къ ртути. Такимъ образомъ здѣсь тоже *5* постоянныхъ коэффиціентовъ, подлежащихъ опредѣленію изъ дисперсіонныхъ наблюденій. Друде примѣнилъ свои формулы къ никкелю и нашелъ ихъ согласными съ наблюденіями, но, по непріятной случайности, при этихъ вычисленіяхъ принялъ за относительную электропроводность никкеля σ_r^{Ni}, *невѣрное число*: 3,1 (l. c. p. 163, таб. въ примѣчаніи) вмѣсто правильнаго 8,3. Если взять вѣрное число, то согласія не получается. Чтобы показать это дадимъ сначала пріемъ для опредѣленія постоянныхъ: P_1, P_2, ... z_2^2 (самъ Друде такого пріема не даетъ).

Положимъ:

$$P_1 + P_2 = X; \quad P_1 z_2^2 + P_2 z_1^2 = Y; \quad q_1 z_2^2 + q_2 z_1^2 = Z, \tag{a}$$

въ такомъ случаѣ (1) и (2) дадутъ:

$$A - 1 = -\frac{(\lambda_1^2 X + Y)\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + z_1^2)(\lambda_1^2 + z_2^2)}, \tag{b}$$

$$\frac{B}{\lambda_1} = -\frac{(\lambda_1^2 C + Z)\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + z_1^2)(\lambda_1^2 + z_2^2)}. \tag{c}$$

---

[1]) Physikalische Zeitschrift. Jahrgang I. 1900, p. 163.

Раздѣляя эти равенства одно на другое и полагая

$$m = \frac{A-1}{\frac{B}{\lambda_1}},$$

что извѣстно изъ наблюденій, найдемъ:

$$\lambda_1^2 X + Y - mZ = Cm\lambda_1^2. \tag{4}$$

Примѣняя это соотношеніе къ *тремъ* наблюденіямъ, опредѣлимъ: X, Y и Z. Затѣмъ слѣдовательно, знаемъ:

$$U = \lambda_1^2 X + Y,$$

а пользуясь равенствомъ (b) находимъ:

$$\lambda_1^2(z_1^2 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2 = -\lambda_1^4 - \frac{U\lambda_1^2}{A-1}.$$

Примѣняя къ *двумъ* наблюденіямъ, опредѣлимъ:

$$z_1^2 + z_2^2 \quad \text{и} \quad z_1^2 z_2^2,$$

а, слѣдовательно, и z_1^2, z_2^2. Зная же z_1^2 и z_2^2, изъ соотношеній (a) и (3) найдемъ P_1, P_2, q_1 и q_2.

§ 5. Примѣнимъ теперь все это къ никкелю. Возьмемъ для него $\sigma_r = 8{,}3$, тогда $C = 52.954$. Затѣмъ возмемъ три наблюденія:

λ_1	4,31	5,89	7,00
A	— 4,685	— 9,222	— 13,823
B	— 8,182	— 13,067	— 18,040.

При помощи этихъ наблюденій находимъ для Ni:

$$A = 1 - \frac{936{,}8 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3288{,}0} - \frac{0{,}445 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 2{,}00},$$

$$B = -\frac{51{,}178 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 3288{,}0} - \frac{1{,}776 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 2{,}00}.$$

Производя обратную повѣрку, найдемъ, напримѣръ, для $\lambda_1 = 4{,}86$: $A = -6{,}10$ вм. $-6{,}92$, что даетъ наблюденіе, а $B = -9{,}73$ вм. $-10{,}72$.

Для $\lambda_1 = 6{,}5$ находимъ: $A = -11{,}310$ вм. $10{,}388$ и $B = -15{,}242$ вм. $-14{,}79$. Такимъ образомъ наши формулы ближе удовлетворяютъ наблюденіямъ, чѣмъ формулы Друде, при томъ же въ нихъ число постоянныхъ на одну меньше; сверхъ того не измѣняется общій источникъ полученія ихъ для всякихъ среднихъ. Есть еще одинъ пунктъ, въ силу котораго формулы Друде теряютъ свое значеніе, по крайней мѣрѣ съ принципіальной стороны. Дѣло въ томъ, что количества z_1^2 и z_2^2 по ихъ физическому значенію въ электронной теоріи Друде—*величины положительныя*, но оказывается, что даже для никкеля, если взять за крайнія наблюденія $\lambda_1 = 4{,}31$ и $\lambda_1 = 6{,}71$ вм. $7{,}0$, то получается: $z_1^2 > 0$, а $z_2^2 < 0$. Дѣйствительно, изъ наблюденій для $\lambda_1 = 4{,}31$; $5{,}89$ и $6{,}71$ имѣемъ сначала:

$$X = 469{,}13\,; \quad Y = -1977{,}7\,; \quad Z = 1265{,}9\,,$$

а затѣмъ, комбинируя 1-ое и 2-ое наблюденія, найдемъ:

$$z_1^2 = 1596{,}75 \quad \text{и} \quad z_2^2 = -4{,}95\,.$$

А изъ комбинаціи 1-го и 3-го наблюденій получимъ:

$$z_1^2 = 1674{,}98 \quad \text{и} \quad z_2^2 = -5{,}58\,.$$

§ 6. Хотя отрицательныя значенія z^2 противорѣчатъ теоріи Друде, но, строго говоря, ничего не колеблютъ въ основныхъ взглядахъ электронной теоріи и ниже мы покажемъ, что и изъ теоріи Гельмгольца или нашей можно получить формулы Друде, но уже безъ стѣсняющаго условія: $z^2 > 0$, стоитъ только отбросить уравненіе (3). Получаемыя при этомъ формулы достаточно удовлетворяютъ наблюденіямъ. Дѣйствительно, если мы докончимъ вычисленіе коэффиціентовъ, принявъ, что:

$$z_1^2 = 1635{,}87 \quad \text{и} \quad z_2^2 = -5{,}27 \quad (\sqrt{-z_2^2} = 2{,}296)$$

т. е. среднія изъ вышенайденныхъ, то получимъ:

$$P_1 = 468{,}83\,; \quad P_2 = 0{,}3014\,; \quad q_1 = 52{,}013\,; \quad q_2 = 0{,}9414\,,$$

и формулы дисперсіи никкеля въ области спектра отъ $\lambda_1 = 4{,}31$ до $\lambda_1 = 6{,}71$ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 - \frac{468{,}83\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1635{,}87} - \frac{0{,}3014\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 5{,}27} \\ B &= -\frac{52{,}013\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1635{,}87} - \frac{0{,}9414\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 5{,}27}. \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

Чтобы показать на сколько эти формулы могутъ представить факты, мы вычислили обратно значенія A и B для промежуточныхъ значеній λ_1. Вотъ результаты:

λ_1	$A_{выч.}$	$A_{набл.}$	$B_{выч.}$	$B_{набл.}$
4,31	— 4,688	— 4,685	— 8,312	— 8,182
4,50	— 5,140	— 6,102	— 8,589	— 9,418
4,86	— 6,061	— 6,912	— 9,487	— 10,717
5,00	— 6,437	— 7,204	— 9,879	— 10,800
5,50	— 7,877	— 8,156	— 11,464	— 12,070
5,89	— 9,114	— 9,222	— 12,901	— 13,067
6,00	— 9,448	— 9,576	— 13,337	— 13,520
6,50	— 11,148	— 10,388	— 15,503	— 14,790
6,71	— 11,899	— 11,704	— 16,503	— 16,252
7,00	— 12,973	— 13,823	— 17,972	— 18,040

Сравнивая эти числа съ числами первой таблицы, должны сдѣлать выводы въ пользу нашихъ формулъ.

§ 7. Покажемъ теперь, какимъ образомъ можно получить формулы вида формулъ Друде (разумѣется, только въ формальномъ отношеніи) изъ нашихъ общихъ формулъ.

Если предположимъ, что K и μ относятся къ эфиру (см. теоретическую часть настоящей статьи), т. е. $K=1$, $\mu=1$; затѣмъ предположимъ, что Q_i и λ_i малы въ сравненіи съ λ, тогда при наличности 2-хъ родовъ іонъ (какъ предполагаетъ Друде) получимъ:

$$A = 1 + \frac{P_1\lambda^2}{\lambda^2+(g_1^2-2\lambda_1^2)} + \frac{P_2\lambda^2}{\lambda^2+(g_2^2-2\lambda_2^2)},$$

а это сводится на формулу (1) для A съ той существенной разницей, что $z_i^2=g_i^2-2\lambda_i^2$ ($i=1$, 2) можетъ быть и положительное, и отрицательное количество.

Далѣе, приведя правую часть формулы для $2n^2\varkappa$ къ одному знаменателю, получимъ:

$$B = -\sum\frac{(T_i'\lambda^2+R_i')\lambda^3}{(\lambda^2-\lambda_i^2)^2+g_i^2\lambda^2}.$$

Пренебрегая R_i' въ сравненіи съ первымъ членомъ и допуская 2 рода іоновъ, получаемъ, подобно предыдущему, формулу (2), но безъ условія (3).

Въ такомъ случаѣ надо *три полныхъ наблюденія*, т. е. значенія A и B (или n и $\varkappa$) для волнъ λ_1, чтобы опредѣлить *6-ть* коэффиціентовъ: P_1, P_2; q_1, q_2; z_1^2 и z_2^2 изъ формулъ (1) и (2). Это опредѣленіе можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ.

Пусть:

$$-\frac{A-1}{\lambda_1^2}=a; \quad -\frac{B}{\lambda_1^3}=b \quad \text{и} \quad \frac{a}{b}=m.$$

Это извѣстныя числа. Далѣе положимъ:

$$q_1+q_2=q;$$

$$P_1+P_2=Xq; \quad P_1z_2^2+P_2z_1^2=Yq,$$

$$q_1z_2^2+q_2z_1^2=Zq; \quad z_1^2+z_2^2=u; \quad z_1^2z_2^2=v,$$

тогда уравненія (1) и (2) будутъ [1]):

$$(\lambda_1^2X+Y)\,q=a\lambda_1^4+a\lambda_1^2u+av,$$

$$(\lambda_1^2+Z)\,q=b\lambda_1^4+b\lambda_1^2u+bv.$$

Раздѣляя верхнее уравненіе на нижнее, получимъ:

$$\lambda_1^2X+Y-mZ=m\lambda_1^2. \tag{5}$$

Примѣнивъ это уравненіе къ тремъ наблюденіямъ, опредѣлимъ: X, Y и Z, а затѣмъ имѣемъ напримѣръ уравненіе:

$$\lambda_1^2u+v-\frac{Z+\lambda_1^2}{b}q=-\lambda_1^4. \tag{6}$$

§ 8. Примѣнивъ это уравненіе къ тѣмъ-же тремъ наблюденіямъ, найдемъ: u, v и q, а слѣдовательно и остальные коэффиціенты: P_1, P_2; q_1 и q_2.

Получаемъ слѣдующія формулы для никкеля:

$$A=1-\frac{55{,}648\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2+142{,}096}+\frac{0{,}647\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2-2{,}510},$$

$$B=-\frac{5{,}072\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2+142{,}096}-\frac{1{,}135\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2-2{,}510}.$$

---

[1]) Количество q есть прежнее C (§ 4), а X, Y и Z настоящаго параграфа суть отношенія $X:C$; $Y:C$ и $Z:C$ § 4.

Согласіе получается худшее, такъ напримѣръ для $\lambda_1 = 4.86$ имѣемъ:

$$A = -6{,}208 \text{ вм. } -6{,}918 \quad \text{и} \quad B = -9{,}685 \text{ вм. } -10{,}717,$$

а для $\lambda_1 = 6{,}0$:

$$A = -9{,}554 \text{ вм. } -9{,}576 \quad \text{и} \quad B = -13{,}47 \text{ вм. } -13{,}52.$$

Для всей разсматриваемой области имѣемъ:

λ_1	$A_{выч.}$	$A_{набл.}$	$B_{выч.}$	$B_{набл.}$
4,31	— 4,686	— 4,685	— 8,182	— 8.182
4,50	— 5,185	— 6,102	— 8,676	— 9.418
4,86	— 6,208	— 6,918	— 9,685	— 10,717
5,00	— 6,607	— 7,204	— 10,101	— 10,800
5,50	— 8,062	— 8,156	— 11,702	— 12,070
5,89	— 9,224	— 9,222	— 13,068	— 13,067
6,00	— 9,554	— 9.576	— 13,470	— 13,520
6,50	— 11,066	— 10,388	— 15,304	— 14,790
6,71	— 11,705	— 11,704	— 16.253	— 16,252
7,00	— 12,587	— 13,823	— 17,476	— 18,040

§ 9. Для полнаго сравненія всѣхъ формулъ вычислимъ постоянныя никкеля въ формулѣ (I). Значенія Q и z^2 останутся тѣже, измѣнятся лишь P и A_0, да взойдетъ новый коэффиціентъ k. Возьмемъ среднее наблюденіе для $\lambda_1 = 5{,}89$. Оказывается, что членъ $k\lambda_1^2$ для Ni негодится.

Для дальнѣйшей повѣрки опредѣлимъ A и B для длины волнъ въ 2,51; 3,05; 3,87 и 4,20. Для этихъ волнъ Рубенсъ опредѣлилъ отражательную способность никкеля. Найдемъ для A значенія:

$$+0{,}758; \quad -1{,}456; \quad -2{,}671 \text{ и } -4{,}391;$$

а для B:

$$-14{,}46; \quad -4{,}521; \quad -6.502 \text{ и } 7{,}913.$$

Зная A и B, найдемъ n и $\varkappa$, а именно:

n	2,760	1,282	1,476	1,526,
$\varkappa$	0,919	1,375	1,492	1,698.

Примѣняя сюда правило Кундта, найденное имъ для поглощающихъ срединъ, можемъ утверждать, что maximum поглощенія лежитъ между $\lambda_1 = 2.51$ и 3,05, когда $\varkappa = 1$. Простой интерполяціей найдемъ, что тогда $\lambda_1 = 2.54$.

Опредѣляя R по n и $\varkappa$ и сравнивая съ наблюденіями, получимъ слѣдующее:

$$R_{выч.} \quad 47{,}4 \quad 38{,}3 \quad 46{,}2 \quad 53{,}4\,,$$
$$R_{набл.} \quad 37{,}4 \quad 44{,}2 \quad 48{,}8 \quad 56{,}6\,.$$

Для экстраполяціи результаты достаточно удовлетворительны. Если бы опредѣлить A и B, а затѣмъ и R при помощи нашихъ болѣе простыхъ формулъ, то нашли-бы:

$$R_{выч} \quad 17{,}2 \quad 21{,}6 \quad 34{,}3 \quad и \quad 52{,}7$$

совпаденіе худшее, чего можно было ожидать, такъ какъ въ нашихъ простыхъ формулахъ постоянныхъ входитъ только 4, а не 6.

§ 10. Перейдемъ теперь къ наблюденіямъ надъ дисперсіей *кобальта*. Миноръ въ 1903 году [1]) произвелъ рядъ опредѣленій n и $\varkappa$ по способу Фойхта для области отъ $\lambda_1 = 2{,}313$ до $\lambda_1 = 5{,}893$. Примѣняя всѣ наблюденія, находимъ по способу наименьшихъ квадратовъ значенія коэффиціентовъ формулъ (I) (безъ члена съ k) и (II):

$$A_0 = 11{,}345; \; P = 24{,}347\,; \; Q = 3{,}333\,; \; z^2 = 5{,}243\,,$$

такъ что дисперсія C_0 представится слѣдующими формулами:

$$A = 11{,}345 - \frac{24{,}347\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 5{,}243}\,; \quad B = -\frac{3{,}333\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 5{,}243}\,.$$

Для повѣрки сравнимъ вычисленныя значенія A и B съ наблюденными, т. е. найденными по наблюденнымъ n и $\varkappa$:

λ_1	$A_{выч.}$	$A_{набл.}$	[1]) $B_{выч.}$	$B_{набл.}$
2,313	— 0,952	— 0,829	— 3,894	— 3,142
2,573	— 2,243	— 1,728	— 4,787	— 4,519
2,749	— 3,029	— 2,592	— 5,409	— 6,035
2,981	— 3,968	— 3,193	— 6,107	— 7,000
3,467	— 5,607	— 3,752	— 8,047	— 7,615
3,950	— 6,878	— 5,833	— 9,853	— 9,476
4,500	— 7,995	— 8,492	— 11,915	— 12,261
5,000	— 8,781	— 10,047	— 13,778	— 14,325
5,550	— 9,405	— 11,047	— 15,625	— 15,091
5,893	— 9,809	— 11,817	— 17,068	— 17,130
6,400	— 10,240	— 12,628	— 18,911	— 18,504
6,300	— 10,161	— 12,679	— 18,550	— 18,640

[1]) Annalen der Physik. Bd. 10. p. 608 (1903).

Мы еще прибавили одно наблюденіе Друде для $\lambda_1 = 6{,}3$.

Согласіе не особенно удовлетворительное и для видимой части спектра лучше, чѣмъ для ультрафіолетовой области, что особенно замѣтно для величины B.

Если введемъ членъ съ $k\lambda_1^2$, то при прежнихъ значеніяхъ Q и z^2 найдемъ по способу наименьшихъ квадратовъ:

$$A = 3{,}902 - 0{,}2967 . \lambda_1^2 - \frac{6{,}908 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 5{,}243} .$$

Сравненіе дастъ:

λ_1	$A_{выч.}$	$A_{наб.}$	λ_1	$A_{выч.}$	$A_{наб}$
2,313	— 1,174	— 0,829	4,50	— 7,593	— 8,492
2,573	— 1,917	— 1,728	5,00	— 9,226	— 10,047
2,749	— 2,418	— 2,592	5,50	— 10,960	— 11,047
2,981	— 3,080	— 3,193	5,893	— 12,404	— 11,827
3,467	— 4,474	— 3,752	6,30	— 13,976	— 12,679
3,950	— 5,897	— 5,833			

Согласіе уже болѣе удовлетворительное.

Для дальнѣйшаго сравненія вычислимъ A и B для волнъ: 4,31; 4,86; 5,89; 6,44 и 6,71, для которыхъ Дюбуа и Рубенсъ [1]) въ 1890 г. непосредственно опредѣляли по способу Кундта показатели преломленія n. Этотъ послѣдній по A и B находится изъ формулы:

$$2n^2 = \sqrt{A^2 + B^2} + A .$$

Получаемъ слѣдующій результатъ:

n по вычисленію	1,76	1,84	2,08	2,17	2,21,
n по наблюденію	2,11	2,39	2,76	3,10	3,22.

Согласіе слабое, но характеръ измѣненія общій.

Если вычислимъ постоянныя по формуламъ Друде, принимая для Co величину $\sigma_v = 9{,}875$, то получимъ, исходя изъ наблюденій для $\lambda_1 = 2.313$; 3,950 и 5,893:

$$A = 1 + \frac{0{,}3023 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1{,}46} - \frac{522{,}702 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1349{,}34} ,$$

$$B = - \frac{1{,}418 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1{,}46} - \frac{61{,}585 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1379{,}34} .$$

---

[1]) Annalen der Physik und Chemie. Bd. 41, p. 521 (1890).

При этомъ для опредѣленія z_1^2 и z_2^2 пользовались наблюденіями $1(\lambda_1 = 2{,}313)$ и $3(\lambda_1 = 5{,}893)$. Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$A_{выч.}$	$A_{наб.}$	$B_{выч.}$	$B_{наб.}$
2,313	— 0,826	— 0,829	— 3,141	— 3,142
2,573	— 1,304	— 1,728	— 3,757	— 4,519
2,749	— 1,658	— 2,592	— 4,210	— 6,035
2,981	— 2,160	— 3,193	— 4,831	— 7,000
3,467	— 3,345	— 3,752	— 6,270	— 7,615
3,950	— 4,698	— 5,833	— 7,905	— 9,476
4,500	— 6,446	— 8,492	— 10,051	— 12,261
5,000	— 8,222	— 10,047	— 12,302	— 14,325
5,500	— 10,173	— 11,047	— 14,869	— 15,991
5,893	— 11,825	— 11,827	— 17,127	— 17,130
6,300	— 13,644	— 12,679	— 19,705	— 18,630

Въ послѣдней строкѣ мы прибавили наблюденіе Друде надъ кобальтомъ. Въ общемъ согласіи вычисленій и наблюденій слабое и хуже, чѣмъ по нашимъ формуламъ.

Если-бы для опредѣленія z_1^2 и z_2^2 взяли наблюденія 2 и 3 или 1 и 2, то имѣли-бы для $z_1^2 + z_2^2$ числа: 974,540 и 1552,390, а для $z_1^2 z_2^2$ числа: 3976,57 и —5039,60.

Хотя эти числа не особенно согласны, но возьмемъ среднія значенія и тогда найдемъ:

$$z_1^2 = 1292{,}218 \quad \text{и} \quad z_2^2 = 0{,}352\,,$$

а при помощи нихъ опредѣляемъ:

$$P_1 = 522{,}267\,; \quad P_2 = 0{,}1326\,; \quad q_1 = 61{,}469 \quad \text{и} \quad q_2 = 1{,}534\,,$$

эти коэффиціенты близки къ прежнимъ.

Такимъ образомъ находимъ для дисперсіи кобальта слѣдующія формулы въ электронной теоріи Друде:

$$A = 1 - \frac{522{,}267 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1292{,}218} - \frac{0{,}1326 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 0{,}352}\,,$$

$$B = -\frac{61{,}469 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1292{,}218} - \frac{1{,}534 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 0{,}352}\,.$$

Эти формулы даютъ для A и B числа уже болѣе близкія къ дѣйствительности, хотя все еще худшія, чѣмъ наши формулы. Вотъ примѣры:

λ_1	2,313	2,749	2,981	5,000
$A_{выч.}$	— 1,277	— 2,164	— 2,695	— 9,043
$B_{выч.}$	— 3,915	— 5,011	— 5,649	— 13,390.

Слѣдовательно и здѣсь заключеніе въ пользу нашихъ формулъ.

§ 11. *Желѣзо.* Разберемъ теперь наблюденія надъ дисперсіей желѣза, какъ Минора, такъ и Рубенса съ Гагеномъ и Дюбуа.

Наблюденія Минора обнимаютъ область отъ $\lambda_1 = 2{,}265\,(226{,}^{\mu\mu}5)$ до $\lambda_1 = 6{,}3\,(630{,}^{\mu\mu}0)$, т. е, область видимыхъ лучей и ультрафіолетовыхъ; инфракрасныхъ Миноръ не наблюдалъ.

Вычисляя всѣ 12 наблюденій по способу наименьшихъ квадратовъ, мы нашли, что дисперсія желѣза (стали) можетъ быть представлена слѣдующими формулами съ четырьмя коэффиціентами:

$$A = 1{,}145 - \frac{5{,}960\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 2{,}960}\,, \quad B = -\frac{2{,}786\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 2{,}960}\,.$$

Обратная повѣрка даетъ слѣдующія результаты:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$	$-A_{выч.}$ по 2-й фор.
2,265	2,634	0,991	4,002	4,259	1,865
2,313	2,692	1,094	4,149	4,424	1,904
2,573	2,973	1,579	4,954	5,140	2,119
2,981	3,326	2,039	6,230	5,593	2,471
3,255	3,513	2,487	7,089	5,706	2,719
3,611	3,712	3,806	8,200	7,184	3,061
4,000	3,864	4,600	9,405	9,161	3,506
4,500	4,054	5,055	10,938	11,032	4,018
5,000	4,184	5,515	12,456	13,159	4,558
5,500	4,283	5,569	13,958	15,252	5,292
5,893	4,346	5,610	15,832	17,073	5,856
6,300	4,401	5,493	16,334	18,783	6,365

Согласіе слабое, особенно для A, поэтому мы ввели членъ съ λ_1^2 и получили для A формулу:

$$A = -0{,}4154 - 0{,}12275\,\lambda_1^2 - \frac{1{,}2455\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 2{,}960}\,.$$

Значенія A, вычисленныя по этой формулѣ, помѣщены въ шестомъ столбцѣ предыдущей таблицы.

Согласіе лучше, но все еще слабое.

Любопытно, что если-бы мы разбили всю область наблюденій на двѣ: ультрафіолетовую и видимую, то получили-бы для первой формулы:

$$A = 26{,}528 - \frac{32{,}485 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 0{,}926}, \quad B = -\frac{2{,}220 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 0{,}926},$$

а для второй:

$$A = -1{,}642 - \frac{4{,}840 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 10{,}166}, \quad B = -\frac{3{,}745 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 10{,}166}.$$

Согласіе получается болѣе совершенное, какъ видно изъ чиселъ найденныхъ для A и B въ обѣихъ областяхъ:

λ_1	2,265	2,313	2,573	2,981	3,255	3,611
$-A_{выч.}$	0,992	1,165	1,973	2,893	3,346	3,802
$-B_{выч.}$	4,259	4,377	5,010	5,992	6,644	7,483

ультрафіолетовой и

λ_1	4,000	4,500	5,000	5,500	5,893	6,300
$-A_{выч.}$	4,601	4,864	5,083	5,265	5,386	5,495
$-B_{выч.}$	9,160	11,221	13,313	15,418	17,073	18,788

для видимой области спектра; причемъ для вычисленія коэффиціентовъ служили крайнія наблюденія въ каждой области. Согласіе, какъ видно, весьма удовлетворительное.

Разсмотримъ теперь формулы электронной теоріи Друде. Примемъ относительный коэффиціентъ электропроводности для стали 5.0, тогда получимъ $C = 31{,}90$ и мы найдемъ изъ тѣхъ-же трехъ наблюденій слѣдующія формулы для A и B:

$$A = 1 - \frac{66{,}120 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 327{,}708} - \frac{0{,}4459 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 8{,}812},$$

$$B = -\frac{31{,}818 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 327{,}708} - \frac{0{,}0824 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 8{,}812}, \text{—}$$

формулы явно не состоятельныя.

§ 12. Примѣнимъ теперь наши формулы къ наблюденіямъ Рубенса и Дюбуа [1]), и Рубенса одного [2]) надъ сталью.

Эти наблюденія обнимаютъ область отъ $\lambda_1 = 4{,}31$ до $\lambda_1 = 7{,}0$ и даютъ для нѣкоторыхъ волнъ количества отраженнаго свѣта (въ %% падающаго), а для другихъ показатель преломленія; по этимъ даннымъ мы вычисляемъ количество $n\varkappa$ по формуламъ § 2. Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующій рядъ данныхъ:

λ_1	4,31	4,50	4,86	5,00	5,50	5,89	6,00	6,44	6,50	6,71	7,0
n	2,05	*2,18*	2,43	*2,47*	*2,61*	2,72	*2,79*	3,06	*3,07*	3,12	*3,20*
R%	*53,2*	55,4	*55,1*	55,0	55,0	*55,5*	55,7	*56,3*	56,4	*57,3*	58,5.

Здѣсь косыя числа опредѣлены интерполированіемъ (а крайнія— экстраполированіемъ) и значенія отражательной способности R взяты среднія изъ всѣхъ наблюденій названныхъ ученыхъ.

Взявъ за исходныя наблюденія для $\lambda_1 = 4{,}31$ и $\lambda_1 = 6{,}71$, получимъ слѣдующія формулы для дисперсіи стали въ наблюдаемой области (видимыхъ лучей):

$$A = -11{,}742 + \frac{10{,}673 \,.\, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 7{,}087}, \quad B = -\frac{3{,}767 \,.\, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 7{,}087}.$$

Производя обратную повѣрку, находимъ слѣдующія результаты:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
4,31	4,016	4,015	11,752	11,754
4,50	3,836	4,688	12,557	13,396
4,86	3,532	3,972	14,083	15,279
5,00	3,426	3,814	14,675	15,555
5,50	3,095	3,356	16,786	16,645
5,89	2,879	3,214	18,425	17,722
6,00	2,824	3,044	18,884	18,362
6,44	2,197	2,161	20,720	20,776
6,50	2,602	2,175	20,968	20,912
6,71	2,520	2,519	21,839	21,843

[1]) Ann. d. Physik und Chemie. Bd. 41. p. 521. (1890).
[2]) Id. Bd. 37. p. 265, (1889).

Согласіе достаточное, особенно для болѣе длинныхъ волнъ. Можно еще экстраполировать n и K для $\lambda_1 = 7{,}0$ и $10{,}0$; получаются для A и B значенія: $-2{,}417$; $-1{,}775$ для A и $-23{,}04$ и $-35{,}18$ для B.

Наши формулы даютъ: $-2{,}963$; $-1{,}623$ и $-23{,}26$; $-35{,}20$.

Можно получить еще сравненіе отражательной способности для инфракрасныхъ волнъ. Такъ для незакаленной стали Рубенсъ и Гагенъ нашли, что для

λ_1	8,0	12,0	15,0
R%	58,0	67,8	71,9 [1]).

Вычисляя для этихъ волнъ A и B по нашимъ формуламъ, а затѣмъ опредѣляя по нимъ R, найдемъ для него значенія: 59,9; 65,7; 68,7. Даже для $\lambda_1 = 20{,}0$ еще имѣемъ $R = 72{,}3$%, а наблюденіе даетъ 76,7%.

Если-бы вычислили формулу для A съ членомъ $k\lambda_1^2$, то нашли-бы, присоединивъ къ крайнимъ наблюденіямъ еще наблюденіе для $\lambda_1 = 5{,}0$:

$$A = -3{,}513 + 0{,}0694 . \lambda_1^2 - \frac{2{,}465 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 7{,}087} .$$

Сравненіе результатовъ вычисленій и наблюденій дало-бы слѣдующее:

λ_1	4,31	4,50	4,86	5,00	5,50	5,89	6,00	6,44	6,50	6,71
$-A_{выч.}$	4,009	3,934	3,770	3,699	3,411	3,153	3,075	2,740	2,693	2,519.

Эти значенія A еще ближе къ наблюденнымъ.

Вообще надо сказать, что наблюденія Рубенса и Гагена, а также Рубенса одного или съ Дюбуа лучше укладываются въ наши формулы, чѣмъ наблюденія Минора; причина этого лежитъ, вѣроятно, въ большей точности наблюденій первыхъ ученыхъ.

§ 13. *Мѣдь.* Наблюденія Минора обнимаютъ область отъ $\lambda_1 = 2{,}313$ до $\lambda_1 = 6{,}300$. Принявъ во вниманіе всю совокупность наблюденій, получимъ по способу наименьшихъ квадратовъ слѣдующія формулы для представленія дисперсіи мѣди:

$$A = -9{,}479 + \frac{4{,}287 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3{,}618}, \quad B = -\frac{0{,}6746 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 3{,}618} \qquad (1)$$

если ограничимся простѣйшей формой для A, если-же примемъ въ расчетъ членъ $k\lambda_1^2$, то получимъ:

$$A = 4{,}554 - 0{,}2819 . \lambda_1^2 - \frac{1{,}1996 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3{,}618} . \qquad (2)$$

[1]) Изъ другихъ наблюденій 70,8%.

Вотъ результаты обратной повѣрки:

λ_1	$-A_{выч.}$ по 1-й фор.	$-A_{выч.}$ по 2-й фор.	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
2,313	—3,563	0,659	0,191	4,820	4,039
2,573	0,025	—0,042	0,054	3,828	3,979
2,749	1,255	—0,122	0,033	3,588	3,766
2,981	2,248	—0,026	0,157	3,392	3,313
3,467	3,346	0,555	0,733	3,346	3,469
3,950	3,898	1,407	1,732	3,469	4,136
4,500	4,260	2,616	3,339	3,696	4,861
5,000	4,467	3,997	4,275	3,944	5,141
5,350	4,572	4,889	4,172	4,131	4,570
5,500	4,610	5,337	4,192	4,214	3,984
5,750	4,666	6,115	5,471	4,356	3,161
5,893	4,694	6,576	6,536	4,448	3,245
6,300	4,762	7,946	8,756	4,676	3,385

Согласіе, особенно для ультрафіолетовой части, слабое.

Если вычислимъ формулы электронной теоріи Друде, то встрѣтимся съ тѣмъ-же обстоятельствомъ, какъ и въ случаѣ желѣза.

§ 14. Примѣняя „электронныя" формулы къ мѣди и руководясь графикой R по наблюденіямъ Минора, можно думать, что между $\lambda_1 = 4,5$ и $\lambda_1 = 5,893$ нѣтъ сильнаго поглощенія, поэтому получимъ слѣдующія формулы для области (4,5 — 5,893):

$$A = 1 - \frac{2,580 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 5,188} - \frac{0,941 \cdot \lambda_1^2}{41,952 - \lambda_1^2},$$

$$B = -\frac{0,8746 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 5,138} + \frac{0,0991 \cdot \lambda_1^3}{41,952 - \lambda_1^2}.$$

Сравненіе съ наблюденіями Минора дастъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
4,50	3,335	3,339	4,858	4,861
5,00	3,635	4,275	4,773	5,141
5,35	4,165	4,172	4,591	4,570
5,50	5,346	4,192	4,385	3,984
5,75	5,554	5,471	3,837	3,161
5,893	6,553	6,536	3,241	3,245

Очень можетъ быть, что существуютъ области поглощенія и внутри этихъ предѣловъ λ_1, напримѣръ, вѣроятно, вблизи $\lambda_1 = 5{,}0$ и $\lambda_1 = 5{,}5$, но вслѣдствіе большого интервала въ наблюденіяхъ они не обнаруживаются графикой R.

Сравненіе этихъ результатовъ съ результатами по другимъ формуламъ [(1) и (2)], какъ будто говоритъ въ пользу первыхъ.

§ 15. *Золото.* Для золота имѣемъ большой рядъ наблюденій Рубенса и Гагена [1]). Примемъ за основныя крайнія наблюденія: $\lambda_1 = 6{,}5$ и $\lambda_1 = 25{,}0$, слѣдовательно, имѣемъ дѣло главнымъ образомъ съ инфракрасной областью спектра. Для этихъ значеній вычислимъ:

$$A = -12{,}82 \text{ и } -279{,}2, \qquad B = -2{,}792 \text{ и } -85{,}51.$$

Съ этими данными находимъ для дисперсіи золота въ разсматриваемой области слѣдующія формулы:

$$A = 25{,}62 - \frac{615{,}01 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 636{,}34}, \quad B = -\frac{6{,}9012 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 636{,}34}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
6,5	12,65	12,82	2,791	2,792
7,0	18,35	17,08	3,454	3,139
8,0	30,58	26,94	5,045	3,841
10,0	57,91	47,20	9,372	9,250
12,0	87,88	78,10	15,280	12,390
15,0	135,04	126,70	27,04	22,370
20,0	211,74	233,00	53,27	62,830
25,0	279,11	279,2	85,48	85,510

Здѣсь мы опредѣляли n по найденнымъ изъ опыта $n\varkappa = g$ и R, пользуясь формулой (§ 2):

$$n = q - \sqrt{q^2 - g^2 - 1},$$

гдѣ

$$q = \frac{1+R}{1-R}.$$

[1]) Ann. d. Physik. Bd. 1, p. 373 (1900). Bd. 8, p. 17 и p. 447 (1902). Bd. 11, p. 881 (1903).

Хотя для R мы брали среднее изъ различныхъ опредѣленій Рубенса и Гагена, но всетаки и малая погрѣшность въ R вызываетъ очень большую въ q, а, слѣдовательно, и въ n; дѣйствительно, обозначимъ погрѣшность въ R черезъ ΔR, а въ q черезъ Δq, найдемъ:

$$\Delta q = \frac{2R}{(1-R)^2} \Delta R.$$

Чтобы яснѣе видѣть степень приложимости нашихъ простыхъ формулъ къ золоту, мы вычислили постоянныя изъ значеній для $\lambda_1 = 6{,}5$ и 20, а также для $\lambda_1 = 7{,}0$ и 25 и нашли:

$$A_0 = 22{,}20; \quad P = 1000{,}80; \quad Q = 12{,}320 \quad \text{и} \quad z^2 = 1169{,}10$$

для первой комбинаціи и

$$A_0 = 22{,}48; \quad P = 691{,}50; \quad Q = 7{,}840 \quad \text{и} \quad z^2 = 807{,}60$$

для второй. Разницы въ виду замѣченнаго выше понятны. Если-бы взяли за крайнія наблюденія для $\lambda_1 = 6{,}0$ и $\lambda_1 = 25{,}0$, то нашли-бы:

$$A_0 = 27{,}21; \quad P = 577{,}35; \quad Q = 6{,}142 \quad \text{и} \quad z^2 = 550{,}05.$$

Если возьмемъ среднія изъ этихъ и первыхъ (область 6,5 — 25,0), то получимъ для золота:

$$A = 26{,}42 - \frac{596{,}18 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 593{,}20}, \quad B = -\frac{6{,}521 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 593{,}20}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
6,0	7,69	8,32	2,238	2,264
6,5	13,22	12,65	2,818	2,792
7,0	19,07	16,91	3,483	3,139
8,0	31,64	26,72	5,080	3,841
10,0	59,58	47,35	9,407	9,250
12,0	90,03	77,83	15,285	12,390
15,0	137,53	127,73	26,898	22,370
20,0	213,69	232,90	52,524	62,830
25,0	279,45	279,77	83,640	85,510

На сколько послѣдняя формула даетъ результаты близкіе къ дѣйствительности, видно еще изъ слѣдующаго примѣра. Вычисливъ A и B для $\lambda_1 = 30{,}0$ (т. е. $3^{\mu}{,}0$), получимъ: $A = -332{,}91$ и $B = -117{,}91$, а отсюда найдемъ:

$$n = 3{,}183 \quad \text{и} \quad n\varkappa = 18{,}52.$$

Экстраполированіе наблюденій Рубенса и Гагена даетъ $n\varkappa = 18{,}40$.

А если вычислимъ отражательную способность для этой волны, то найдемъ: $R = 96{,}5\%$, а прямыя наблюденія Рубенса и Гагена [1]) дали: $96{,}7\%$.

Мы разсмотрѣли инфракрасную область дисперсіи золота, что-же касается видимой или ультрафіолетовой, то здѣсь изъ наблюденій Рубенса и Гагена нельзя вывести значеній n, такъ какъ они получаются комплексными.

§ 16. Разсматривая кривую прозрачности золота по наблюденіямъ Гагена и Рубенса (An. d. Ph. Bd. 8, p. 450) или таблицу 4 (p. 447) можно приложить формулы § 7, разбивъ всѣ наблюденія на области отъ $\lambda_1 = 4{,}5$ до $8{,}0$, затѣмъ отъ 10 до 20. Получаемъ для первой области (4,5 -- 8,0):

$$A = 1 - \frac{0{,}2902 \, . \, \lambda_1^2}{18{,}232 - \lambda_1^2} - \frac{20.595 \, . \, \lambda_1^2}{110{,}876 - \lambda_1^2},$$

$$B = \frac{0{,}1086 \, . \, \lambda_1^3}{18{,}232 - \lambda_1^2} - \frac{0{,}3267 \, . \, \lambda_1^3}{110{,}876 - \lambda_1^2}.$$

Повѣрка даетъ слѣдующія результаты:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
4,5	0,692	0,692	5,229	5,249
5,0	3,924	2,814(?)	2,482	5,022(?)
5,5	5,997	5,145	2,178	2,260
6,0	8,314	8,317	2,263	2,264
6,5	11,168	12,650	2,549	2,943
7,0	14,847	16,910	3,022	3,172
8,0	26,710	26,720	4,783	4,783

[1]) Ann. d. Physik. Bd. 11, p. 881 (1903).

Если-бы опредѣлили R и сравнили-бы съ непосредственными наблюденіями Гагена и Рубенса, то получили-бы слѣдующую таблицу:

λ_1	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	8,0	$(0^{\mu},1)$
$R_{выч.}$	34,87	64,93	78,78	85,05	88,53	90,79	93,65	%
$R_{наб.}$	34,95	47,15	74,35	85,0	88,9	91,9	93,65.	

Опредѣленіе R, а также A и B для $\lambda_1 = 5{,}0$ должно быть ошибочно, ибо вычисленіе $g = n\varkappa$ даетъ совершенно совпадающіе результаты, какъ видно изъ приводимыхъ чиселъ для такой-же длины волнъ:

$n\varkappa$ *выч.*	1,727	2,075	2,487	2,912	3,363	3,873	5,189
$n\varkappa$ *наб.*	1,73	2,07	2,32	2,91	3,58	4,13	5,19.

Предыдущая формула даетъ для $\lambda_1 = 4{,}2$ minimum прозрачности (maximum R), что видно изъ графики.

Для области 10—20 получаемъ:

$$A = 1 - \frac{0{,}566 \, . \, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 199{,}67} - \frac{923{,}31 \, . \, \lambda_1^2}{1986{,}67 - \lambda_1^2},$$

$$B = \frac{0{,}0259 \, . \, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 199{,}67} - \frac{12{,}818 \, . \, \lambda_1^3}{1986{,}67 - \lambda_1^2}.$$

Обратный разсчетъ дастъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
10	47,372	47,35	7,254	7,050
12	69,689	77,83	12,824	12,39
15	121,95	127,73	21,162	22,10
20	232,90	232,90	65,66	63,60

Если-бы пожелали представить одной формулой всю область наблюденій (4,5 — 25,0), то это оказалось-бы не возможнымъ, ибо при $\lambda_1 = 8{,}5$ должно существовать сильное поглощеніе.

При этихъ вычисленіяхъ $n\varkappa$ по A и B мы пользовались формулами:

$$\varepsilon = \frac{A}{B}, \quad \varkappa = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}, \quad n^2 = -\frac{B}{2\varkappa}$$

и слѣдовательно,

$$n\varkappa = \varkappa\sqrt{-\frac{B}{2\varkappa}},$$

легко находимыхъ изъ положеній:

$$n^2(1-\varkappa^2) = A; \quad 2n^2\varkappa = -B.$$

§ 17. *Платина.* Для платины наблюденія Рубенса и Гагена надъ R и $g = n\varkappa$ даютъ возможность вычислить n въ области $\lambda_1 = 6{,}5$ до $\lambda_1 = 12{,}0$, т. е. отъ $0{,}^\mu 65$ до $1{,}^\mu 2$. Для этой области получаются формулы:

$$A = 31{,}16 - \frac{72{,}53 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 31{,}17}, \quad B = -\frac{7{,}537 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 31{,}17}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
6,5	10,58	10,57	28,19	28,19
7,0	13,17	12,24	32,25	31,76
8,0	17,62	13,06	40,55	42,44
10,0	24,15	23,75	57,46	55,07
12,0	28,46	28,45	74,35	74,35
15,0	32,54	—	99,30	—
20,0	36,13	—	139,84	—
25,0	37,92	—	142,56	—

При помощи вычисленныхъ A и B для $\lambda_1 = 15$; 20 и 25 находимъ n и $n\varkappa$, а такъ какъ послѣднее можно экстраполировать изъ наблюденій Рубенса и Гагена, то имѣемъ еще возможность сравнить наши разсчеты съ опытомъ. Имѣемъ для приведенныхъ трехъ волнъ:

выч. $n\varkappa$ 8,28 9,50 9,63

наб. $n\varkappa$ 8,93 11,10 13,0.

Точно также можно сравнить n, вычисленное по нашимъ формуламъ съ найденнымъ экстраполяціей наблюденій Рубенса и Гагена. Получаемъ:

Вычисл. n 6,00 9,26 9,32

Экстрап. n 6,18 8,11 10,14.

Эти числа говорятъ сами за себя.

§ 18. Примѣняя къ платинѣ наши электронныя формулы, найдемъ:

$$A = 1 - \frac{25.103 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 48.70} - \frac{0.249 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 140.32},$$

$$B = -\frac{9,299 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 48,70} - \frac{0.024 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 140,32},$$

причемъ для вычисленія постоянныхъ служили наблюденія Гагена и Рубенса для $\lambda_1 = 6,5$; $\lambda_1 = 8,0$ и $\lambda_1 = 12,0$.

Для обратной повѣрки вычислимъ $n\varkappa = g$ для $\lambda_1 = 7$ и 10.

Получаемъ для λ_1	7	10
$n\varkappa$ вычисленное	4,80	6,33
$n\varkappa$ наблюденное	4,81	6,47.

Для дальнѣйшей повѣрки экстраполируемъ $n\varkappa$ для $\lambda_1 = 15$; 20 и 25. Найдемъ:

$n\varkappa$ вычисленное	8,24	9,70	10,84
$n\varkappa$ наблюденное	8,93	11,10	13,00.

Слѣдовательно и экстраполяція даетъ еще результаты достаточно удовлетворительные.

Болѣе удовлетворительные результаты получаются при вычисленіи $g = n\varkappa$ для болѣе короткихъ волнъ.

Такъ для

	$\lambda_1 =$	3,26	3,85	4,5	5,0	6,0
вычисленное	$n\varkappa =$	2,23	2,69	3,175	3,53	3,53
наблюденное	$n\varkappa =$	2,34	2,76	3,07	3,52	4,16.

Такимъ образомъ формула, вычисленная нами для платины, можетъ обнимать область дисперсіи отъ $\lambda_1 = 3,26$ до $\lambda_1 = 20$ или даже 25.

§ 19. *Серебро.* Возьмемъ сначала наблюденія Рубенса и Гагена въ области $0,^\mu 42 - 1,^\mu 5$. Имѣемъ рядъ значеній $n\varkappa$ и R, по которымъ вычислимъ n; находимъ:

λ_1	4,2	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	8,0	10,0	12,0	15,0
$n\varkappa$	2,31	2,59	3,21	3,78	4,20	4,77	5,52	6,21	8,0	10,3	12,4
R	86,8	90,6	91,6	92,6	92,8	95,9	96,2	96,6	97,3	97,7	97,9
n	0,22	0,20	0,25	0,30	0,35	0,25	0,30	0,34	0,45	0,63	0,82.

Взявъ за основаніе наблюденія для $\lambda_1 = 4,2$; 6,0 и 15,0, получимъ для дисперсіи серебра въ области 4,2 — 15,0 ($0,^{\mu}42 — 1,^{\mu}5$), въ области видимой и инфракрасной, слѣдующія формулы:

$$A = 6,440 - 0,7435 . \lambda_1^2 + \frac{12,765 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 145,07},$$

$$B = -\frac{2,231 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 145,07}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
4,2	5,291	5,288	1,016	1.016
4.5	7,052	6,668	1,230	1,036
5,0	10,271	10,240	1,640	1,605
5.5	13,848	14,200	2,167	2,268
6,0	17,788	17,520	2,661	2,940
6,5	22,093	22,690	3,271	2,385
7.0	26,769	30,380	3,943	3,312
8,0	37,236	38,440	5,464	4,222
10,0	62,701	63,770	9,316	7,680
12,0	94,261	105,690	13.340	12,980
15,0	153,084	153,090	20,350	20,340

Согласіе достаточное. Для дальнѣйшаго сравненія опредѣлимъ A и B для $\lambda_1 = 20,0$, найденнаго Рубенсомъ и Гагеномъ. Найдемъ:

$$A = -281,6; \qquad B = -32,75,$$

а по наблюденію:

$$A = -232,1; \qquad B = -33,02.$$

Если-бы отсюда опредѣлили n и $n\varkappa$, то нашли-бы:

$$n = 0,974; \qquad n\varkappa = 16,81,$$

а Рубенсъ и Гагенъ нашли изъ опыта:

$$n = 1,140; \qquad n\varkappa = 15,90.$$

Область отъ $\lambda_1 = 4{,}5$ до $\lambda_1 = 15{,}0$ **можно также представить слѣдующими простыми формулами:**

$$A = 16{,}017 - \frac{516{,}53 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 462{,}22},$$

$$B = - \frac{4{,}141 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 462{,}22}.$$

Сравненіе вычисленій и наблюденій даетъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-A_{выч.}$	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-A_{выч.}$
4,5	5,662	5,657	—	0,782	0,782	—
5,0	10,846	8,362	—	1,062	0,976	—
5,5	15,710	10,945	—	1,399	1,166	—
6,0	24,828	15,641	—	2,063	1,607	—
6,5	27,240	22,69	22,70	2,254	2,385	2,385
7,0	33,48	30,38	29,52	2,779	3.312	2,931
8,0	46,803	38,44	43,95	4,029	4,223	4,224
10,0	75,888	63,770	74,80	7,368	7,680	7,621
12,0	106,680	105,690	106,67	11,804	12,978	12,045
15,0	153,10	153,09	153,04	20,337	20,336	20,332

Согласіе для B значительно больше, чѣмъ для A, какъ это и слѣдовало ожидать.

Если-бы область съузили, взяли-бы напримѣръ отъ $\lambda_1 = 6{,}5$ до $\lambda_1 = 15{,}0$, то для B получили-бы еще большее согласіе, если-бы взяли:

$$A = 25{,}675 - \frac{474{,}00 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 371{,}73},$$

$$B = - \frac{3{,}595 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 371{,}83}.$$

Результаты помѣщены въ 4 и 7 столбцахъ предыдущей таблицы.

§ 20. Перейдемъ теперь къ наблюденіямъ Минора [1]), въ области видимой части спектра ($\lambda_1 = 3{,}95$ до $\lambda_1 = 6{,}30$). Получимъ слѣдующія формулы:

$$A = 6{,}889 - \frac{86{,}912 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 113{,}417},$$

$$B = - \frac{0{,}9840 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 113{,}417}.$$

---

[1]) L. c. p. 617.

Замѣтимъ, что здѣсь коэффиціентъ $A_0 = 6{,}889$ близокъ къ найденному въ первой формулѣ: $A_0 = 6{,}440$, а частное $\frac{P}{z^2} = 0{,}7663$, близко къ коэффиціенту $k = 0{,}7435$ той-же формулы (§ 19).

Вычисленія A и B даютъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
3,95	3,621	3,620	0,470	0,470
4,50	6,584	5,657	0,671	0,782
5,00	8,805	8,362	0,889	0,979
5,50	11,411	10,945	1,140	1,166
5,893	13,485	13,204	1,359	1,288
6,30	15,641	15,641	1,607	1,607

Согласіе достаточное. Если-бы за крайнія наблюденія взяли наблюденія для $\lambda_1 = 3{,}95$ и $\lambda_1 = 5{,}893$, то получили-бы:

$$A_0 = 7{,}828\,, \quad P = 66{,}320\,, \quad Q = 0{,}6892 \quad \text{и} \quad z^2 = 74{,}775\,.$$

близкія къ прежнимъ значеніямъ.

Если возьмемъ бо́льшую область, напримѣръ отъ $\lambda_1 = 3{,}29$ до $\lambda_1 = 5{,}893$, то получимъ по способу наименьшихъ квадратовъ:

$$A = 4{,}037 - 0{,}5476\,.\,\lambda_1^2 + \frac{1{,}471\,.\,\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 0{,}4022}\,,$$

$$B = -\frac{0{,}1752\,.\,\lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 0{,}4022}\,.$$

Сравненіе даетъ слѣдующее:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
3,290	0,472	0,046	0,566	0,581
3,320	0,580	0,358	0,561	0,525
3,360	0,725	0,609	0,569	0,420
3,460	1,096	1,157	0,587	0,481
3,611	1,576	2,064	0,614	0,583
3,950	3,073	3,620	0,675	0,470
4,500	5,609	5,657	0,773	0,782
5,000	8,205	8,362	0,862	0,979
5,590	10,863	10,945	0,951	1,166
5,893	13,282	13,204	1,069	1,288
6,300	16,231	15,641	1,093	1,607

Вслѣдствіе малости ε^2 можно брать приближенныя формулы:

$$A = 5{,}508 - 0{,}5476 . \lambda_1^2, \quad B = -0{,}1752 . \lambda_1^3.$$

Къ наблюденіямъ Минора мы присоединили еще одно наблюденіе Друде для $\lambda_1 = 6{,}3$.

Согласіе достаточное.

§ 21. Примѣненіе „электронныхъ формулъ" къ серебру можетъ быть сдѣлано для области между двумя полосами поглощенія. Наблюденія Рубенса и Гагена надъ прозрачностью металловъ показываютъ, что для серебра поглощеніе лежитъ за длиной волны $\lambda_1 = 3{,}26$ въ области ультрафіолетовой. Поэтому воспользуемся наблюденіями Минора въ области 3,26 — 5,5 [1]). Получимъ слѣдующія формулы:

$$A = 1 - \frac{33{,}883 . \lambda_1^2}{114{,}142 - \lambda_1^2} + \frac{0{,}627 . \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 9{,}438},$$

$$B = -\frac{0{,}5185 . \lambda_1^3}{114{,}142 - \lambda_1^2} - \frac{0{,}01387 . \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 9{,}438}.$$

Сравненіе съ наблюденіями Минора даетъ слѣдующее:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
3,26	—0,323	—0,295	0,586	0,584
3,28	—0,031	—0,169	0,547	0,547
3,29	0,106	0,046	0,526	0,581
3,32	0,433	0,358	0,505	0,525
3,36	0,803	0,609	0,475	0,420
3,46	1,484	1,157	0,438	0,481
3,61	2,232	2,064	0,422	0,583
3,95	3,569	3,620	0,463	0,470
4,50	5,719	5,657	0,620	0,782
5,00	7,998	8,362	0,838	0,979
5,50	10,761	10,945	1,139	1,166
5,893	13,383	13,204	1,448	1,288

[1]) Строго говоря, наблюденія Гагена и Рубенса даютъ область отъ 3,21 до 7,0. Ann. d. Ph. 8, p. 446. (1902).

Вычисляя наблюденія Друде для $\lambda_1 = 6{,}3$, найдемъ:

$A = -16{,}651$ вм. $-15{,}641$ и $B = -1{,}856$ вм. $-1{,}607$.

Наблюденія Гагена и Рубенса для области 6,0 — 15,0 даютъ слѣдующія формулы:

$$A = 1 - \frac{3045{,}25 \,.\, \lambda_1^2}{4595{,}64 - \lambda_1^2} + \frac{2{,}458 \,.\, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 20{,}06},$$

$$B = - \frac{23{,}460 \,.\, \lambda_1^3}{4595{,}64 - \lambda_1^2} - \frac{0{,}1347 \,.\, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 20{,}06}.$$

Сравненіе даетъ слѣдующіе результаты:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
6,0	17,493	17,517	2,936	2,940
6,5	22,606	22,690	3,082	2,385
7,0	27,658	30,380	3,367	3,312
8,0	38,418	38,449	4,220	4,223
10,0	63,664	63,770	6,903	7,680
12,0	94,652	105,690	10,984	12,980
15,0	153,072	153,088	20,333	20,336

Если воспользуемся наблюденіями Гагена и Рубенса въ области 3,26 — 5,5, то получимъ [1]):

$$A = 1 + \frac{1{,}897 \,.\, \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 6{,}12} - \frac{63{,}513 \,.\, \lambda_1^2}{139{,}56 - \lambda_1^2},$$

$$B = - \frac{0{,}0292 \,.\, \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 6{,}12} - \frac{1{,}354 \,.\, \lambda_1^3}{139{,}56 - \lambda_1^2},$$

причемъ за основныя наблюденія взяли: 1) $\lambda_1 = 3{,}26$, $n\varkappa = 0{,}449$, и $n = 0{,}661$, 2) $\lambda_1 = 4{,}2$ и 3) $\lambda_1 = 5{,}5$.

[1]) Принявъ за отражательную способность для $\lambda_1 = 3{,}26$ среднее изъ опредѣленій n, а именно 0,661. Тогда $A = +0{,}235$ и $B = -0{,}594$.

Сравненіе даетъ:

λ_1	$-A_{выч.}$	$-A_{наб.}$	$-B_{выч.}$	$-B_{наб.}$
3,26	—0,234	—0,235	0,588	0,594
3,38	0,573	0,673	0,621	0,444
3,57	1,730	1,600	0,687	0,499
3,85	3,314	3,121	0,811	0,769
4,20	5,284	5,288	1,011	1,016
4,50	7,061	6,668	1,223	1,036
5,00	10.347	10,240	1,668	1,605
5,50	14,197	14,200	2,263	2,268
6,00	18,793	17,520	3,035	2,940

Для короткихъ волнъ согласіе меньшее, чѣмъ для длинныхъ; причина въ малой точности опредѣленія R.

§ 22. Обозрѣвая предыдущее, можно утверждать, что и при настоящемъ, неполномъ, знаніи дисперсіи металловъ формулы нашей теоріи въ самой простой формѣ въ достаточной степени удовлетворяютъ наблюденіямъ. Дальнѣйшія наблюденія дадутъ безъ сомнѣнія еще больше данныхъ для подтвержденія предлагаемыхъ формулъ.

Въ заключеніе должно присоединить слѣдующее. Настоящая работа была уже закончена, какъ появилась статья Друде (Ann. d. Ph. Bd. 14, p. 936), въ которой онъ получаетъ нѣкоторые выводы изъ своей „электронной теоріи“ металловъ; между тѣмъ какъ повѣрка его формулъ, какъ показано мной выше, приводитъ къ отрицательному результату въ нѣкоторыхъ случаяхъ; это обстоятельство подрываетъ значеніе полученныхъ Друде выводовъ.

Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы.

В. П. Ермакова.

1. Предисловіе.

Въ XXIV томѣ Математическаго Сборника помѣщенъ мемуаръ А. Н. Коркина подъ заглавіемъ: *Изысканіе о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка* [1]). Въ этомъ мемуарѣ Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Въ дифференціальномъ уравненіи:

$$Mdx + Ndy = 0$$

M и N суть цѣлыя однородныя функціи относительно y; требуется найти самое общее выраженіе этихъ функцій подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе имѣло данный интегральный множитель:

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}.$$

Многіе математики пробовали рѣшать эту задачу раньше, но изслѣдовали только частные случаи. Коркину удалось показать, что полное рѣшеніе задачи всегда можетъ быть найдено въ конечной формѣ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Сверхъ того Коркинъ указалъ тѣ случаи, когда рѣшеніе задачи не содержитъ ни опредѣленныхъ интеграловъ, ни квадратуръ. Всякій согласится съ тѣмъ, что этотъ результатъ огромной важности. Однако изслѣдованіе Коркина слишкомъ длинно (220 страницъ) и переполнено массою формулъ. Я увѣренъ, что

[1]) Этотъ мемуаръ въ 1902 году изданъ на французскомъ языкѣ отдѣльной брошюрой подъ заглавіемъ: „Etudes des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre“. St. Pétersbourg.

немногіе изъ математиковъ прочтутъ этотъ мемуаръ, и цѣнный результатъ Коркина можетъ исчезнуть безслѣдно. Но я знакомъ съ прежними изслѣдованіями Коркина и знаю, что всѣ его работы имѣютъ высокій интересъ. Вотъ почему я употребилъ всѣ усилія, чтобы познакомиться и съ настоящимъ мемуаромъ. Въ результатѣ оказалось, что все изслѣдованіе Коркина можно изложить въ очень краткой и ясной формѣ.

Коркинъ замѣчаетъ, что рѣшеніе задачи приводится къ интегрированію такой системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ функцій болѣе числа уравненій. Можно ли изъ этой системы при помощи алгебраическихъ операцій и дифференцированій выдѣлить опредѣленную систему дифференціальныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ функцій равнялось бы числу уравненій? Первая глава мемуара Коркина содержитъ рѣшеніе этого вопроса. Особенно много хлопотъ доставилъ Коркину тотъ случай, когда сумма показателей интегральнаго множителя цѣлое отрицательное число. Это изслѣдованіе можно сильно упростить, если предварительно доказать двѣ общія очень простыя теоремы. Первая изъ этихъ теоремъ (§ 3) показываетъ, что данную задачу можно замѣнить другою, въ которой нѣкоторые показатели интегральнаго множителя увеличены на цѣлые числа. Вторая теорема (§ 5) показываетъ, что самое общее рѣшеніе задачи содержитъ произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ. Послѣ этихъ теоремъ становятся ненужными всѣ сложныя формулы первой главы мемуара Коркина. Въ остальныхъ двухъ главахъ Коркинъ показываетъ, какимъ образомъ полное рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленнымъ интеграламъ. Массу преобразованій нужно выполнить, чтобы въ результатѣ получились интегралы, имѣющіе конечное значеніе. Между тѣмъ всѣ эти преобразованія очень просто вытекаютъ изъ вышеупомянутыхъ теоремъ.

Смѣю думать, что мнѣ удалось изложить цѣнные результаты А. Н. Коркина въ простой и ясной формѣ. Надѣюсь, что въ такой формѣ рѣшеніе задачи Коркина займетъ видное мѣсто въ курсахъ дифференціальныхъ уравненій.

2. Постановка задачи и основная теорема.

Пусть M и N означаютъ нѣкоторыя цѣлыя алгебраическія функціи перемѣннаго y; коэффиціенты у этихъ многочленовъ суть функціи перемѣннаго x. Предметъ нашего изслѣдованія заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи:

Требуется найти самое общее выраженіе для M и N подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

имѣло интегральный множитель

$$R = (y - u_1)^{\alpha_1}(y - u_2)^{\alpha_2} \dots (y - u_n)^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Здѣсь показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть числа постоянныя, $u_1, u_2, \dots, u_n$ суть функціи перемѣннаго x.

Для этой цѣли, какъ извѣстно, должно удовлетворяться слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \log R}{\partial y}. \tag{3}$$

Подставивъ вмѣсто R его выраженіе (2), мы приведемъ это уравненіе къ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \sum \frac{\alpha_i(M + Nu_i')}{y - u_i}. \tag{4}$$

Это уравненіе должно удовлетворяться при произвольныхъ значеніяхъ y. Положимъ y равенъ u_i. Вторая часть уравненія (4) не должна обращаться въ безконечность; поэтому $M(y) + N(y)u_i'$ должно дѣлиться безъ остатка на $y - u_i$. Чтобы выполнялось это условіе, должно имѣть мѣсто равенство:

$$M(u_i) + N(u_i)u_i' = 0. \tag{5}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если выраженіе (2) *будетъ интегральнымъ множителемъ дифференціальнаго уравненія* (1), *то* $u_1, u_2, \dots, u_n$ *будутъ частными интегралами того же дифференціальнаго уравненія* (1).

3. Повышеніе показателей въ интегральномъ множителѣ.

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$F(y) = (y - u_1)(y - u_2) \dots (y - u_n), \tag{6}$$

$$F_1(y) = F(y)\sum \frac{(\alpha_i + 1)}{y - u_i}, \tag{7}$$

$$F_2(y) = F(y)\sum \frac{(\alpha_i + 1)u_i'}{y - u_i}. \tag{8}$$

Положимъ, что мы нашли самое общее рѣшеніе задачи, указанной въ § 2. Пусть уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Мы можемъ составить весьма простое уравненіе, которое имѣетъ тотъ же интегральный множитель (2). Пусть V обозначаетъ произвольную функцію перемѣннаго x. Разсмотримъ такое дифференціальное уравненіе:

$$d(VF(y)R(y)) = 0.$$

Это уравненіе, по сокращеніи на R, приметъ слѣдующую форму:

$$\left(F(y)\frac{\partial V}{\partial x} - VF_2(y)\right)\partial x + VF_1(y)\partial y = 0. \tag{9}$$

Это уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Вычтемъ уравненіе (9) изъ уравненія (1); получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(M(y) - F(y)\frac{\partial V}{\partial x} + VF_2(y)\right)\partial x + \left(N(y) - VF_1(y)\right)\partial y = 0. \tag{10}$$

Это послѣднее дифференціальное уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Можно подобрать V такъ, чтобы функція. стоящая при ∂y въ уравненіи (10), дѣлилась безъ остатка на $y - u_1$.

Для этой цѣли нужно положить

$$V = \frac{N(u_1)}{F_1(u_1)}. \tag{11}$$

Замѣтимъ теперь, что по теоремѣ § 2 $y = u_1$ должно быть частнымъ интеграломъ уравненія (10), а такъ какъ функція, стоящая при ∂y дѣлится на $y - u_1$, то и остальное выраженіе должно дѣлиться на $y - u_1$. Итакъ, если V опредѣлимъ формулой (11), то дифференціальное уравненіе (10) содержитъ множитель $y - u_1$. Положимъ

$$\overline{M}(y) = \frac{M(y) - F(y)\frac{\partial V}{\partial x} + F_2(y)V}{y - u_1}, \quad \overline{N}(y) = \frac{N(y) - VF_1(y)}{y - u_1}. \tag{12}$$

Такъ опредѣленныя функціи будутъ цѣлыми относительно y. Отсюда слѣдуетъ, что дифференціальное уравненіе:

$$\overline{M}(y)\partial x + \overline{N}(y)\partial y = 0 \tag{13}$$

имѣетъ интегральнымъ множителемъ

$$(y - u_1)R(y) = (y - u_1)^{\alpha_1+1}(y - u_2)^{\alpha_2}\dots(y - u_n)^{\alpha_n}. \tag{14}$$

Итакъ, если намъ извѣстно общее рѣшеніе первоначальной задачи, то мы можемъ найти общее рѣшеніе другой задачи: мы можемъ составить такое дифференціальное уравненіе (13), интегральнымъ множителемъ котораго должно быть выраженіе (14).

Наши формулы не годятся въ одномъ только случаѣ, когда α_1 равно -1. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ изъ формулы (7) слѣдуетъ, что $F_1(u_1)=0$; тогда, по формулѣ (11), V не имѣетъ конечнаго значенія.

Обратно, если мы знаемъ общее рѣшеніе второй задачи, то легко можемъ найти и общее рѣшеніе первой задачи. Для этой цѣли изъ уравненій (12) имѣемъ:

$$M(y)=(y-u_1)\bar{M}(y)+F(y)\frac{\partial V}{\partial x}-VF_2(y),$$
$$N(y)=(y-u_1)\bar{N}(y)+VF_1(y). \tag{15}$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ общее рѣшеніе первой задачи. Въ формулахъ (15) V должно быть произвольною функціей перемѣннаго x.

Итакъ, рѣшеніе нашей задачи мы всегда можемъ свести къ рѣшенію другой задачи, въ которой одинъ изъ показателей интегральнаго множителя увеличенъ на 1. Всякій показатель можетъ быть увеличенъ на 1, за исключеніемъ показателя равнаго -1.

Повторяя указанный процессъ нѣсколько разъ, мы можемъ привести рѣшеніе нашей задачи къ рѣшенію новой задачи, въ которой показатели интегральнаго множителя увеличены на цѣлыя числа. Но при этомъ нужно соблюдать слѣдующую предосторожность: *чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель не превратился ни въ нуль, ни въ положительное число.*

Такимъ образомъ рѣшеніе данной задачи мы можемъ легко вывести изъ рѣшенія другой задачи:

Найти общую форму дифференціальнаго уравненія:

$$M_1(y)\partial x+N_1(y)\partial y=0 \tag{16}$$

такъ, чтобы интегральнымъ множителемъ этого уравненія было выраженіе:

$$R_1(y)=(y-u_1)^{\alpha_1+m_1}(y-u_2)^{\alpha_2+m_2}\dots(y-u_n)^{\alpha_n+m_n}, \tag{17}$$

гдѣ $m_1, m_2, \dots, m_n$ суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

Покажемъ, какъ изъ общаго рѣшенія начальной задачи получается общее рѣшеніе послѣдней задачи, и обратно.

Положимъ, что начальная задача рѣшена, что мы умѣемъ составить общее выраженіе дифференціальнаго уравненія (1) такъ, чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (2).

Составимъ такое дифференціальное уравненіе:

$$d(F(y)R(y)\Phi(y))=0\,,$$

здѣсь $\Phi(y)$ есть нѣкоторая цѣлая функція перемѣннаго y съ неопредѣленными коэффиціентами: степень этой функціи будетъ опредѣлена далѣе. По раздѣленіи на $R(y)$ послѣднее уравненіе принимаетъ слѣдующую форму:

$$\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x}-F_2\Phi\right)\partial x+\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial y}+F_1\Phi\right)\partial y=0. \qquad (18)$$

Это уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Вычтемъ уравненіе (18) изъ уравненія (1); получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(M-F\frac{\partial\Phi}{\partial x}+F_2\Phi\right)\partial x+\left(N-F\frac{\partial\Phi}{\partial y}-F_1\Phi\right)\partial y=0. \qquad (19)$$

Это уравненіе также имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Попробуемъ опредѣлить коэффиціенты цѣлой функціи $\Phi(y)$ такъ, чтобы выраженіе:

$$N(y)-F(y)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y}-F_1(y)\,\Phi(y) \qquad (20)$$

дѣлилось безъ остатка на

$$(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\ldots(y-u_n)^{m_n}\,. \qquad (21)$$

Выполняя это условіе, мы придемъ къ $m_1+m_2+\ldots+m_n$ линейнымъ алгебраическимъ уравненіямъ относительно коэффиціентовъ функціи $\Phi(y)$; поэтому мы можемъ предположить, что степень $\Phi(y)$ равна $m_1+m_2+\ldots+m_n-1$. Линейныя алгебраическія уравненія, о которыхъ только что была рѣчь, легко могутъ быть составлены. Далѣе является вопросъ: имѣютъ ли эти уравненія конечное рѣшеніе. Если бы мы стали изслѣдовать этотъ вопросъ въ общемъ видѣ, то пришли бы къ сложнымъ формуламъ. Между тѣмъ изложенный выше послѣдовательный процессъ повышенія одного показателя на единицу показываетъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ конечности рѣшенія является

сказанное выше ограниченіе: чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель не превратился ни въ нуль, ни въ число положительное.

Если мы подберемъ коэффиціенты функціи $\Phi(y)$ такъ, чтобы функція (20) имѣла множителемъ выраженіе (21), то легко докажемъ, что уравненіе (19) также будетъ имѣть множителемъ выраженіе (21). Послѣ этого положимъ:

$$M_1 = \frac{M - F\frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_2\Phi}{(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}};$$

$$N_1 = \frac{N - F\frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_1\Phi}{(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}}. \quad (22)$$

Такъ опредѣленныя функціи M_1 и N_1 будутъ цѣлыми относительно y. Подставивъ найденныя выраженія (22) въ уравненіе (16), получимъ самую общую форму такого дифференціальнаго уравненія, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ выраженіе (17).

Положимъ теперь, обратно, что мы имѣемъ общее рѣшеніе послѣдней задачи; покажемъ, какъ тогда находится общее рѣшеніе начальной задачи.

Предположимъ, что мы умѣемъ составить самую общую форму дифференціальнаго уравненія (16) такъ, чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (17). Въ такомъ случаѣ изъ уравненій (22) находимъ:

$$\begin{aligned} M &= F\frac{\partial \Phi}{\partial x} - F_2\Phi + M_1(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}, \\ N &= F\frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_1\Phi + N_1(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставивъ найденныя выраженія въ уравненіе (1), получимъ самое общее рѣшеніе начальной задачи. Въ формулахъ (23) коэффиціенты функціи $\Phi(y)$ будутъ уже произвольными функціями перемѣннаго x.

4. Рѣшеніе задачи въ томъ случаѣ, когда всѣ показатели интегральнаго множителя суть числа цѣлыя отрицательныя.

Предположимъ, что дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), въ которомъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть цѣлыя отрицательныя числа.

Полный интегралъ дифференціальнаго уравненія (1) выражается въ слѣдующей формѣ:

$$\int R(y)\,N(y)\,\partial y + \psi(x) = C.$$

Здѣсь мы имѣемъ интегралъ отъ алгебраической функціи. Такой интегралъ, какъ извѣстно, выражается въ алгебраической формѣ съ присоединеніемъ нѣсколькихъ логариѳмовъ:

$$F(y)\,R(y)\,\Theta(y) + \sum A_i \log(y - u_i) = C.$$

Здѣсь $\Theta(y)$ есть произвольная цѣлая алгебраическая функція перемѣннаго y, коэффиціенты этой функціи суть произвольныя функціи перемѣннаго x. Функція $F(y)$ дана формулой (6). Такъ какъ производная отъ первой части по перемѣнному x не должна содержать логариѳмовъ, то $A_1, A_2, \ldots, A_n$ должны быть постоянными числами. Дифференцируемъ это уравненіе и дѣлимъ на $R(y)$; получаемъ:

$$\left(F\frac{\partial\Theta}{\partial x} - F_2\,\Theta - R^{-1}\sum\frac{A_i U'_i}{y - u_i}\right)\partial x + \left(F\frac{\partial\Theta}{\partial y} + F_1\,\Theta + R^{-1}\sum\frac{A_i}{y - u_i}\right)\partial y = 0.$$

Входящія сюда функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ даются формулами (7) и (8).

Въ такой формѣ выражается общее рѣшеніе нашей задачи; оно содержитъ произвольную функцію $\Theta(y)$ и произвольныя постоянныя $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

5. Приведеніе общей задачи къ простѣйшей формѣ.

Напомнимъ, что наша задача заключается въ нахожденіи общей формы дифференціальнаго уравненія (1), такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (2).

Не давая самаго общаго рѣшенія задачи, мы можемъ, однако, составить дифференціальное уравненіе, заключающее произвольную функцію, такъ чтобы интегральнымъ множителемъ этого уравненія было выраженіе (2).

Пусть $\Theta(y)$ выражаетъ произвольную цѣлую функцію относительно y; коэффиціенты этого многочлена суть произвольныя функціи перемѣннаго x. Разсмотримъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d(F(y)\,R(y)\,\Theta(y)) = 0.$$

Сокративъ на $R(y)$, мы приведемъ это уравненіе къ слѣдующей формѣ:

$$\left(F\frac{\partial\Theta}{\partial x}-F_2\Theta\right)\partial x+\left(F\frac{\partial\Theta}{\partial y}+F_1\Theta\right)\partial y=0. \qquad (24)$$

Входящія сюда функціи $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ даны формулами (6), (7) и (8).

Интегральнымъ множителемъ уравненія (24) будетъ выраженіе (2). Само собою разумѣется, что дифференціальное уравненіе (24) не заключаетъ въ себѣ всѣхъ рѣшеній нашей задачи. Но пользуясь этимъ уравненіемъ, мы можемъ упростить нашу задачу. Вычтемъ уравненіе (24) изъ уравненія (1); въ результатѣ получимъ дифференціальное уравненіе, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ выраженіе (2). Произвольную функцію $\Theta(y)$ можно подобрать такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ понизилась степень функціи при ∂y. Это пониженіе можно довести до $n-2$. Предположимъ, что степень $N(y)$ превосходитъ $n-2$; пусть эта степень равна $n-1+m$, причемъ m есть число положительное или нуль. Пусть

$$N(y)=q_0y^{n+m-1}+q_1y^{n+m-2}+\ldots$$

Чтобы достигнуть пониженія, положимъ степень функціи $\Theta(y)$ равною m; напишемъ эту функцію съ произвольными коэффиціентами:

$$\Theta(y)=r_0y^m+r_1y^{m-1}+\ldots$$

Вычитая уравненіе (24) изъ уравненія (1), мы понизимъ степень $N(y)$, если положимъ:

$$q_0=\frac{r_0}{\sum\alpha+m}.$$

Пониженіе невозможно, если $\sum\alpha+m=0$. Такимъ образомъ у насъ появился исключительный случай, когда сумма показателей интегральнаго множителя равна цѣлому отрицательному числу или нулю. Этотъ исключительный случай можетъ быть разрѣшенъ слѣдующимъ пріемомъ.

Въ § 4 мы разсмотрѣли тотъ случай, когда всѣ показатели интегральнаго множителя суть цѣлыя отрицательныя числа. Теперь мы разсматриваемъ тотъ случай, когда не всѣ показатели суть цѣлыя отрицательныя числа. Въ такомъ случаѣ, по доказанному въ § 3, мы можемъ рѣшеніе нашей задачи привести къ рѣшенію другой задачи, въ которой тѣ показатели, которые не суть цѣлыя отрицательныя числа, могутъ

быть увеличены на произвольныя цѣлыя числа. Такимъ пріемомъ можно всегда устранить указанный выше исключительный случай.

Итакъ, мы можемъ ограничиться такимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, въ которомъ степень $N(y)$ равна $n-2$. Тогда изъ уравненія (4) слѣдуетъ, что степень $M(y)$ равна $n-1$. Задачу въ такой формѣ мы назовемъ *простѣйшею задачею Коркина.*

Покажемъ, къ чему приводится рѣшеніе простѣйшей задачи Коркина. Пусть

$$M(y) = p_0y^{n-1} + p_1y^{n-2} + \ldots + p_{n-1}, \tag{25}$$

$$N(y) = q_0y^{n-2} + q_1y^{n-3} + \ldots + q^{n-2}. \tag{26}$$

Задача приводится къ опредѣленію $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q_0; q_1, \ldots, q_{n-2}$, какъ функцій отъ x, такъ чтобы дифференціальное уравненіе (1) имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе (2).

Прежде всего изъ уравненія (5) мы опредѣлимъ $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ линейно черезъ $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}$. Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (4) и сравнивъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ y [1]), мы получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ функцій $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}$ систему $n-1$ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Назовемъ эту систему *дифференціальными уравненіями Коркина.* Цѣль нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій состоитъ въ томъ, чтобы показать, что дифференціальныя уравненія Коркина могутъ быть проинтегрированы въ конечномъ видѣ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Здѣсь же обратимъ наше вниманіе на то, что интегралы будутъ содержать $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Положимъ, что мы рѣшили простѣйшую задачу Коркина. Чтобы рѣшить самую общую задачу, нужно къ найденному дифференціальному уравненію прибавить дифференціальное уравненіе (24), въ которомъ $\Theta(y)$ есть цѣлая алгебраическая функція относительно y произвольной степени; коэффиціенты этой функціи будутъ произвольными функціями перемѣннаго x. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Самое общее рѣшеніе задачи содержитъ произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ.

---

[1]) Не слѣдуетъ забывать, что $\dfrac{M + Nu'_i}{y - u_i}$ есть цѣлая функція перемѣннаго y.

6. Интегралъ дифференціальныхъ уравненій Коркина, когда одинъ изъ показателей интегральнаго множителя есть цѣлое отрицательное число.

Если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), то полный интегралъ дифференціальнаго уравненія можетъ быть выраженъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int R(y)N(y)dy + \psi(x) = C.$$

Положимъ, что одинъ изъ показателей интегральнаго множителя (2) есть цѣлое отрицательное число, $\alpha_i = -m$. Въ такомъ случаѣ подъинтегральная функція (27) можетъ быть приведена къ слѣдующей формѣ:

$$R(y)N(y) = \frac{L_m}{(y-u_i)^m} + \frac{L_m}{(y-u_i)^{m-1}} + \ldots + \frac{L_m}{y-u_i} + \varphi(y),$$

гдѣ $\varphi(y)$ не обращается въ безконечность, если положимъ $y-u_i$. Взявъ интегралы, получимъ:

$$\int R(y)N(y)dy = \int \varphi(y)dy - \frac{L_m}{(m-1)(y-u_i)^{m-1}} -$$

$$- \frac{L_{m-1}}{(m-2)(y-u_i)^{m-2}} - \ldots + L_1 \log(y-u_i).$$

Производная отъ этой функціи по перемѣнному x не должна содержать логариѳма, потому что эта производная должна быть равна $R(y)M(y) - f'(x)$. Но въ такомъ случаѣ коэффиціентъ L_1 долженъ быть постояннымъ. Чтобы найти L_1, нужно отъ выраженія $(y-u_i)^m R(y)N(y)$ взять производную порядка $m-1$ по перемѣнному y, подставить $y=u_i$ и раздѣлить на $1.2.3\ldots(m-1)$.

Такимъ образомъ должно имѣть мѣсто слѣдующее уравненіе:

$$\left| \frac{\partial^{m-1}}{\partial y_{m-1}} (y-u_i)^m R(y)N(y) \right|_{y=u_i} = A_i; \tag{28}$$

во второй части стоитъ произвольное постоянное.

Если въ уравненіе (28) вмѣсто $N(y)$ подставимъ его выраженіе (26), то получимъ не что иное, какъ интегралъ дифференціальныхъ уравненій Коркина [1]). Такихъ интеграловъ можно найти столько, сколько есть цѣлыхъ отрицательныхъ показателей въ интегральномъ множителѣ (2).

7. Нахожденіе полной системы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина.

Положимъ, что въ интегральномъ множителѣ, кромѣ α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, остальные показатели суть цѣлыя отрицательныя числа.

Прежде всего по пріему, указанному въ § 3, мы можемъ рѣшеніе нашей задачи привести къ рѣшенію другой задачи, въ которой показатели α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ увеличены на нѣкоторыя положительныя числа.

Такимъ пріемомъ можно достигнуть того, чтобы показатели α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ были положительны. Если же въ самомъ общемъ случаѣ эти показатели мнимые, то мы можемъ достигнуть того, чтобы ихъ дѣйствительныя части были положительны.

Если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), то полный интегралъ дифференціальнаго уравненія (1) выражается въ слѣдующей формѣ:

$$\int_{u_1}^{y} R(y) N(y) \partial y = C. \tag{29}$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только продифференцировать это уравненіе; тогда, если примемъ во вниманіе уравненіе (3), по сокращеніи на $R(y)$, получимъ дифференціальное уравненіе (1).

Въ § 2 было показано, что u_2, $u_3, \ldots u_\mu$ суть частные интегралы дифференціальнаго уравненія (1), поэтому должны имѣть мѣсто такія уравненія:

$$\int_{u_1}^{u_i} R(y) N(y) \partial y = A_i. \qquad (j = 2, 3, \ldots \mu) \tag{30}$$

Величины, стоящія во второй части, суть произвольныя постоянныя. Если, какъ сказано выше, дѣйствительныя части показателей α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ положительны, то опредѣленные интегралы (30) имѣютъ конечное значеніе.

Если въ уравненія (30) вмѣсто $N(y)$ подставимъ выраженіе (26), то получимъ не что иное, какъ интегралы дифференціальныхъ уравненій Коркина.

[1]) Можетъ случиться, что выраженіе (28) въ первой части тождественно обратится въ нуль при произвольныхъ q_0, $q_1, \ldots, q_{n-2}$. Такой случай невозможенъ, если $m < n$: поэтому этого случая можно избѣжать повышеніемъ показателя α_i.

Такимъ пріемомъ нельзя получить всѣхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина. Въ уравненіи (29) нельзя положить $y=u_{\mu+1}$, $u_{\mu+2}\dots$, потому что тогда опредѣленные интегралы не будутъ имѣть конечнаго значенія. Но такъ какъ показатели $\alpha_{\mu+1}$, $\alpha_{\mu+2}, \dots \alpha_n$ суть цѣлыя отрицательныя числа, то остальные интегралы находятся пріемомъ, указаннымъ въ § 6:

$$\left| \frac{\partial^{-\alpha_j-1}}{\partial y^{-\alpha_j-1}} (y-u_j)^{-\alpha_j} R(y) N(y) \right|_{y=u_j} = A_j. \quad (31)$$

$$(j=\mu+1,\ \mu+2,\dots,n).$$

Если въ уравненія (30) и (31) вмѣсто $N(y)$ подставимъ выраженіе (26), то получимъ полную систему интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина.

Въ уравненія (5), (30) и (31) вмѣсто $M(y)$ и $N(y)$ подставимъ ихъ выраженія (25) и (26); рѣшимъ полученныя уравненія относительно p_0, $p_1,\dots,p_{n-1}$, q_0; $q_1,\dots,q_{n-2}$; подставимъ найденныя функціи въ формулы (25) и (26); въ результатѣ найдемъ полное рѣшеніе простѣйшей задачи Коркина. Изъ полнаго рѣшенія простѣйшей задачи можно найти рѣшеніе общей задачи пріемомъ, указаннымъ въ § 5.

Этимъ наше изслѣдованіе закончено. Остается указать тѣ случаи, когда рѣшеніе задачи не содержитъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Положимъ, что всѣ показатели суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя. Тогда интегралы (30), какъ интегралы отъ раціональной функціи, могутъ быть выражены черезъ алгебраическія функціи и черезъ логариѳмы. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Задача Коркина рѣшается въ конечномъ видѣ безъ опредѣленныхъ интеграловъ, если всѣ показатели интегральнаго множителя суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя.

Положимъ теперь, что всѣ показатели, кромѣ одного, напримѣръ α_1, суть положительныя цѣлыя числа. Тогда подъ знаками интеграловъ (30) имѣемъ произведеніе изъ цѣлой алгебраической функціи на $(y-u_1)^{\alpha_1}$. Такой интегралъ можетъ быть также выраженъ произведеніемъ цѣлой алгебраической функціи на $(y-u_i)^{\alpha_i}$. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Задача Коркина рѣшается въ конечной формѣ безъ опредѣленныхъ интеграловъ, если всѣ показатели интегральнаго множителя, за исключеніемъ одного, суть положительныя цѣлыя числа.

Можно указать еще другіе случаи, когда опредѣленные интегралы могутъ быть найдены.

Положимъ, что одинъ показатель есть число дробное, $\alpha_1 = \frac{\mu}{\nu}$, всѣ же остальные показатели суть положительныя или отрицательныя цѣлыя числа. Тогда преобразованіемъ $y - u_1 = z^\nu$ мы приходимъ къ интеграламъ отъ раціональной функціи.

Положимъ, что два показателя α_1 и α_2 суть дробныя числа со знаменателемъ 2, всѣ же остальные показатели суть положительныя или отрицательныя цѣлыя числа. Тогда преобразованіемъ $y - u_1 = z^2(y - u_2)$ мы приходимъ къ интеграламъ отъ раціональной функціи.

8. Дополненіе къ § 3.

Въ § 3 было показано, что рѣшеніе одной задачи можетъ быть найдено изъ рѣшенія второй задачи, въ которой показатели интегральнаго множителя увеличены нѣкоторыми положительными числами, но окончательный результатъ не приведенъ къ простѣйшей формѣ. Результатъ выраженъ въ слѣдующей формѣ: если дифференціальное уравненіе (16) умножимъ на нѣкоторый множитель и прибавимъ къ уравненію (18), то получимъ общее рѣшеніе начальной задачи. Но и дифференціальное уравненіе (16), въ самомъ общемъ выраженіи, содержитъ цѣлую функцію произвольной степени съ произвольными коэффиціентами; уравненіе (18) также содержитъ цѣлую функцію $\Phi(y)$ данной степени съ произвольными коэффиціентами. Отсюда вытекаетъ такое заключеніе, что какъ будто общее рѣшеніе начальной задачи содержитъ двѣ функціи съ произвольными коэффиціентами. Покажемъ, что эти двѣ функціи всегда такъ комбинуются, что онѣ могутъ быть замѣнены одною произвольною функціей.

Начальная задача такова:

Найти самое общее выраженіе дифференціальнаго уравненія:

$$M(y)\partial x + N(y)\partial y = 0\,, \tag{1}$$

такъ чтобы оно имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе:

$$R(y) = (y - u_1)^{\alpha_1}(y - u_2)^{\alpha_2}\ldots(y - u_n)^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Было показано, что рѣшеніе этой задачи можетъ быть получено изъ общаго рѣшенія слѣдующей задачи:

Найти самое общее выраженіе дифференціальнаго уравненія:

$$M_1(y)\partial x + N_1(y)\partial y = 0\,, \tag{16}$$

такъ чтобы оно имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе:

$$R_1(y) = (y - u_1)^{\alpha_1 + m_1}(y - u_2)^{\alpha_2 + m_2} \dots (y - u_n)^{\alpha_n + m_n}, \qquad (17)$$

въ которомъ $m_1, m_2, \dots, m_n$ суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

Положимъ, что простѣйшее рѣшеніе второй задачи выражается уравненіемъ (16). Чтобы найти самое общее рѣшеніе второй задачи, нужно, какъ показано въ § 5, къ уравненію (16) прибавить уравненіе:

$$\left(F\frac{\partial\theta}{\partial x} - \overline{F}_2\theta\right)\partial x + \left(F\frac{\partial\theta}{\partial y} + \overline{F}_1\theta\right)\partial y = 0, \qquad (32)$$

въ которомъ $\theta(y)$ есть цѣлая функція произвольной степени съ произвольными коэффиціентами. Входящія сюда функціи $\overline{F}_1(y)$ и $\overline{F}_2(y)$ должны быть опредѣлены по слѣдующимъ формуламъ:

$$\overline{F}_1(y) = F(y)\sum\frac{(\alpha_i + m_i + 1)}{y - u_i}, \quad \overline{F}_2(y) = F(y)\sum\frac{(\alpha_i + m_i + 1)u_i'}{y - u_i}.$$

Если мы сумму уравненій (16) и (32) умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію:

$$\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x} - F_2\Phi\right)\partial x + \left(F\frac{\partial\Phi}{\partial y} + F_1\Phi\right)\partial y = 0, \qquad (18)$$

то получимъ, какъ было показано въ § 3, самое общее рѣшеніе начальной задачи.

Если уравненіе (32) умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію (18), то легко показать, что въ результатѣ получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(F\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - F_2\theta_1\right)\partial x + \left(F\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + F_1\theta_1\right)\partial y = 0, \qquad (33)$$

въ которомъ

$$\theta_1(y) = \Phi(y) + \frac{R_1(y)}{R(y)}\theta(y).$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующій результатъ:

Если мы дифференціальное уравненіе, соотвѣтствующее простѣйшему рѣшенію второй задачи, умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ *и прибавимъ къ уравненію* (33), *въ которомъ* $\theta_1(y)$ *есть цѣлая функція произвольной сте-*

пени съ произвольными коэффиціентами, то въ результатѣ получимъ самое общее рѣшеніе первой задачи.

Такимъ образомъ снова подтверждается, что рѣшеніе задачи въ самомъ общемъ случаѣ содержитъ только одну произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ.

Напомнимъ здѣсь, что найденное такимъ пріемомъ рѣшеніе первой задачи только въ томъ случаѣ будетъ самымъ общимъ, а не частнымъ рѣшеніемъ, когда выполняется требованіе, найденное въ § 3: *чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель интегральнаго множителя* (2) *не превращался ни въ нуль, ни въ положительное число въ интегральномъ множителѣ* (17).

9. Интегральный множитель $(y-u)^\alpha$.

Разсмотримъ простѣйшій случай задачи.

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^\alpha$.

Изъ сказаннаго въ § 5 слѣдуетъ, что нужно составить такое дифференціальное уравненіе:

$$d((y-u)^{\alpha+1}\,\Theta(y))=0.$$

Раздѣливъ на $(y-u)^\alpha$, получимъ искомое дифференціальное уравненіе:

$$\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial x}-(\alpha+1)u'\Theta\right)\partial x-\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+(\alpha+1)\Theta\right)\partial y=0. \quad (35)$$

Здѣсь $\Theta(y)$ есть цѣлая функція произвольной степени съ произвольными коэффиціентами.

Въ томъ случаѣ, когда α есть цѣлое отрицательное число найденное рѣшеніе не будетъ общимъ рѣшеніемъ. Тогда, какъ показано въ § 4, уравненіе (31) должно быть замѣнено слѣдующимъ:

$$d\{(y-u)^{\alpha+1}\Theta(y)+A\log(y-u)\}=0.$$

Раздѣливъ на $(y-u)^\alpha$, получимъ искомое дифференціальное уравненіе въ слѣдующей формѣ:

$$\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial x}-(\alpha+1)u'\Theta-Au'(y-u)^{-\alpha-1}\right)\partial x+$$

$$+\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+(\alpha+1)\Theta+A(y-u)^{-\alpha-1}\right)\partial y=0.$$

Здѣсь A есть произвольное постоянное.



Томъ IX, № 1.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

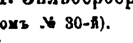
Томъ IX.

№ 2.

ХАРЬКОВЪ.



Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.



(Рыбная улица, домъ № 30-й).



1905.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ.*

10. Интегральный множитель $(y-u)^\alpha (y-v)^\beta$.

Рѣшимъ здѣсь слѣдующую задачу:

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^\alpha (y-v)^\beta$.

Разсмотримъ тотъ случай, когда дѣйствительныя части показателей α и β положительны. Простѣйшая задача Коркина, какъ показано въ § 5, приводится къ дифференціальному уравненію:

$$(py+p_1)dx+qdy=0.$$

Задача приводится къ нахожденію трехъ функцій p, p_1 и q. На основаніи уравненій (5) имѣемъ:

$$\begin{aligned} pu+p_1+qu'&=0,\\ pv+p_1+qv'&=0. \end{aligned} \tag{37}$$

Изъ § 7 слѣдуетъ, что q опредѣляется изъ уравненія:

$$q\int_u^v (y-u)^\alpha (y-u)^\beta dy = A. \tag{38}$$

Сдѣлаемъ въ этомъ интегралѣ замѣну перемѣннаго:

$$y=u+z(v-u);$$

имѣемъ:

$$\int_u^v (y-u)^\alpha (y-v)^\beta dy = (v-u)^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 z^\alpha (z-1)^\beta dz.$$

Опредѣленный интегралъ второй части имѣетъ постоянную величину, на которую мы можемъ раздѣлить произвольное постоянное A. Итакъ, мы можемъ положить

$$q=-A(v-u)^{-\alpha-\beta-1}.$$

Подставивъ найденное выраженіе въ уравненія (37), изъ рѣшенія этихъ уравненій найдемъ:

$$p=A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}(v'-u'),$$

$$p_1=A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}(vu'-uv').$$

Подставивъ найденныя значенія p, p_1 и q въ уравненіе (36), получимъ:

$$A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}\{v'(y-u)dx-u'(y-v)dx+(u-v)dy\}=0. \quad (39)$$

Въ такой формѣ рѣшается простѣйшая задача. Чтобы найти самое общее рѣшеніе задачи, нужно къ уравненію (39) прибавить уравненіе (24), въ которомъ нужно положить:

$$F=(y-u)(y-v),$$

$$F_1=(\alpha+1)(y-v)+(\beta+1)(y-u), \quad (40)$$

$$F_2=(\alpha+1)u'(y-v)+(\beta+1)v'(y-u).$$

Замѣчательно то обстоятельство, что найденное рѣшеніе годится во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ двухъ: 1) когда показатели α и β суть цѣлыя отрицательныя числа, 2) когда $\alpha+\beta$ равно цѣлому отрицательному числу. Первый случай рѣшенъ въ § 4. Покажемъ здѣсь рѣшеніе второго случая.

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^{\alpha}(y-v)^{-m-\alpha}$, *гдѣ m есть цѣлое положительное число.*

Для рѣшенія этой задачи прежде всего разыщемъ такое дифференціальное уравненіе, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ $(y-u)^{\alpha}(y-v)^{\alpha-1}$. Простѣйшая форма такого дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$A(v-u)^{-3}\{v'(y-u)dx-u'(y-v)dx+(u-v)dy\}=0.$$

По доказанному въ § 8 нужно это уравненіе умножить на $(y-v)^{m+1}$ и прибавить къ уравненію (33), въ которомъ вмѣсто F, F_1 и F_2 нужно подставить ихъ выраженія (40), въ которыхъ вмѣсто β нужно подставить $-m-\alpha$. Въ результатѣ получимъ самую общую форму дифференціальнаго уравненія, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ $(y-u)^{\alpha}(y-v)^{-m-\alpha}$.

Этимъ я заканчиваю изслѣдованіе задачи Коркина и думаю, что эта задача изслѣдована во всѣхъ подробностяхъ.

По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ:

Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы.

А. Н. Коркина.

Подъ этимъ заглавіемъ появилась въ Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества [1]) статья В. П. Ермакова, содержащая новое изложеніе рѣшенія той задачи, которая трактуется въ моемъ мемуарѣ подъ заглавіемъ: „Изысканія о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка“ [2]).

Если бы упомянутую статью написалъ кто либо другой, я не счелъ бы нужнымъ отвѣчать на нее, но такъ какъ она принадлежитъ столь уважаемому ученому какъ В. П. Ермаковъ, то мнѣ кажется необходимымъ сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія.

Въ предисловіи къ своей статьѣ (§ 1) В. П. Ермаковъ подвергаетъ критикѣ мое изложеніе предмета въ упомянутомъ мемуарѣ, въ другихъ же параграфахъ излагаетъ свои собственныя изслѣдованія, касающіяся факторіальныхъ множителей.

На критику моего изложенія я отвѣчать не буду, такъ какъ лучшимъ отвѣтомъ на нее служитъ оглавленіе содержанія параграфовъ, приложенное къ моему мемуару.

Относительно же изслѣдованій В. П. Ермакова и его новаго изложенія рѣшенія моей задачи я сдѣлаю нѣсколько замѣчаній.

Сначала посмотримъ, какъ онъ выражаетъ самую задачу. Въ § 2 онъ ее формулируетъ такъ:

---

[1]) Вторая серія томъ IX n° 1.

[2]) Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ. Томъ XXIV.

„Пусть M и N означаютъ цѣлыя алгебраическія функціи перемѣннаго y, коэффиціенты у этихъ многочленовъ суть функціи перемѣннаго x. Предметъ нашего изслѣдованія заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи:

Требуется найти самое общее выраженіе для M и N подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

имѣло интегральный множитель

$$R = (y - u_1)^{\alpha_1} (y - u_2)^{\alpha_2} \ldots (y - u_n)^{\alpha} .$$

Здѣсь α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ суть числа постоянныя, u_1, $u_2, \ldots u_n$ суть функціи перемѣннаго x".

Замѣчу, что здѣсь нужно добавить; между постоянными α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ нѣтъ ни одной равной нулю и величины u_1, $u_2, \ldots u_n$, неравныя между собою, могутъ быть въ частныхъ случаяхъ и постоянными.

Ничего не говорится о томъ, что задано и что считается неизвѣстнымъ.

Хотя въ заглавіи статьи и упоминается о *данномъ интегральномъ множителѣ*, но u_1, $u_2, \ldots u_n$ не могутъ быть заданы по произволу какъ функціи отъ x, потому что въ этомъ случаѣ не будетъ существовать цѣлыхъ функцій M и N отъ y, для которыхъ уравненіе (1) имѣли бы множителемъ R.

Показатели же α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ и число ихъ n должны быть заданы, потому что въ противномъ случаѣ не будетъ опредѣленныхъ выраженій для M и N въ уравненіи (1).

Наконецъ и при этихъ данныхъ задача, которую себѣ предлагаетъ авторъ становится невозможною, если не задать степеней полиномовъ M и N, такъ какъ *самаго общаго выраженія для* M и N, которое хочетъ найти В. П. Ермаковъ, не существуетъ, какъ видно изъ моего мемуара, а для каждыхъ степеней M и N получаются свои особенныя выраженія.

Такъ какъ онъ говоритъ, что излагаетъ рѣшеніе *моей* задачи, то я считаю нужнымъ привести здѣсь ея постановку, которая мною сдѣлана въ предисловіи къ упомянутому мемуару.

Разумѣя подъ M и N цѣлыя функціи отъ y, подъ u_1, $u_2, \ldots u_l$ величины отъ y независящія, неравныя между собою, подъ P функцію отъ x, подъ h_1, $h_2, \ldots h_l$ постоянныя, изъ которыхъ ни одна не равна нулю и выбирая подходящимъ образомъ изъ величинъ u_1, $u_2, \ldots u_l$ и коэффиціентовъ многочленовъ M и N тѣ, которые считаются заданными, я ставлю слѣдующую задачу:

Найти необходимыя и достаточныя условія, выраженныя конечными уравненіями между данными и неизвѣстными количествами, для того чтобы уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0$$

могло имѣть множитель

$$\mu = P(y-u_1)^{h_1}(y-u)_2^{h_2}\ldots(y-u_l)^{h_l}.$$

Здѣсь h_1, $h_2, \ldots h_l$ и число ихъ l считаются заданными.

Прибавлю, что степени полиномовъ M и N также предполагаются заданными.

Умножимъ предыдущее дифференціальное уравненіе на P и сдѣлаемъ

$$PM = M(y), \quad PN = N(y);$$

тогда уравненіе

$$M(y)dx + N(y)dy = 0$$

будетъ имѣть множителемъ

$$\frac{\mu}{P} = \mu(y) = (y-u_1)^{h_1}(y-u_2)^{h_2}\ldots(y-u_l)^{h_l}.$$

Пусть σ есть высшая изъ двухъ степеней полиномовъ $M(y)$, $N(y)$; тогда они могутъ быть написаны такъ

$$M(y) = p_0 y^\sigma + p_1 y^{\sigma-1} + p_2 y^{\sigma-2} + \ldots + p_{\sigma-1} y + p_\sigma,$$

$$N(y) = q_0 y^\sigma + q_1 y^{\sigma-1} + q_2 y^{\sigma-2} + \ldots + q_{\sigma-1} y + q_\sigma,$$

гдѣ

$$p_0, \; p_1, \; p_2, \ldots p_\sigma, \; q_0, \; q_1, \; q_\sigma, \tag{2}$$

суть величины отъ y независящія и покрайней мѣрѣ одна изъ двухъ p_0, q_0 не равна нулю.

Прибавлю, что q_0 должна быть величиною постоянною.

Понятно, что отъ величинъ (2) и u_1, $u_2, \ldots u_l$ можно требовать только одного, а именно, чтобы ихъ выраженія были необходимыми и достаточными для того, чтобы уравненіе $M(y)dx + N(y)dy = 0$ имѣло множитель $\mu(y)$, причемъ кромѣ σ, обозначающаго степень одного изъ полиномовъ M и N, нужно задать и степень другаго.

Я показалъ, что величины (2) вмѣстѣ съ u_1, $u_2, \ldots u_l$ удовлетворяютъ $\sigma + l$ совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Если бы мы задали нѣкоторыя изъ величинъ (2), напримѣръ изъ ряда

$$p_0, \; p_1, \; p_2, \ldots p_\sigma$$

въ видѣ функцій отъ

$$q_0, \; q_1, \; q_2, \ldots q_\sigma, \; u_1, \; u_2, \ldots u_l$$

и ихъ производныхъ, то, подставивъ ихъ въ уравненія (43) параграфа 16 моего мемуара, мы получили бы новыя дифференціальныя уравненія, которыя, если не окажутся слѣдствіями упомянутыхъ $\sigma + l$, нужно къ этимъ послѣднимъ присоединить и объ интегрированіи которыхъ сказать ничего нельзя. Они уже совсѣмъ не относятся къ моей задачѣ.

Посмотримъ же, какъ поступаетъ В. П. Ермаковъ, чтобы рѣшить задачу, и для этой цѣли разсмотримъ § 5 его статьи.

Онъ старается привести уравненіе

$$M(y)dx + N(y)dy = 0 \tag{3}$$

къ другому, имѣющему тотъ же множитель R, какъ и это (3).

Затѣмъ предполагая, что найдены общія величины коэффиціентовъ при dx и dy въ этомъ другомъ, онъ хочетъ получить изъ нихъ общія же величины полиномовъ $M(y)$ и $N(y)$.

Онъ выводитъ сначала уравненіе (24), а именно,

$$\left(F\frac{\partial \Theta}{\partial x} - F_2\,\Theta\right)dx + \left(F\frac{\partial \Theta}{\partial y} + F_1\,\Theta\right)dy = 0, \tag{24}$$

имѣющее множителемъ произведеніе

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}$$

при произвольныхъ величинахъ $u_1, \; u_2, \ldots u_n$, независящихъ отъ y.

Въ уравненіи (24) F, F_1, F_2 имѣютъ такія величины:

$$F = (y-u_1)\;(y-u_2)\ldots(y-u_n), \;\; F_1 = F\sum_i \frac{\alpha_i + 1}{y - u_i}, F_2 = F\sum_i \frac{(\alpha_i+1)u'_i}{y-u_i},$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots n,$$

а Θ есть произвольная цѣлая функція отъ y.

Потомъ, конечно предполагая, что $u_1, \; u_2, \ldots u_n$ имѣютъ тѣже величины, что и въ множителѣ R уравненія (3), онъ вычитаетъ уравненіе (24) изъ (3) и получаемъ новое уравненіе, которое мы напишемъ такъ:

$$M_1(x)dx + N_1(y)dy = 0 \tag{4}$$

гдѣ, слѣдовательно, будетъ

$$M_1(y) = M(y) - F\frac{\partial \Theta}{\partial x} + F_2\Theta, N_1(y) = N(y) - F\frac{\partial \Theta}{\partial y} - F_1\,\Theta \tag{5}$$

Назовемъ черезъ τ степень полинома $M(y)$ и черезъ ρ степень $N(y)$ относительно перемѣнной y. Число σ есть наибольшее изъ двухъ τ и ρ.

Уравненіе (4) дѣйствительно будетъ имѣть множитель R.

В. П. Ермаковъ хочетъ сдѣлать степень полинома $N_1(y)$ ниже чѣмъ $n-1$.

Для этой цѣли, предполагая, что $\rho > n-2$, онъ дѣлаетъ $\rho = n+m-1$, гдѣ m цѣлое и положительное число, или нуль. За Θ онъ беретъ цѣлую функцію степени m

$$\Theta = r_0 y^m + r_1 y^{m-1} + \ldots$$

Чтобы сдѣлать степень $N_1(y)$ ниже чѣмъ ρ, онъ дѣлаетъ

$$q_0 = \frac{r_0}{\sum_i \alpha_i + m}, \tag{6}$$

гдѣ у него q_0 есть коэффиціентъ при y^ρ въ полиномѣ $N(y)$, который онъ пишетъ такъ

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \ldots$$

Слѣдовательно это q_0 можетъ не совпадать съ моимъ q_0, введеннымъ выше.

Относительно уравненія (4) нужно замѣтить слѣдующее:

Во первыхъ формула (6) В. П. Ермакова не вѣрна. Нужно сдѣлать

$$r_0 = \frac{q_0}{\sum_i \alpha_i + m + n},$$

въ чемъ легко убѣдиться, когда уравняемъ нулю коэффиціентъ при y^ρ въ полиномѣ $N_1(y)$.

Для дальнѣйшаго пониженія нужно пользоваться коэффиціентами

$$r_1, \; r_2 \ldots r_m,$$

чтобы довести степень $N_1(y)$ до $\rho - m - 1 = n - 2$.

Но В. П. Ермаковъ замѣчаетъ, что величина r_0 невозможна, когда знаменатель въ ней есть нуль, то есть, когда

$$\sum_i \alpha_i + m + n = 0$$

и этимъ ограничивается.

Между тѣмъ при нахожденіи каждой изъ величинъ $r_0, r_1, r_2 \dots r_m$ окажется исключительный случай.

Такъ напримѣръ, уравнивая нулю коэффиціентъ при $y^{\rho-1}$ въ $N_1(y)$, мы получимъ для нахожденія r_1 уравненіе

$$q_1-[\sum_i(\alpha_i+1)u_i-(\sum_i\alpha_i+n+m)\sum_i u_i]r_0-(\sum_i\alpha_i+m+n-1)r_1=0$$

и исключительный случай будетъ, когда

$$\sum_i\alpha_i+m+n-1=0;$$

значитъ тотъ, который упоминается В. П. Ермаковымъ, не единственный.

Во всѣхъ остальныхъ, неисключительныхъ случаяхъ, степень $N_1(y)$ можетъ быть доведена до $n-2$. Тогда окажется, что $r_0, r_1, r_2 \dots r_m$ и коэффиціенты этого приведеннаго полинома $N_1(y)$ будутъ функціями отъ

$$u_1,\ u_2,\dots u_n,\ q_0,\ q_1,\ q_2,\dots q_m, \tag{7}$$

гдѣ величины $q_0, q_1, q_2,\dots q_m$ суть тѣ, которыя находятся въ формулѣ

$$N(y)=q_0y^{n+m-1}+q_1y^{n+m-2}+\dots$$

Что касается коэффиціентовъ $M_1(y)$, то послѣ приведенія они будутъ функціями не только отъ величинъ (7), но еще и отъ ихъ производныхъ и кромѣ того отъ

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\dots p_\sigma,$$

находящихся въ формулѣ

$$M(y)=p_0y^\sigma+p_1y^{\sigma-1}+\dots+p^{\sigma-1}y+p_\sigma,$$

гдѣ у насъ σ есть наибольшее изъ чиселъ τ и ρ.

Назовемъ по аналогіи σ' наибольшую изъ степеней двухъ полиномовъ $M_1(y)$ и $N_1(y)$ послѣ сдѣланнаго ихъ приведенія. Тогда можно ихъ написать такъ

$$M_1(y)=P_0y^{\sigma'}+P_1y^{\sigma'-1}+P_2y^{\sigma'-2}+\dots+P_{\sigma'-1}y+P_\sigma.$$

$$N_1(y)=Q_0y^{\sigma'}+Q_1y^{\sigma'-1}+Q_2y^{\sigma'-2}+\dots+Q_{\sigma'-1}y+Q_{\sigma'},$$

гдѣ изъ двухъ величинъ P_0, Q_0 покрайней мѣрѣ одна не равна нулю.

Во вторыхъ степень $N_1(y)$ дѣйствительно будетъ $n-2$ послѣ приведенія, но откуда взялъ В. П. Ермаковъ, что степень $M_1(y)$ будетъ $n-1$?

Онъ указываетъ на уравненіе (4) его статьи, но изъ него ничуть не слѣдуетъ, что она есть $n-1$.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что число τ, или степень $M(y)$ есть произвольное. Возмемъ, напримѣръ, $\tau > m+n$; тогда степень $M_1(y)$ какъ до приведенія, такъ и послѣ него, будетъ $\tau > n-1$.

Если взять $\tau \leq m+n$, то почему думаетъ В. П. Ермаковъ, что всѣ коэффиціенты въ $M_1(y)$ при

$$y^{m+n},\ y^{m+n-1}, \ldots y^n$$

должны непремѣнно уничтожиться?

Такимъ образомъ утвержденіе его о степени $M_1(y)$ прямо невѣрно.

Въ третьихъ, нигдѣ неупоминается о важномъ случаѣ, когда $\tau > \varrho+1$[1]. Тогда задача можетъ не имѣть рѣшенія. Дѣйствительно, тогда величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ не совершенно произвольны, а должны удовлетворить уравненію

$$\alpha_1, + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\tau. \tag{8}$$

Если это условіе выполнено, то степень $M_1(y)$ послѣ приведенія останется тоже τ, если возмемъ $\tau > m+n$, или иначе, $\tau > \varrho+1$, что и до приведенія.

Если оно несоблюдено, то будетъ $\tau \leq \varrho+1$, или иначе, $\tau \leq m+n$.

Возьмемъ въ общемъ случаѣ $\tau = \varrho + 1 = m+n$ и въ функціи Θ сдѣлаемъ

$$r_0 = \frac{q_0}{\sum\limits_i \alpha_i + m + n}, \tag{9}$$

оставляя $r_1, r_2, \ldots, r_m$ произвольными.

Тогда степень $N_1(y)$ будетъ $\varrho - 1 = m+n-2$, а степень $M_1(y)$ не можетъ остаться $\varrho+1$, ибо тогда она превышала бы степень $N_1(y)$ на двѣ единицы, а это требуетъ по § 5 моей статьи, чтобы условіе (8) было соблюдено. Такъ какъ послѣдняго нѣтъ, а уравненіе

$$M_1(y)\,dx + N_1(y)\,dy = 0$$

все таки имѣетъ множитель R, то въ $M_1(y)$, при выбранной величинѣ (9) количества r_0, коэффиціентъ при $y^{\varrho+1}$ долженъ уничтожиться. Это даетъ

$$p_0 + r_0' = 0, \text{ или } p_0 = -\frac{q_0'}{\sum\limits_i \alpha_i + m + n}.$$

---

[1]) См. § 5 моей цитированной статьи.

Если, удержавъ величину (9) для r_0, мы сдѣлаемъ

$$r_1 = \frac{q_1 - [\sum_i (\alpha_i + 1) u_i - (\sum_i \alpha_i + m + n) \sum_i u_i]}{\sum_i \alpha_i + m + n - 1},$$

предполагая, что $\sum_i \alpha + m + n - 1$ не нуль, то коэффиціентъ при $y^{\varrho - 1}$ въ $N_1(y)$ уничтожится, а степень $M_1(y)$ не можетъ остаться равною ϱ, ибо условіе

$$\sum_i \alpha_i + \varrho = \sum_i \alpha_i + m + n - 1 = 0$$

не выполнено.

Значитъ въ $M_1(y)$ коэффиціентъ при y^ϱ долженъ быть нулемъ, а это даетъ

$$p_1 - r_1' + r_0' \sum_i u_i + r_0 \sum_i (\alpha_i + 1) u_i' = 0,$$

откуда выводимъ

$$p_1 = r_1' - r_0' \sum_i u_i - r_0 \sum_i (\alpha_i + 1) u_i'.$$

Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ далѣе, мы увидимъ, что, если не встрѣтится ни одного изъ исключительныхъ случаевъ, упомянутыхъ въ замѣчаніи первомъ, мы можемъ довести степень $M_1(y)$ до $n - 1$, а степень $N_1(y)$ до $n - 2$.

Въ приведенномъ уравненіи (4) будетъ тогда $\sigma' = n - 1$.

Въ третьихъ утвержденіе В. П. Ермакова, что по исключеніи

$$P_0, P_1, P_2, \ldots P_0',$$

изъ $\sigma' + n = 2n - 1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты приведеннаго уравненія (4), останется $n - 1$ самостоятельныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегралы которыхъ будутъ содержать $n - 1$ независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ, опять невѣрно.

Дѣйствительно, у него ничего не говорится о важномъ случаѣ, когда мое число α, или въ настоящемъ случаѣ $\sum_i \alpha_i + \sigma' = \sum_i \alpha_i + n - 1$ равно одному изъ чиселъ

$$0, 1, 2, 3, \ldots n - 3,$$

то есть, когда $\sum_i \alpha_i$ имѣетъ одну изъ величинъ

$$-2, -3, -4, \ldots -(n - 1).$$

Эти величины не даютъ ни одного изъ упомянутыхъ исключительныхъ случаевъ и, слѣдовательно, при нихъ приведеніе уравненія (4) возможно.

Между тѣмъ число дифференціальныхъ уравненій и постоянныхъ произвольныхъ въ ихъ интегралахъ можетъ быть и n (см. §§ 17 и 19 моей статьи).

Въ четвертыхъ, кромѣ упомянутыхъ важныхъ случаевъ, о которыхъ ничего не говорится, не упоминается также о слѣдующихъ:

Когда степень полинома $M(y)$ меньше степени $N(y)$. Въ этомъ случаѣ нѣсколько интеграловъ дифференціальныхъ уравненій задачи получается непосредственно. (См. §§ 9, 10 и 12 моей статьи).

Когда $\sum\limits_i \alpha_i$ есть цѣлое число. Тогда существуетъ одинъ интегралъ, получающійся непосредственно. (См. § 15 моей статьи).

Не устанавливается съ точностью ни число дифференціальныхъ уравненій задачи, ни число ихъ независимыхъ интеграловъ въ различныхъ случаяхъ.

Наконецъ, въ пятыхъ, замѣчу, что приведеніе заданнаго уравненія къ другимъ по §§ 3 и 5 статьи автора настолько усложняетъ задачу о разысканіи конечныхъ уравненій между величинами

$$q_0, q_1, q_2, \ldots q_3, u_1, u_2, \ldots u_l,$$

что самъ авторъ ихъ написать не можетъ.

Пока же этого не сдѣлано, можно сказать, что рѣшеніе задачи отсутствуетъ.

Не дѣлая другихъ возраженій, я въ заключеніе скажу, что хотя я и нахожу замѣчанія В. П. Ермакова, относящіяся къ моей задачѣ, весьма интересными и важными, но не могу съ нимъ согласиться, что мои результаты изложены имъ въ простой и ясной формѣ, какъ это онъ говоритъ въ концѣ своего предисловія, ни въ томъ, что задача изслѣдована имъ во всѣхъ подробностяхъ, какъ онъ полагаетъ въ концѣ своей статьи.

Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

ГЛАВА I.

Образованіе производныхъ уравненій С. Ли и задача ихъ интегрированія.

1. Настоящее изслѣдованіе мы начнемъ съ изложенія начальныхъ понятій, которыя представляютъ основы классической теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія съ частными производными получаются при помощи исключенія произвольныхъ постоянныхъ величинъ или произвольныхъ функцій изъ функціональныхъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій.

Пусть зависимая перемѣнная z обозначаетъ функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, которая опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ

$$z = f(x, y).$$

Назовемъ черезъ p и q частныя производныя перваго порядка функціи z, соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x и y, т. е. положимъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующая дифференціальная зависимость, равнозначная обоимъ предыдущимъ равенствамъ

$$dz = pdx + qdy.$$

Пусть имѣемъ зависимость между разсматриваемыми перемѣнными z, x, y, которая опредѣляетъ семейство поверхностей, зависящее отъ двухъ различныхъ параметровъ a и b, и представляется уравненіемъ

$$z = f(x, y, a, b). \tag{1}$$

Предположимъ, что послѣднее равенство и его два производныя уравненія перваго порядка

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \; q = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

образуютъ совмѣстно систему трехъ уравненій, которыя, по исключеніи параметровъ a и b, даютъ въ результатѣ одну зависимость слѣдующаго вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{3}$$

Послѣднее полученное равенство (3) представляетъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p и q одной неизвѣстной функціи z и характеризуетъ собой общія свойства всѣхъ поверхностей даннаго вида (1).

Рѣшеніе обратнаго вопроса, относительно разысканія функціональныхъ уравненій поверхностей, удовлетворяющихъ условіямъ, выраженнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ (3), представляетъ такъ называемую задачу интегрированія послѣдняго дифференціальнаго уравненія.

Всякое значеніе функціи z, въ перемѣнныхъ x и y, опредѣляющее какую-либо поверхность искомаго вида, и, стало-быть, совмѣстно со значеніями своихъ производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ утождествляющее данное дифференціальное уравненіе (3), называется его *рѣшеніемъ*, или *интеграломъ*.

Полнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), заключающее двѣ различныя произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ даннаго рѣшенія и его двухъ производныхъ уравненій перваго порядка, приводитъ къ одному только исходному дифференціальному уравненію (3).

Частнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), получаемое изъ полнаго его интеграла сообщеніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ величинамъ, входящимъ въ этотъ полный интегралъ.

Наконецъ, *общимъ* и *особеннымъ* интегралами называются рѣшенія уравненія (3), опредѣляемыя геометрически какъ обертки семейства поверхностей (1), образованныя соотвѣтственно въ предположеніяхъ, что параметры a и b связаны, въ первомъ случаѣ одной произвольной зависимостью, а во второмъ случаѣ a и b независимы между собой.

Если остановиться на разсматриваемомъ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, то, относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, координаты x, y, z отмѣчаютъ въ пространствѣ точку поверхности, представленной уравненіемъ (1), а частныя производныя p и q опредѣляютъ положеніе касательной плоскости въ разсматриваемой точкѣ поверхности. Всѣ приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ всякаго труда на случай произвольнаго числа независимыхъ перемѣнныхъ величинъ и на системы совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ перемѣннымъ.

Послѣднія геометрическія представленія тѣсно связаны съ классической теоріей уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, созданной трудами Лагранжа, Коши и Якоби. На изложенномъ выше способѣ происхожденія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій и на указанныхъ геометрическихъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ основаны всѣ приложенія названной теоріи къ цѣлому ряду вопросовъ геометріи и анализа.

Со времени созданія исчисленія безконечно-малыхъ величинъ до семидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, теорія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи развивалась, исходя изъ разсмотрѣнія изложенныхъ выше основныхъ понятій дифференціальнаго исчисленія, относительно частныхъ производныхъ зависимыхъ перемѣнныхъ по независимымъ перемѣннымъ. Затѣмъ С. Ли поставилъ дальнѣйшее развитіе изучаемой теоріи въ зависимость отъ изслѣдованія новыхъ перемѣнныхъ величинъ и новыхъ способовъ образованія особаго рода *производныхъ* уравненій, которыя замѣнили собой дифференціальныя уравненія съ частными производными, въ классическомъ смыслѣ этого слова.

Въ нашемъ сочиненіи мы имѣемъ въ виду критическое изслѣдованіе новыхъ ученій С. Ли, которое приведетъ насъ къ строгому различію между обоими типами указанныхъ уравненій,—съ частными производными классической теоріи и производныхъ уравненій С. Ли.

Поэтому мы начнемъ послѣдующее изложеніе съ разсмотрѣнія основныхъ понятій разсматриваемой теоріи.

2. Въ своихъ изслѣдованіяхъ по теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій С. Ли ввелъ новыя отличныя отъ предыдущихъ понятія, разсмотрѣнію которыхъ и посвящаются послѣдующія строки [1]).

[1]) *S. Lie.*—Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine classification derselben (Nachrichten vor der K. Gesellschaft der Wissenschaften u D. G. A. Universität. Göttingen, 1873. S. 173).

S. Lie.—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen. Bd. IX, 1876. S. 250).

Пусть, согласно съ предыдущимъ, величины x, y, z обозначаютъ координаты нѣкоторой данной точки въ пространствѣ, а X, Y, Z представляютъ текущія координаты. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку (x, y, z), выражается слѣдующимъ равенствомъ

$$Z-z=p\ (X-x)+q\ (Y-y),$$

гдѣ значенія коеффиціентовъ p и q вполнѣ опредѣляютъ положеніе опредѣленной плоскости, которую условимся символически обозначать черезъ (p, q).

Такимъ образомъ координаты x, y, z и параметры p, q, отмѣчая опредѣленную точку въ пространствѣ и проходящую черезъ нее плоскость, вмѣстѣ съ тѣмъ вполнѣ опредѣляютъ нѣкоторый безконечно-малый криволинейный поверхностный элементъ, построенный въ разсматриваемой точкѣ (x, y, z) и совпадающій въ этой точкѣ съ построенной въ ней плоскостью (p, q).

Поэтому совокупность разсматриваемыхъ пяти величинъ

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q \tag{4}$$

С. Ли называетъ *поверхностнымъ элементомъ* (Flächenelement), или иногда, для краткости изложенія, *элементомъ* (Element).

Совокупность значеній поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условіями, или уравненіями, С. Ли называетъ *системой поверхностныхъ элементовъ* (Schar v. Flächenelementen). Такъ, напримѣръ, всякое уравненіе между перемѣнными величинами (4)

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \tag{5}$$

опредѣляетъ систему поверхностныхъ элементовъ, совершенно независимо отъ того, заключаетъ ли это уравненіе всѣ пять разсматриваемыхъ перемѣнныхъ величинъ, или только нѣкоторыя изъ нихъ.

S. Lie u. F. Engel.—Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen (Mathematiche Annalen, Bd. 59, S. 193).

S. Lie u. F. Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, II Abschnitt. Leipzig, 1890. S. 77.

S. Lie u. G. Scheffers.—Geometrie der Berührungstransformationen. Erster Band, Leipzig. 1896. S. 181.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891. p. 241.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem. Leipzig 1900. S. 230.

F. Klein.—Conférences sur les Mathématiques faites au congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago. Paris. 1898. p. 18.

F. Klein.—Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1891, p. 187).

Н. Цытовичъ.—Теорія Гамильтона—Якоби—Ли въ Механикѣ. С.-Петербургъ. 1899, стр. 54, 70.

Два смежныхъ безконечно близко расположенныхъ поверхностныхъ элемента называются *соединенными* (vereinigt), если точка одного элемента расположена въ плоскости другого.

Легко вывести аналитическое условіе, показывающее, что данный поверхностный элементъ (4) находится въ *соединеніи* съ безконечно близкимъ съ нимъ элементомъ

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ p + dp,\ q + dq.$$

Подставляя для этого координаты точки послѣдняго элемента вмѣсто текущихъ координатъ въ уравненіе плоскости $(p,\ q)$, получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = pdx + qdy, \tag{6}$$

которое и представляетъ искомое условіе *соединенности* обоихъ разсматриваемыхъ поверхностныхъ элементовъ.

Наконецъ, система поверхностныхъ элементовъ, находящихся въ *соединеніи* со всѣми смежными съ ними безконечно-близко расположенными элементами, называется, согласно съ С. Ли, *собраніемъ* поверхностныхъ элементовъ (*Element-Verein*, или *Element-Mannigfaltigkeit*).

Такимъ образомъ, при разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ, приходится разсматривать прежде всего условія, опредѣляющія данную систему элементовъ и затѣмъ—условія ихъ соединенности.

Легко видѣть, напримѣръ, что совокупность всѣхъ точекъ какой-либо поверхности и построенныхъ въ нихъ касательныхъ плоскостей къ этой поверхности представляетъ собраніе элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ данную поверхность.

Второй примѣръ представляетъ система элементовъ, изъ всѣхъ точекъ какой-либо кривой линіи въ пространствѣ и плоскостей, проходящихъ черезъ касательныя прямыя, проведенныя въ точкахъ разсматриваемой кривой, которыя образуютъ собраніе элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ вдоль нашей кривой линіи.

Наконецъ, третьяго вида собраніе образуется системой элементовъ, плоскости которыхъ проходятъ черезъ одну общую точку пространства.

Легко вообразить еще и другія собранія поверхностныхъ элементовъ, которыя получаются изъ послѣднихъ двухъ указанныхъ типовъ собраній, введеніемъ нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, относительно составляющихъ ихъ элементовъ, расположенныхъ вдоль кривой линіи или пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Всѣ поверхностные элементы, которые составляютъ геометрическія собранія, построены въ безконечно-близко расположенныхъ между собой

точкахъ пространства, образующихъ поверхности, кривыя линіи или сливающихся въ одной точкѣ. Эти геометрическія формы, заполненныя сплошнымъ образомъ точками поверхностныхъ элементовъ геометрическихъ собраній, мы будемъ называть *геометрическимъ мѣстомъ* разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ. Такъ, по отношенію къ указаннымъ тремъ типамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ поверхности, кривыя линіи или пересѣкающихся въ общей точкѣ, эти послѣднія: поверхность, кривая линія и точка, представляютъ геометрическія мѣста разсматриваемыхъ собраній.

3. Исходя изъ равенства (6), выражающаго условіе соединенности поверхностныхъ элементовъ, легко составить понятіе о всѣхъ возможныхъ собраніяхъ, которыя могутъ быть составлены изъ поверхностныхъ элементовъ и убѣдиться, что они исчерпываются перечисленными выше собраніями.

Условимся для этого прежде всего говорить, что дифференціальное равенство (6) *удовлетворяется,* на основаніи данныхъ функціональныхъ уравненій между перемѣнными x, y, z, p и q, если оно является алгебраическимъ слѣдствіемъ этихъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій, т. е. когда дифференціальное соотношеніе (6) уничтожается тождественно, въ силу всѣхъ послѣднихъ зависимостей между перемѣнными величинами (4). Условимся далѣе называть удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ функціональныя зависимости *рѣшеніемъ* уравненія (6). Изъ самаго понятія о рѣшеніи уравненія (6) непосредственно слѣдуетъ, что представляющія его функціональныя зависимости должны заключать явнымъ образомъ перемѣнную величину z, такъ какъ въ противномъ случаѣ невозможно получить изъ нихъ дифференціальныхъ соотношеній, заключающихъ дифференціалъ dz, слѣдствіемъ которыхъ являлось бы равенство (6). Поэтому необходимо предположить, на основаніи послѣдняго равенства, что существуетъ по меньшей мѣрѣ одна зависимость между перемѣнными величинами x, y, z, p и q, разрѣшимая относительно перемѣнной z.

Докажемъ кромѣ того, что, каково бы ни было число уравненій, представляющихъ рѣшеніе равенства (6), между ними всегда существуетъ одна зависимость, заключающая только три перемѣнныхъ x, y и z. Послѣднее предложеніе становится очевиднымъ, если число разсматриваемыхъ уравненій больше двухъ, ибо въ такомъ случаѣ изъ нихъ всегда возможно исключить двѣ перемѣнныя величины p и q и получить въ результатѣ, по меньшей мѣрѣ, одну искомую зависимость только между перемѣнными x, y и z.

Поэтому достаточно разсмотрѣть предположенія, что рѣшенія уравненія (6) представляются одной или двумя зависимостями между разсматриваемыми перемѣнными (4).

Начнемъ съ изслѣдованія перваго случая и предположимъ, что рѣшеніе равенства (6) представляется однимъ уравненіемъ, которое, на основаніи изложенныхъ соображеній, приводится къ слѣдующему виду

$$z = \varphi\ (x,\ y,\ p,\ q).$$

Стало-быть, равенство (6) должно быть тождественно слѣдующему дифференціальному уравненію

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq.$$

Изъ сравненія обоихъ равенствъ слѣдуютъ прежде всего тождества

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

которыя показываютъ, что функція φ зависитъ только отъ x, y и не заключаетъ перемѣнныхъ p и q, т. е. представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi\,(x,\ y).$$

Кромѣ того мы заключаемъ еще о существованіи двухъ равенствъ

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ предположенія, что рѣшеніе уравненія (6) представляется однимъ только равенствомъ, мы приходимъ къ необходимости заключить о существованіи еще двухъ, при чемъ совокупность всѣхъ трехъ послѣднихъ равенствъ опредѣляетъ собой собраніе поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ собой поверхность, опредѣляемую первымъ изъ трехъ написанныхъ выше уравненій.

Аналогичное заключеніе получается также и во второмъ случаѣ, соотвѣтствующемъ предположенію, что рѣшеніе равенства (6) дается двумя уравненіями. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая, соотвѣтствующіе предположеніямъ, что уравненія изслѣдуемаго рѣшенія разрѣшимы относительно двухъ перемѣнныхъ z и p или относительно z и y, или, что то-же самое, относительно совокупностей перемѣнныхъ z и q, или z и x.

Пусть, напримѣръ, система равенствъ

$$z = \varphi\ (x,\ y,\ q),\ p = \psi\ (x,\ y,\ q)$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (6). Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе должно быть слѣдствіемъ данныхъ уравненій и ихъ производныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq,$$

$$dp = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial q}dq.$$

Поэтому, называя черезъ λ и μ два неопредѣленные коэффиціента мы должны имѣть тождество

$$dz - pdx - qdy =$$

$$\lambda\left(dz - \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq\right) +$$

$$+ \mu\left(dp - \frac{\partial\psi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial y}dy - \frac{\partial\psi}{\partial q}dq\right),$$

которое приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\lambda = 1, \ \mu dp = 0,$$

$$p = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad q = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0.$$

Если предположить изъ второго равенства, что $dp = 0$, т. е. положить

$$p = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная величина, то къ первоначальнымъ уравненіямъ слѣдуетъ присоединить новое равенство

$$C = \psi\ (x,\ y,\ q),$$

такъ что въ результатѣ изслѣдуемое рѣшеніе уравненія (6) представляется тремя равенствами.

Если же предположить, что

$$\mu = 0,$$

то полученныя выше равенства становятся

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, q = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

т. е., во-первыхъ, функція φ не зависитъ отъ перемѣнной q и, во-вторыхъ, также въ разсматриваемомъ случаѣ рѣшеніе уравненія (6) заключаетъ три уравненія и, съ геометрической точки зрѣнія, представляетъ то же самое собраніе элементовъ, что и въ первомъ изслѣдованномъ случаѣ.

Наконецъ, если разсматриваемое рѣшеніе выражается двумя равенствами вида

$$z = \varphi(x, p, q), \; y = \psi(x, p, q),$$

то уравненіе (6) должно представлять слѣдствіе дифференціальныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq.$$

Для этого должны имѣть мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p + \frac{\partial \psi}{\partial x} q,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = q \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = q \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

Послѣднія два равенства приводятъ къ новому тождеству

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} & \frac{\partial \psi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0,$$

которое показываетъ, что обѣ перемѣнныя p и q исключаются изъ обоихъ уравненій, представляющихъ разсматриваемое рѣшеніе, такъ что также и въ этомъ случаѣ должна существовать одна зависимость между перемѣнными x, y, z, которая, согласно съ предыдущимъ, разрѣшима относительно z.

Такимъ образомъ изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что рѣшеніе уравненія (6) должно *заключать по меньшей мѣрѣ три равенства.*

Но, кромѣ двухъ разсмотрѣнныхъ при этомъ возможныхъ предположеній, слѣдуетъ принять во вниманіе еще третье очевидное рѣшеніе уравненія (6)

$$dx = 0, \; dy = 0, \; dz = 0.$$

Послѣднія равенства показываютъ, что перемѣнныя x, y, z должны имѣть постоянныя значенія, т. е. всѣ три уравненія рѣшенія равенства (6) заключаютъ только три перемѣнныя x, y и z. Соотвѣтствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ очевидно пучекъ плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку.

Разсмотрѣнными тремя типами исчерпываются очевидно всѣ тѣ собранія элементовъ, которыя опредѣляются совокупностью трехъ уравненій между перемѣнными x, y, z, p, q и соотвѣтствуютъ различнымъ возможнымъ предположеніямъ относительно разрѣшимости этихъ уравненій относительно перемѣнныхъ x, y, z.

Кромѣ того ясно, что возможно предположить существованіе еще другихъ собраній элементовъ, которыя соотвѣтствуютъ рѣшеніямъ уравненія (6), представленнымъ болѣе чѣмъ тремя различными равенствами.

Если рѣшеніе равенства (6) заключаетъ пять различныхъ уравненій, то, на основаніи послѣднихъ, всѣ перемѣнныя x, y, z, p, q получаютъ вполнѣ опредѣленныя постоянныя значенія. Оставляя послѣдній случай безъ разсмотрѣнія, какъ не представляющій интереса, займемся изслѣдованіемъ рѣшеній равенства (6), образованныхъ системой четырехъ различныхъ уравненій. Результатъ исключенія изъ нихъ перемѣнныхъ величинъ p и q даетъ, по меньшей мѣрѣ, двѣ зависимости между остальными перемѣнными x, y, z; однако въ различныхъ частныхъ случаяхъ, число послѣднихъ зависимостей можетъ равняться и тремъ. Поэтому опредѣляемыя разсматриваемыми уравненіями *собранія* представляютъ соотвѣтственно системы поверхностныхъ элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ по нѣкоторой кривой линіи или пересѣкающихся въ одной ихъ общей точкѣ. На послѣдующихъ строкахъ мы перейдемъ къ подробному разсмотрѣнію аналитическихъ выраженій всѣхъ указанныхъ собраній поверхностныхъ элементовъ.

4. Какъ слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, собранія поверхностныхъ элементовъ опредѣляются аналитически системой уравненій слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{l} F_i(x,\, y,\, z,\, p,\, q) = 0, \\ i = 1,\, 2, \ldots \nu, \end{array}\right\} \qquad (7)$$

гдѣ ν принимаетъ одно изъ трехъ значеній 3, 4 или 5; при чемъ въ расчетъ принимается равенство (6). Разсматривая подобныя уравненія, мы всегда будемъ разумѣть опредѣленную область измѣненія перемѣнныхъ, внутри которой однѣ изъ разсматриваемыхъ перемѣнныхъ величинъ опредѣляются однозначно черезъ остальныя величины, входящія въ наши уравненія.

Если какая-либо перемѣнная величина получаетъ всѣ возможныя значенія, между предѣлами ея измѣненія, то С. Ли говоритъ, что разсматриваемая перемѣнная имѣетъ ∞, или ∞^1 различныхъ значеній. Если число разсматриваемыхъ перемѣнныхъ величинъ равняется n и онѣ связаны между собой m зависимостями, такъ что всѣ n перемѣнныя величины

являются, внутри нѣкоторой области ихъ измѣненія, функціями только $n-m$ различныхъ перемѣнныхъ величинъ, то наша система перемѣнныхъ величинъ, по обозначенію С. Ли, представляетъ ∞^{n-m} различныхъ значеній.

Въ силу послѣднихъ обозначеній, мы говоримъ, что уравненіе (5) опредѣляетъ систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ.

Аналогичнымъ образомъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, выражаемое уравненіями (7), представляетъ $\infty^{5-\nu}$ поверхностныхъ элементовъ, т. е. ∞^2, или ∞^1, или ∞^0 поверхностныхъ элементовъ въ зависимости отъ числа 3, 4 или 5 уравненій (7), при чемъ послѣднему символическому обозначенію ∞^0 соотвѣтствуетъ всего одинъ только опредѣленный поверхностный элементъ.

Начнемъ съ болѣе подробнаго разсмотрѣнія собраній ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемыхъ системой слѣдующихъ трехъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} F_i(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0, \\ i = 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и равенствомъ (6)-ымъ.

Согласно съ предыдущимъ, возможны три случая, соотвѣтствующіе предположеніямъ, что послѣдняя система уравненій даетъ одну, двѣ или три зависимости между перемѣнными x, y и z, т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія являются соотвѣтственно, или поверхность, или кривая линія, или точка.

Если предположимъ, что уравненія (8), по исключеніи изъ нихъ перемѣнныхъ p и q, даютъ одну только зависимость между перемѣнными x, y, z, которая выражается равенствомъ

$$z = f\ (x,\ y),$$

т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія служитъ поверхность, представленная послѣднимъ уравненіемъ, то становится ясно, что наше собраніе поверхностныхъ элементовъ опредѣляется аналитически совокупностью написаннаго уравненія и его двухъ производныхъ уравненій

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ величинъ, уравненія (8) равнозначны послѣднимъ тремъ уравненіямъ, на основаніи которыхъ утождествляется очевидно уравненіе (6)-ое.

Если уравненіе (8), по исключеніи изъ нихъ p и q, представляютъ двѣ зависимости между перемѣнными x, y, z, т. е. геометрическимъ

мѣстомъ изслѣдуемаго собранія служитъ кривая линія, которая опредѣляется двумя уравненіями

$$z = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

то третье равенство, къ которому должны приводить уравненія (8) разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ, получается изъ уравненія (6)-го подстановкой въ него значеній

$$dz = \varphi'(x)\,dx, \quad dy = \psi'(x)dx.$$

Такъ какъ значеніе dx отлично отъ нуля, то искомое третье уравненіе разсматриваемаго собранія становится

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x).q.$$

Наконецъ, если всѣ три уравненія (8) не зависятъ отъ перемѣнныхъ p и q, то соотвѣтствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ пучекъ поверхностей, пересѣкающихся въ данной точкѣ (x_0, y_0, z_0), и уравненія его геометрическаго мѣста, а вмѣстѣ съ тѣмъ и всего собранія, приводятся къ слѣдующему виду

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Пусть имѣемъ собраніе ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемое системой (7), въ предположеніи $\nu = 4$, т. е. выражаемое четырмя различными уравненіями слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x, y, z, p, q) = 0, \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

совмѣстно съ равенствомъ (6)-мъ.

Такъ какъ система четырехъ уравненій между пятью перемѣнными величинами x, y, z, p и q дастъ, или двѣ, или три зависимости между первыми тремя изъ этихъ перемѣнныхъ, то геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія можетъ быть кривая линія или точка. Кромѣ того легко убѣдиться, что въ обоихъ разсматриваемыхъ случаяхъ аналитическія выраженія разсматриваемыхъ собраній представляются совокупностью предыдущихъ трехъ уравненій, соотвѣтствующихъ собранію поверхностныхъ элементовъ (8), и одной новой зависимостью между перемѣнными p и q.

Въ самомъ дѣлѣ, начнемъ съ разсмотрѣнія перваго случая, когда геометрическое мѣсто собранія представляетъ кривую линію. Очевидно, что въ этомъ случаѣ, въ разсматриваемой нами области измѣненія пере-

мѣнныхъ, уравненія (9) изслѣдуемаго собранія элементовъ должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} z=\varphi(x),\ y=\psi(x),\\ p=\theta(x),\ \ q=\chi(x).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Въ силу условія соединенности (6), должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$\varphi'(x)=\theta(x)+\psi'(x)\chi(x), \tag{11}$$

которое очевидно должно удовлетворяться тождественно, такъ какъ въ противномъ случаѣ послѣднее равенство представляло бы новое уравненіе и изслѣдуемое собраніе элементовъ опредѣлялось бы пятью различными уравненіями, противно первоначальному предположенію. Если же равенство (11) является тождествомъ, то, при помощи его, оба послѣднія уравненія (10) могутъ быть замѣнены двумя новыми эквивалентными имъ уравненіями, которыя составляются слѣдующимъ образомъ. Замѣняя въ тождествѣ (11) функціи $\theta(x)$ и $\chi(x)$ ихъ значеніями p и q, получаемъ равенство

$$\varphi'(x)=p+\psi'(x)q,$$

которое мы и возьмемъ въ расчетъ взамѣнъ одного изъ послѣднихъ двухъ уравненій (10). Совокупность полученнаго уравненія съ двумя первыми уравненіями (10) опредѣляетъ собой, какъ выше было указано собраніе ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ котораго служитъ кривая линія.

Что касается четвертаго дополнительнаго уравненія, то здѣсь слѣдуетъ отмѣтить два случая, когда, во-первыхъ, результатъ исключенія x, y, z изъ четырехъ уравненій (10) выражается однимъ равенствомъ, представляющимъ искомое уравненіе

$$p=\varphi(q), \tag{12}$$

и, во-вторыхъ, когда разсматриваемый результатъ исключенія представляется двумя уравненіями, т. е. обѣ величины p и q представляютъ постоянныя значенія:

$$p=a,\ q=b. \tag{13}$$

Въ первомъ предположеніи уравненію (12)-му соотвѣтствуетъ коническій пучекъ направленій p, q, -1 въ точкѣ (x, y, z), который, совмѣстно съ первыми тремя уравненіями нашего собранія, опредѣляетъ единственный вполнѣ опредѣленный поверхностный элементъ въ каждой

точкѣ кривой, представляющей геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія. Поэтому послѣднее представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на полосѣ, или лентѣ, вьющейся вдоль кривой линіи геометрическаго мѣста собранія.

Во второмъ предположеніи, въ силу равенствъ (13), тождество (11) принимаетъ видъ

$$\varphi'(x) = a + b\psi'(x)$$

и, благодаря интегрированію по x, даетъ слѣдующую зависимость между функціями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\varphi(x) = ax + b\psi(x) + c,$$

гдѣ c — новая произвольная постоянная величина. Поэтому уравненія геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія приводятся къ виду

$$z = ax + by + c, \quad y = \psi(x),$$

и представляють плоскую кривую. Слѣдовательно, разсматриваемое собраніе въ настоящемъ случаѣ представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на плоской полосѣ, или лентѣ, расположенной вдоль геометрическаго мѣста собранія и въ его плоскости.

Такимъ образомъ различіе обоихъ собраній ∞^1 и ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служитъ кривая линія, состоитъ въ томъ, что первое собраніе представляется геометрической полосой, вьющейся вдоль послѣдней кривой, тогда какъ второе собраніе представляется пучкомъ безконечнаго числа такихъ полосъ, вьющихся вдоль кривой геометрическаго мѣста и произвольно переплетающихся между собой.

Наконецъ, если уравненія (9) даютъ, по исключеніи величинъ p и q, три зависимости между перемѣнными x, y, z, то изслѣдуемое собраніе представляетъ пучекъ поверхностныхъ элементовъ, пересѣкающихся въ одной общей точкѣ (x_0, y_0, z_0). Само собою разумѣется, что въ такомъ случаѣ равенства (9) приводятся къ слѣдующимъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ p = \varphi(q). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Стало-быть и здѣсь разсматриваемое собраніе отличается также отъ соотвѣтствующаго собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ послѣдней зависимостью между перемѣнными p и q. Какъ и выше легко видѣть, что, благодаря послѣдней зависимости, разсматриваемое собраніе выдѣляетъ изъ всѣхъ поверхностныхъ элементовъ, пересѣкающихся въ точкѣ

(x_0, y_0, z_0), только тѣ элементы, которые касаются конуса, опредѣляемаго послѣднимъ уравненіемъ (14); въ предѣльномъ случаѣ разсматриваемое собраніе приводится къ системѣ элементовъ, которые пересѣкаются между собой вдоль одной и той же прямой линіи.

Предыдущія формулы указываютъ, что *уравненія каждаго изъ собраній* ∞^2 *поверхностныхъ элементовъ, т. е. и самыя собранія, опредѣляются вполнѣ уравненіями своего геометрическаго мѣста.*

Что же касается уравненій *собраній* ∞^1 *поверхностныхъ элементовъ, то для ихъ опредѣленія необходимо прибавить къ уравненіямъ ихъ геометрическаго мѣста еще одно характеризующее данное собраніе равенство, устанавливающее зависимость между перемѣнными* p *и* q.

Всѣ приведенныя разсужденій и вычисленія показываютъ, къ какому частному виду должны преобразовываться написанныя нами въ общемъ видѣ уравненія (7) для того, чтобы опредѣлять собой собранія поверхностныхъ элементовъ того или другого рода. Весьма частный видъ, къ которому приводятся послѣднія уравненія, показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что функціи F_i должны удовлетворять для этого особаго вида условіямъ.

Кромѣ приведенныхъ выше условныхъ обозначеній С. Ли ввелъ, для обозначенія собраній элементовъ, символы M_n^m съ двумя значками, указывающими соотвѣтственно: нижній—порядокъ собранія, т. е. порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ, а верхній—порядокъ геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія.

Поэтому условныя обозначенія

$$M_2^2,\ M_2^1,\ M_2^0$$

представляютъ собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ соотвѣтственно служатъ поверхность, кривая линія и точка.

Такимъ же образомъ символы

$$M_1^1,\ M_1^0$$

обозначаютъ собранія ∞^1 поверхностныхъ элементовъ съ геометрическими мѣстами, представляющими соотвѣтственно кривую линію и точку.

Наконецъ, условимся подъ обозначеніемъ

$$M_0^0$$

разумѣть собраніе, представленное одной толькой точкой и построенной въ ней одной опредѣленной плоскостью, которое аналитически выражается совокупностью пяти уравненій между разсматриваемыми пятью перемѣнными величинами (4).

5. Изложенное выше ученіе, относительно геометріи поверхностныхъ элементовъ и ихъ собраній въ пространствѣ трехъ измѣреній, легко распространяется на обобщенныя понятія о пространствѣ многихъ измѣреній, число которыхъ больше трехъ.

Условимся называть совокупность значеній $2n+1$ перемѣнныхъ величинъ

$$x_1,\ x_2, \ldots\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots\ p_n \tag{15}$$

поверхностнымъ элементомъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Совокупность значеній поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условіями, или уравненіями называется *системой поверхностныхъ элементовъ*.

Два поверхностныхъ элемента, напримѣръ, данный (15)-ый и безконечно близко расположенный съ нимъ элементъ

$$x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2, \ldots x_n + dx_n,\ z + dz,\ p_1 + dp_1, \ldots p_n + dp_n$$

называются *соединенными*, если имѣетъ мѣсто слѣдующая зависимость

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n. \tag{16}$$

Наконецъ, система поверхностныхъ элементовъ, находящихся въ соединеніи со всѣми безконечно-близко расположенными съ ними элементами, т. е. удовлетворяющихъ равенству (16)-му, называется *собраніемъ поверхностныхъ элементовъ*.

Мы называемъ *рѣшеніемъ* равенства (16) конечныя функціональныя зависимости между перемѣнными (15), которыя, совмѣстно со своими производными уравненіями, отождествляютъ равенство (16).

Составляя рѣшенія послѣдняго равенства, легко вывести уравненія, представляющія аналитическое выраженіе всѣхъ возможныхъ собраній поверхностныхъ элементовъ въ разсматриваемомъ пространствѣ $n+1$ измѣреній,

Замѣтимъ прежде всего, что существованіе равенства (16) приводитъ къ существованію, по меньшей мѣрѣ, одной функціональной зависимости, выражающей значеніе перемѣнной z въ видѣ функціи перемѣнныхъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n$ слѣдующаго вида [1])

$$z = \varphi\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n). \tag{17}$$

[1]) Ср. Lie - Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, S.S. 42, 78. M. Elie Cartan.—Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1899).

Чтобы, на основаніи послѣдняго равенства, уравненіе (16) удовлетворялось тождественно, для этого должны имѣть мѣсто еще n слѣдующихъ уравненій

$$p_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{18}$$

которыя совмѣстно съ предыдущимъ уравненіемъ представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Возможно сдѣлать еще другое предположеніе, что равенство (16) влечетъ существованіе между перемѣнными $z, x_1, x_2, \ldots x_n$, нѣсколькихъ зависимостей, число которыхъ обозначимъ черезъ $q+1$. Послѣднія всегда разрѣшимы относительно перемѣнной z и какихъ-либо q изъ остальныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Не нарушая общности разсужденій, всегда можемъ представить разсматриваемыя равенства въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{array}{c} z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}), \\ x_{n-q+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}), \\ i = 1, 2, \ldots n-q, \end{array}\right\} \tag{19}$$

Если существуетъ рѣшеніе равенства (16), которое заключаетъ эти уравненія, то подставляя послѣднія значенія z, x_{n-q+1}, $x_{n-q+2}, \ldots x_n$ въ равенство (16), заключаемъ о непремѣнномъ существованіи еще $n-k$ слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{c} p_k = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ k = 1, 2, \ldots n-q, \end{array}\right\} \tag{20}$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими $q+1$ уравненіями (19), представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Такъ какъ формулы (17), (18) заключаются въ послѣднихъ формулахъ какъ частный случай, соотвѣтствующій предположенію $q = 0$, то уравненія (19)—(20) мы будемъ разсматривать какъ представляющія общій видъ рѣшеній равенства (16)-аго.

С. Ли представляетъ уравненія (19)—(20) въ слѣдующемъ изящномъ видѣ. Вводя обозначеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^{q} q_i p_{n-q+i} - \varphi,$$

напишемъ равенства (19) — (20) слѣдующимъ образомъ

$$z = \sum_{i=1}^{q} \varphi_i p_{n-q+i} - H,$$

$$x_{n-q+i} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}, \quad p_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$i = 1, 2, \ldots q, \quad k = 1, 2, \ldots n-q.$$

Кромѣ указанныхъ рѣшеній равенства (16)-аго, представленныхъ совокупностью $n+1$ уравненій, легко составить новыя рѣшенія, съ большимъ числомъ уравненій, присоединяя къ предыдущимъ еще новыя уравненія, алгебраически совмѣстныя съ ними.

На предыдущихъ формулахъ основывается аналитическое представленіе геометрическихъ собраній поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Начнемъ съ предположенія, что разсматриваемое собраніе выражается совокупностью $n+1$ различныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_i\,(x_1,\, x_2, \ldots x_n,\, z,\, p_1,\, p_2, \ldots p_n) = 0 \\ i = 1,\, 2, \ldots n+1, \end{array}\right\} \qquad (21)$$

которыя представляютъ рѣшеніе равенства (16). Каждое его рѣшеніе, на основаніи сказаннаго выше, заключаетъ по меньшей мѣрѣ одну зависимость между перемѣнными z, x_1, $x_2, \ldots x_n$. *Пусть уравненія (21) разсматриваемаго собранія заключаютъ $q+1$ послѣднихъ зависимостей.* Предположимъ далѣе, что, въ нѣкоторой области измѣненія перемѣнныхъ, уравненія (21) приводятъ къ—(19)-ымъ; въ такомъ случаѣ очевидно, что остальныя уравненія (21) должны приводиться къ виду (20)-ому, и для этого функціи F_i должны удовлетворять особымъ условіямъ.

Соотвѣтственно числу зависимостей между перемѣнными x_1, $x_2, \ldots x_n$, которыя въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными считаются независимыми, мы будемъ подраздѣлять разсматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ на *классы*, относя послѣднее собраніе (21) къ *q-ому классу*, по числу q уравненій, представленныхъ формулами (19).

Такъ, напримѣръ, въ пространствѣ трехъ измѣреній мы разсматривали собранія поверхностныхъ элементовъ трехъ различныхъ классовъ: *нулевого, перваго и второго*. Къ *нулевому* классу, въ пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ является поверхность; наконецъ, къ *первому* и

второму классамъ, въ томъ же пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служатъ соотвѣтственно кривая линія или точка.

Уравненія (19)-ыя мы условимся называть *геометрическимъ мѣстомъ* даннаго собранія поверхностныхъ элементовъ.

Отсюда легко видѣть, что *собраніе поверхностныхъ элементовъ, представленное въ пространствѣ* $n+1$ *измѣреній аналитически, при помощи такого же числа уравненій, вполнѣ опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ, такъ что, при опредѣленіи такого собранія, совершенно достаточно задать его геометрическое мѣсто.*

Предположимъ далѣе, что мы имѣемъ дѣло съ собраніемъ поверхностныхъ элементовъ, представленнымъ системой $n+r+1$ различныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &F_s\,(x_1,\,x_2,\ldots x_n,\,z,\,p_1,\,p_2,\ldots p_n)=0,\\ &s=1,\,2,\ldots n+r+1,\ (r\leq n), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

которыя должны опредѣлять рѣшеніе уравненія (16)-аго. При этомъ, если $r=n$, т. е. число уравненій (22) равно $2n+1$, то очевидно, что разсматриваемое собраніе приводится всего къ одному опредѣленному поверхностному элементу, занимающему опредѣленное положеніе и направленіе въ разсматриваемомъ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Само собою разумѣется, что уравненія (22), по исключеніи всѣхъ n перемѣнныхъ $p_1,\,p_2,\ldots p_n$, даютъ, по меньшей мѣрѣ, $r+1$ зависимостей между остальными перемѣнными. Предположимъ, для общности разсужденій, что система (22) приводитъ къ $\mu+1$ $(\mu>r)$ зависимостямъ между перемѣнными $z,\,x_1,\,x_2,\ldots x_n$, которыя представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &z=\varphi\,(x_1,\,x_2,\ldots x_{n-\mu}),\\ &x_{n-\mu+i}=\varphi_i\,(x_1,\,x_2,\ldots x_{n-\mu}),\\ &i=1,\,2,\ldots\mu. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Какъ указано выше, при разсмотрѣніи рѣшеній уравненія (16)-аго, существованіе $\mu+1$ послѣднихъ уравненій влечетъ за собой существованіе также слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{\mu}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-\mu+i},\\ &k=1,\,2,\ldots n-\mu. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Поэтому система данныхъ уравненій (22) разсматриваемаго собранія *должна составляться изъ $n+1$ послѣднихъ уравненій (23)—(24), опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ μ-аго класса, и кромѣ того изъ дополнительныхъ v уравненій, опредѣляющихъ частный характеръ разсматриваемаго собранія и выдѣляющихъ его такимъ образомъ изъ общаго вида собраній μ-аго класса.*

Распространяя прежнія обозначенія на разсматриваемое пространство $n+1$ измѣреній, можемъ сказать, что совокупность уравненій (19)—(20) опредѣляетъ собраніе ∞^n поверхностныхъ элементовъ, которое выражается условнымъ символомъ

$$M_n^q,$$

гдѣ показатель n обозначаетъ порядокъ собранія, а q—классъ его геометрическаго мѣста. Такимъ же образомъ уравненія (22) опредѣляютъ собраніе ∞^{n-v} поверхностныхъ элементовъ, обозначаемое условнымъ символомъ

$$M_{n-v}^{\mu}.$$

Послѣднія условныя обозначенія вполнѣ достаточны, чтобы, при помощи ихъ, возстановить общій видъ уравненій, представляющихъ аналитически разсматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ.

6. Приведенныя опредѣленія позволяютъ составить понятіе о производныхъ уравненіяхъ С. Ли, ученіе о которыхъ представляетъ развитіе классической теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Начнемъ съ разсмотрѣнія пространства трехъ измѣреній.

Пусть уравненія, представляющія аналитическое выраженіе какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, заключаютъ нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, число которыхъ меньше числа уравненій разсматриваемаго собранія. Исключивъ изъ послѣднихъ входящія въ нихъ постоянныя величины, получаемъ между перемѣнными x, y, z, p, q новыя зависимости, которыя мы и будемъ въ послѣдующемъ изложеніи называть *производными уравненіями С. Ли.*

Если мы имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^2, геометрическое мѣсто котораго представляется уравненіемъ семейства поверхностей, зависящимъ отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, то соотвѣтствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ ничто иное какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое получается исключеніемъ обоихъ параметровъ изъ даннаго уравненія поверхности и его двухъ частныхъ производныхъ уравненій перваго порядка. Эти послѣднія дифференціальныя уравненія мы изучали

выше, въ началѣ настоящей главы, и поэтому нѣтъ надобности больше на нихъ останавливаться.

Переходимъ къ разсмотрѣнію собранія поверхностныхъ элементовъ M_2^1. Пусть уравненія его геометрическаго мѣста заключаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины a, b и представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{array}{l} z = \varphi\ (x,\ a,\ b), \\ y = \psi\ (x,\ a,\ b). \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Присоединяемъ къ послѣднимъ двумъ уравненіямъ третье равенство, которое вмѣстѣ съ предыдущими опредѣляетъ разсматриваемое собраніе

$$\varphi'\ (x,\ a,\ b) = p + \psi'\ (x,\ a,\ b)\ q. \qquad (26)$$

Предположимъ, что результатъ исключенія параметровъ a и b изъ послѣднихъ трехъ равенствъ выражается однимъ уравненіемъ, которое въ общемъ видѣ напишется слѣдующимъ образомъ

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0,$$

и представляетъ такимъ образомъ *производное уравненіе С. Ли.*

Остановимся подробнѣе на тѣхъ значеніяхъ, которыя имѣетъ функція F въ обоихъ случаяхъ, исчерпывающихъ всѣ возможныя предположенія, соотвѣтствующія условіямъ, когда уравненія геометрическаго мѣста (25) разрѣшаются относительно постоянныхъ a и b, или не разрѣшимы относительно послѣднихъ. Въ первомъ предположеніи, внося изъ равенствъ (25) полученныя значенія a, b въ уравненіе (26), мы приходимъ къ производному уравненію С. Ли, которое въ настоящемъ случаѣ является линейнымъ уравненіемъ относительно перемѣнныхъ p и q слѣдующаго вида

$$Pp + Qq = R,$$

гдѣ P, Q и R представляютъ функціи перемѣнныхъ x, y и z. Во второмъ предположеніи параметры a и b исключаются изъ уравненій (25). Такъ какъ, въ силу первоначально поставленнаго условія, результатъ исключенія a и b изъ уравненій (25)—(26) долженъ представляться однимъ уравненіемъ, то, исключивъ a и b изъ системы (25)-ой, получимъ результатъ послѣдняго исключенія въ видѣ одной зависимости между перемѣнными x, y, z слѣдующаго вида

$$F\ (x,\ y,\ z) = 0,$$

къ которой вмѣстѣ съ тѣмъ приводится въ данномъ случаѣ разсматриваемое производное уравненіе С. Ли. Такимъ образомъ семейства изслѣ-

дуемыхъ собраній M_2^1, зависящихъ отъ двухъ параметровъ, приводятъ къ производнымъ уравненіямъ С. Ли, которыя, или линейны относительно перемѣнныхъ p и q, или не зависятъ отъ нихъ.

Такъ, напримѣръ, пусть имѣемъ систему двухъ уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = bx.$$

Дополнительное уравненіе собранія поверхностныхъ элементовъ, соотвѣтствующее написанному геометрическому мѣсту, въ настоящемъ частномъ случаѣ становится

$$a = p + bq.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значенія a и b, опредѣляемыя первыми двумя уравненіями, получаемъ искомое производное уравненіе С. Ли въ слѣдующемъ видѣ

$$p + \frac{y}{x} q = \frac{xz - y}{x^2},$$

или

$$x (xp + yq) + y = xz.$$

Для второго примѣра, возьмемъ геометрическое мѣсто собранія M_2^1, представленное системой уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = (ax + b)^2 + 2x.$$

Очевидно, что соотвѣтствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ зависимость только между перемѣнными x, y, z въ слѣдующемъ видѣ

$$y = 2x + z^2.$$

Разсмотримъ, наконецъ, собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^0, уравненія геометрическаго мѣста котораго зависятъ также отъ двухъ параметровъ a и b

$$z = \varphi\ (a,\ b),$$

$$y = \psi\ (a,\ b),$$

$$x = \theta\ (a,\ b),$$

при чемъ результатъ исключенія параметровъ изъ послѣднихъ уравненій приводитъ къ одной зависимости между разсматриваемыми перемѣнными. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ, производное уравненіе С. Ли представляетъ также зависимость только между перемѣнными x, y и z.

Если бы уравненія геометрическихъ мѣстъ изслѣдуемыхъ собраній, во всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, заключали всего одинъ произвольный постоянный параметръ, то результатъ исключенія послѣдняго изъ уравненій собранія представлялъ бы систему двухъ производныхъ уравненій С. Ли.

Переходя къ собраніямъ ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, легко видѣть что представляющія его четыре уравненія могутъ зависѣть отъ трехъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ. Результатъ исключенія послѣднихъ приводитъ къ одному производному уравненію С. Ли. Если уравненія разсматриваемыхъ собраній заключаютъ два различныхъ или одинъ постоянный параметръ, то соотвѣтствующія производныя уравненія С. Ли представляютъ систему двухъ или трехъ совокупныхъ уравненій.

Наконецъ, если уравненія собранія M_0^0 заключаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины, то исключеніе ихъ приводитъ также къ одному производному уравненію С. Ли. Если число произвольныхъ постоянныхъ, въ уравненіяхъ разсматриваемаго собранія, меньше четырехъ, то результатъ ихъ исключенія изъ уравненій собранія приводитъ къ системѣ совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ $n+1$ измѣреній. Пусть имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_n^q, которое опредѣляется вполнѣ своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ, что уравненія его заключаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}$ и представляются слѣдующимъ образомъ

$$z=\varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}),$$

$$x_{n-q+i}=\varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}),$$

$$i=1, 2, \ldots q.$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, которыя, совмѣстно съ послѣдними равенствами, выражаютъ аналитически разсматриваемое собраніе и имѣютъ, стало-быть, слѣдующій видъ

$$p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\,p_{n-q+i},$$

$$k=1, 2, \ldots n-q.$$

Написанныя равенства вмѣстѣ съ $q+1$ предыдущими образуютъ систему $n+1$ уравненій. Предположимъ, что результатъ исключенія изъ нихъ

всѣхъ параметровъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}$ представляется совокупностью m уравненій слѣдующаго вида

$$F_i\,(x_1,\, x_2, \ldots x_n,\, z,\, p_1,\, p_2, \ldots p_n) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots m.$$

Полученныя такимъ образомъ уравненія, черезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ параметровъ изъ функціональныхъ уравненій, опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, представляютъ *производныя* уравненія С. Ли.

Легко видѣть, что уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи классической теоріи представляютъ частный случай послѣднихъ производныхъ уравненій, соотвѣтствующій тому предположенію, что геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія, принадлежитъ къ *нулевому* классу, т. е. представляетъ уравненіе семейства поверхностей въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, зависящее отъ $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Мы разсматривали до сихъ поръ собранія поверхностныхъ элементовъ типа M_n^q, опредѣляемыхъ своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ теперь, что мы имѣемъ дѣло съ собраніями вида M_{n-v}^{μ}, гдѣ $v \leq n$, при чемъ уравненія, опредѣляющія аналитически послѣднее собраніе, зависятъ отъ нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, число которыхъ должно удовлетворять единственному условію, быть меньше числа данныхъ уравненій разсматриваемаго собранія. Результатъ исключенія послѣднихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, изъ уравненій разсматриваемаго собранія, представляетъ также *производныя уравненія С. Ли.*

Пусть имѣемъ, напримѣръ, слѣдующее геометрическое мѣсто собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ $C_1,\, C_2,\, C_3$.

$$z = (C_1\, x_1 + C_2)\, x_2 + C_3,$$
$$x_3 = C_1\, x_1\, x_2 + C_2.$$

Составляемъ слѣдующія два дополнительныя уравненія разсматриваемаго собранія

$$p_1 = C_1\, x_2 - C_1\, x_2\, p_3,$$
$$p_2 = C_1\, x_1 + C_2 - C_1\, x_1\, p_3.$$

Результатъ исключенія всѣхъ трехъ постоянныхъ величинъ $C_1,\, C_2,\, C_3$ изъ написанныхъ четырехъ уравненій приводитъ къ слѣдующему производному уравненію С. Ли

$$(1-p_3)\,(x_2\, x_3 + x_1\, p_1 - x_2\, p_2) = x_1\, x_2\, p_1.$$

Для второго примѣра, возьмемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3, C_4, опредѣляемое геометрическимъ мѣстомъ

$$z = (C_1\, x_1 + C_2)\, x_2 + C_4,$$

$$x_3 = C_2\, x_1 + C_3$$

и слѣдующимъ дополнительнымъ равенствомъ

$$C_1\, C_2\, (x_2 + x_1\, p_3)^2 = C_4\, x_3.$$

Составляя оба дополнительныя уравненія собранія

$$p_1 = C_1\, x_2 - C_2\, p_3,$$

$$p_2 = C_1\, x_1 + C_2,$$

получаемъ въ результатѣ совокупность пяти уравненій. Исключая изъ нихъ всѣ четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра, приходимъ къ искомому производному уравненію С. Ли

$$x_3\, (z - x_2\, p_2) + (x_1\, p_1 - x_2\, p_2)\, (p_1 + p_2\, p_3) = 0.$$

7. Мы занимались до сихъ поръ изученіемъ понятій о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, разсматривали ихъ аналитическія выраженія и составляли производныя уравненія С. Ли, соотвѣтствующія семействамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, уравненія которыхъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Подобно тому какъ относительно дифференціальныхъ уравненій рѣшается задача объ ихъ интегрированіи, такъ совершенно аналогично въ теоріи С. Ли, изслѣдуемой на этихъ страницахъ, рѣшается слѣдующій вопросъ:

Даны производныя уравненія С. Ли: задача состоитъ въ составленіи соотвѣтствующихъ имъ функціональныхъ уравненій собраній поверхностныхъ элементовъ.

Пользуясь терминологіей теоріи дифференціальныхъ уравненій, мы называемъ рѣшеніе послѣдняго вопроса *задачей интегрированія производныхъ уравненій С. Ли.*

Начнемъ съ разсмотрѣнія производнаго уравненія С. Ли.

$$F\,(x,\, y,\, z,\, p,\, q) = 0, \tag{27}$$

опредѣляющаго систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ трехъ измѣреній.

Если послѣднее уравненіе утождествляется, въ силу уравненій какого либо собранія элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* (Integralgebilde) даннаго производнаго уравненія С. Ли (27)-го.

Если послѣднее рѣшеніе заключаетъ произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ этихъ уравненій представляетъ одно данное уравненіе (27), то мы будемъ называть такое рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ* уравненія (27)-го.

Изъ предыдущихъ соображеній, относительно способа образованія производныхъ уравненій С. Ли, становится очевиднымъ, что полныя интегральныя собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ уравненія (27) должны зависѣть отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ; полныя интегральныя собранія ∞^1 элементовъ уравненій (27) заключаютъ три произвольныхъ постоянныхъ параметра; наконецъ, для того же уравненія (27) полное интегральное собраніе типа M_0^0 должно заключать четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра. Изъ послѣднихъ полныхъ интегральныхъ собраній всѣ собранія типа M_2, т. е. составленныя изъ ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, мы условимся называть *полными интегральными собраніями С. Ли*, а ихъ геометрическія мѣста—*полными интегралами С. Ли* производнаго уравненія (27). Остальныя полныя интегральныя собранія типовъ M_1 и M_0, т. е. составленныя соотвѣтственно изъ ∞^1 и ∞^0 поверхностныхъ элементовъ, будемъ называть *полными интегральными собраніями Беклунда,* который первый сталъ заниматься ихъ изслѣдованіемъ [1]).

Порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ трехъ разсматриваемыхъ типовъ полныхъ интегральныхъ собраній выражается соотвѣтственно числами

$$2,\ 1,\ 0;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ произвольныя постоянныя входятъ въ нихъ соотвѣтственно въ числѣ

$$2,\ 3,\ 4.$$

Слѣдовательно, уравненія разсматриваемыхъ собраній зависятъ соотвѣтственно отъ

$$7,\ 8,\ 9$$

---

[1]) *Bäcklund*, A. V.—Ueber systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen. Bd. 11. S. 412—433).

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig. 1900. S. 598.

различныхъ величинъ, изъ которыхъ первыя пять являются перемѣнными x, y, z, p, q, а остальныя представляютъ произвольные постоянные параметры.

Поэтому, по отношенію къ данному производному уравненію (27), каждое изъ указанныхъ его полныхъ интегральныхъ собраній всѣхъ типовъ M_2, M_1, M_0 опредѣляетъ ∞^4 значеній всѣхъ входящихъ въ нихъ величинъ какъ перемѣнныхъ такъ и произвольныхъ постоянныхъ, разсматриваемыхъ совмѣстно. Такимъ образомъ задача розысканія указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній даннаго производнаго уравненія (27) приводится, по терминологіи С. Ли, къ *составленію изъ системы ∞^4 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемой равенствомъ (27)-ымъ, собраній элементовъ, представляющихъ ∞^4 значеній перемѣнныхъ и произвольныхъ постоянныхъ величинъ.*

Кромѣ понятій о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ легко составить также понятія объ *общихъ и особенныхъ рѣшеніяхъ*, или *интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли*, аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ послѣднія рѣшенія, измѣняя произвольныя постоянныя въ полныхъ интегральныхъ собраніяхъ, совершенно подобно классической теоріи уравненій съ частными производными [1]).

Пусть имѣемъ, напримѣръ, полное интегральное собраніе изслѣдуемаго уравненія (27) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\,(x,\ a,\ b), \\ y &= \psi\,(x,\ a,\ b), \\ p &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,q. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Предполагаемъ, что параметры a и b измѣняются одновременно съ перемѣнными x, y, z. Дифференцируя въ этомъ предположеніи первыя два уравненія (28), получимъ

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\,db,$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial a}\,da + \frac{\partial\psi}{\partial b}\,db.$$

---

[1]) См. *Lie—Scheffers*.—Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig. 1896. S.S. 529—535.

Goursat, E.— Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891. p. 234.

На основаніи послѣднихъ равенствъ, принимая во вниманіе третье уравненіе (28), составляемъ равенство

$$dz - pdx - qdy = Ada + Bdb, \tag{29}$$

гдѣ коэффиціенты A и B имѣютъ слѣдующія значенія

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a} q,$$

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b} q.$$

Чтобы система (28) не переставала представлять рѣшеніе изслѣдуемаго уравненія (27)-ого также и въ настоящемъ предположеніи, т. е. имѣло мѣсто равенство (6)-ое, для этого очевидно должна уничтожаться тождественно вторая часть равенства (29) и должно имѣть мѣсто равенство

$$Ada + Bdb = 0. \tag{30}$$

Послѣднее имѣетъ три слѣдующихъ различныхъ рѣшенія, которымъ соотвѣтствуютъ также различныя *рѣшенія* изслѣдуемаго уравненія (27)-ого:

1) Полагая

$$da = 0, \ db = 0,$$

т. е. давая a и b постоянныя значенія, мы получаемъ исходное *полное интегральное собраніе,* представленное системой уравненій (28).

2) Предполагая, что имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$A = 0, \ B = 0,$$

мы представляемъ рѣшеніе уравненія (27)-ого совокупностью равенствъ (28) и двухъ слѣдующихъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a} q = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b} q = 0.$$

Результатъ исключенія изъ нихъ параметровъ a и b представляетъ *особенное интегральное собраніе* производнаго уравненія (27).

3) Наконецъ, если a и b связаны произвольной зависимостью

$$a = \omega\ (b), \tag{31}$$

гдѣ ω представляетъ произвольную функцію, то уравненіе (30) удовлетворяется, на основаніи слѣдующаго равенства

$$A + B\,\omega'(b) = 0,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\omega' - \left(\frac{\partial\psi}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial b}\omega'\right) q = 0, \qquad (32)$$

гдѣ ω' обозначаетъ производную функцію ω, взятую по перемѣнной b. Результатъ исключенія параметровъ a и b изъ совокупности уравненій (28), (31), (32) представляетъ, относительно производного уравненія (27), *общее интегральное собраніе*, зависящее отъ одной произвольной функціи ω.

Интегральныя собранія трехъ указанныхъ родовъ получаются изъ каждаго полнаго интегральнаго собранія всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами типовъ.

Наконецъ, давая какія-либо частныя значенія произвольнымъ постояннымъ или произвольнымъ функціямъ, входящимъ въ полныя или общія интегральныя собранія, мы получаемъ еще такъ называемыя *частныя интегральныя собранія* даннаго производнаго уравненія (27).

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій въ пространствѣ $n+1$ измѣреній. Пусть имѣемъ одно производное уравненіе С. Ли

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \qquad (33)$$

опредѣляющее систему ∞^{2n} поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Если уравненіе (33) утождествляется, на основаніи уравненій какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* даннаго производнаго уравненія С. Ли.

Рѣшеніе уравненія (33), зависящее отъ нѣсколькихъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ къ одному только данному производному уравненію С. Ли (33), называется его *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Такъ какъ наименьшее число различныхъ уравненій, представляющихъ собраніе элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, равно $n+1$, то становится очевиднымъ, что число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ полнаго интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія (33) не можетъ быть меньше числа n. При этомъ мы будемъ различать два случая, когда послѣднее число равно n и больше него.

Если число произвольныхъ постоянныхъ величинъ полнаго рѣшенія уравненія (33) равняется n, то мы условимся называть послѣднее рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ С. Ли* даннаго производнаго

уравненія (33); если же число произвольныхъ постоянныхъ величинъ больше n, то разсматриваемое рѣшеніе будемъ называть *полнымъ интегральнымъ собраніемъ Беклунда.*

Наконецъ, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, полное интегральное собраніе С. Ли вполнѣ опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Мы условимся называть послѣднее *полнымъ интеграломъ С. Ли* даннаго производнаго уравненія (33) и различать эти полные интегралы по классамъ, соотвѣтственно классу представляемаго ими геометрическаго мѣста интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія.

Само собою разумѣется, что полный интегралъ С. Ли нулевого класса представляетъ ничто иное какъ полный интегралъ Лагранжа, по отношенію къ данному уравненію (33), разсматриваемому какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p_1, $p_2, \dots p_n$ неизвѣстной функціи z соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x_1, $x_2, \dots x_n$. Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется очевидно даннымъ полнымъ интеграломъ Лагранжа и его n производными дифференціальными уравненіями перваго порядка, составленными по правиламъ дифференціальнаго исчисленія.

Наконецъ, приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ систему m послѣднихъ уравненій

$$\left. \begin{array}{c} F_\varkappa (x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) = 0 , \\ \varkappa = 1, 2, \dots m . \end{array} \right\} \qquad (34)$$

Уравненія собранія поверхностныхъ элементовъ, утождествляющія данныя производныя уравненія (34), называются ихъ *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ.*

Рѣшеніе системы данныхъ уравненій (34), заключающее нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ только къ данной системѣ (34), называется ея *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ.*

Наименьшее число различныхъ уравненій собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній равно послѣднему числу $n+1$. Поэтому, если уравненія (34) сами по себѣ образуютъ систему совокупныхъ уравненій, то наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ ихъ полнаго интегральнаго собранія должно равняться $n-m+1$. Если же уравненія (34) не представляютъ системы совокупныхъ уравненій, т. е. не совмѣстимы и не имѣютъ рѣшенія, но однако приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій при-

бавленіемъ нѣкотораго числа k новыхъ производныхъ уравненій С. Ли, то въ такомъ случаѣ наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ полнаго интегральнаго собранія равно $n-m-k+1$.

Въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ указанныя полныя интегральныя собранія принадлежатъ одному и тому же типу собраній элементовъ

$$M_n,$$

которыя мы будемъ называть *полными интегральными собраніями* С. Ли. Каждое изъ нихъ вполнѣ опредѣляется уравненіями своего геометрическаго мѣста; послѣднее мы условимся называть *полнымъ интеграломъ С. Ли* данныхъ производныхъ уравненій.

Что касается всѣхъ остальныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, въ которыхъ число произвольныхъ постоянныхъ больше указаннаго выше минимальнаго, то мы будемъ называть ихъ *полными интегральными собраніями Беклунда*. Если изслѣдуемыя уравненія (34) совмѣстны, то послѣднія полныя рѣшенія зависятъ отъ $n-m+r+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ и представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ вида

$$M_{n-r}, \tag{35}$$

гдѣ число r получаетъ любое изъ значеній въ слѣдующихъ предѣлахъ

$$0 < r \leq n,$$

т. е. полныя рѣшенія Беклунда системы (34) выражаются системой $n+r+1$ различныхъ уравненій.

Если же уравненія (34) приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій прибавленіемъ k различныхъ новыхъ производныхъ уравненій, то и въ этомъ случаѣ *полныя интегральныя собранія Беклунда* представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ прежняго вида (35), уравненія которыхъ однако, въ настоящемъ случаѣ, зависятъ отъ $n-m-k+r+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Наконецъ, понятія объ особенныхъ, общихъ и частныхъ интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли легко распространяются на пространство $n+1$ измѣреній [1]).

Пусть имѣемъ, напримѣръ, полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса для уравненій (34), разсматриваемыхъ какъ система совокупныхъ, совмѣстныхъ производныхъ уравненій.

---

[1]) См. *Goursat*, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891. p. 231.

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\,(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m+1}),\\ x_{n-q+i} &= \varphi_i\,(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m+1}),\\ p_k &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\, p_{n-q+i},\\ & i = 1, 2, \ldots q, \quad k = 1, 2, \ldots n-q. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Дифференцируя первыя $q+1$ уравненій послѣдней системы въ предположеніи, что вмѣстѣ съ перемѣнными $z,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n$ измѣняются также величины $C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m+1}$, получаемъ

$$dz = \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\, dx_k + \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\partial\varphi}{\partial C_r}\, dC_r,$$

$$dx_{n-q+i} = \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\, dx_k + \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\partial\varphi_i}{\partial C_r}\, dC_r,$$

$$i = 1, 2, \ldots q.$$

На основаніи этихъ равенствъ и въ силу $n-q$ послѣднихъ уравненій системы (36), составляемъ новое равенство

$$dz - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k = \sum_{r=1}^{n-m+1} A_r\, dC_r, \tag{37}$$

гдѣ коэффиціенты A_r имѣютъ слѣдующія значенія

$$A_r = \frac{\partial\varphi}{\partial C_r} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial C_r}\, p_{n-q+i}.$$

Чтобы, при сдѣланномъ предположеніи относительно измѣняемости произвольныхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m+1}$, уравненія (36) не переставали представлять рѣшеніе уравненій (34), для этого должно удовлетворяться условіе (16)-ое. Поэтому равенство (37) приводится къ слѣдующему

$$\sum_{r=1}^{n-m+1} A_r\, dC_r = 0, \tag{38}$$

которому должны удовлетворять величины всѣхъ C.

Послѣднее уравненіе можетъ быть удовлетворено слѣдующими различными способами:

1) Равенство (38) удовлетворяется тождественно, если предположить, что всѣ величины C имѣютъ постоянныя значенія. Въ этомъ случаѣ мы возвращаемся къ исходному полному интегральному собранію.

2) Полагая равными нулю всѣ коэффиціенты A_r при dC_r въ равенствѣ (38), мы получаемъ систему $n-m+1$ уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_r}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial C_r}p_{n-q+i}=0,$$
$$r=1,\,2,\ldots n-m+1.$$

Результатъ исключенія всѣхъ C_r изъ уравненій (36), при помощи послѣднихъ равенствъ, представляетъ *особенное интегральное собраніе* системы производныхъ уравненій (34).

3) Предположимъ далѣе, что между $C_1,\ C_2,\ldots C_{n-m+1}$ существуетъ l произвольныхъ зависимостей слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned}C_i=\omega_i\,(C_{l+1},\ C_{l+2},\ldots C_{n-m+1}),\\ i=1,\,2,\ldots l,\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

гдѣ всѣ ω_i представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ. Внося значенія всѣхъ C_i въ равенство (38), получаемъ новое равенство

$$\sum_{j=1}^{n-m-l+1}\left(A_{l+j}+\sum_{i=1}^{l}A_i\frac{\partial\omega_i}{\partial C_{l+j}}\right)dC_{l+j}=0,$$

которое уничтожается на основаніи слѣдующихъ зависимостей

$$\left.\begin{aligned}A_{l+j}+\sum_{i=1}^{l}A_i\frac{\partial\omega_i}{\partial C_{l+j}}=0.\\ j=1,\,2,\ldots n-m-l+1.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Результатъ исключенія, изъ уравненій (36), значеній всѣхъ $n-m+1$ величинъ $C_1,\ C_2,\ldots C_{n-m+1}$, при помощи $n-m+1$ уравненій (39)—(40), представляетъ *общее интегральное собраніе* системы (34), заключающее l произвольныхъ функцій.

Наконецъ, мы называемъ *частными рѣшеніями*, или *частными интегральными собраніями* данной системы (34) рѣшенія ея, которыя получаются изъ полныхъ или общихъ интегральныхъ собраній, сообще-

ніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ параметрамъ и произвольнымъ функціямъ, которые входятъ въ эти собранія.

8. Изъ предыдущихъ разсужденій непосредственно вытекаетъ, что каждое уравненіе или систему уравненій, съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ перемѣннымъ, возможно разсматривать также и съ другой точки зрѣнія, какъ производныя уравненія С. Ли, происхожденіе которыхъ основано на разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ.

Обобщенныя представленія С. Ли о производныхъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніяхъ, какъ это представляется съ перваго взгляда, расширяютъ, съ формальной точки зрѣнія, предѣлы классической теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Дѣйствительно, въ изложенной выше теоріи собраній поверхностныхъ элементовъ, представленія объ уравненіяхъ съ частными производными и объ ихъ интегралахъ являются только въ видѣ одного частнаго случая. Въ самомъ дѣлѣ, останавливаясь на собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ нулевого класса, происходящихъ изъ нихъ производныхъ уравненіяхъ С. Ли и ихъ интегральныхъ собраніяхъ, мы получаемъ классическую теорію дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которая представляетъ такимъ образомъ частный случай теоріи С. Ли.

Однако разсматривая одни и тѣ же уравненія, то съ точки зрѣнія дифференціальныхъ уравненій, то съ точки зрѣнія производныхъ уравненій С. Ли, мы вмѣстѣ съ тѣмъ должны видоизмѣнять соотвѣтственно каждый разъ и самый характеръ изслѣдуемыхъ уравненій, которыя сохраняютъ одинъ только внѣшній видъ, благодаря сохраненію обозначеній входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, смыслъ разсматриваемыхъ уравненій становится совершенно различный. С. Ли вводитъ цѣлый рядъ новыхъ рѣшеній изслѣдуемыхъ уравненій, которыя до него не разсматривались, при чемъ каждому классу новыхъ рѣшеній соотвѣтствуютъ также и новыя дополнительныя предположенія относительно входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ. Такъ, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, перемѣнныя $x_1, x_2, \dots x_n$ считаются независимыми; что же касается рѣшеній С. Ли q-аго класса, то они вводятъ q различныхъ зависимостей между тѣми же перемѣнными $x_1, x_2, \dots x_n$. Такимъ образомъ перемѣнныя, которыя считались независимыми въ классической теоріи, перестаютъ быть таковыми въ теоріи С. Ли. Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, и перемѣнные параметры $p_1, p_2, \dots p_n$ измѣняютъ свое первоначальное значеніе частныхъ производныхъ, въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Всѣ послѣднія обстоятельства пріобрѣтаютъ особенное значеніе, съ точки зрѣнія приложеній къ различнымъ вопросамъ анализа и геометріи. Само собою разумѣется, что рѣшенія С. Ли не могутъ давать искомаго отвѣта для тѣхъ задачъ, которыя приводятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными. Съ другой стороны могутъ существовать также такіе прикладные вопросы, которые требуютъ, для своего рѣшенія, разсмотрѣнія производныхъ уравненій С. Ли или разрѣшаются, какъ при помощи интеграловъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, такъ и на основаніи интегральныхъ собраній производныхъ уравненій С. Ли. Въ виду изложенныхъ соображеній, мы считаемъ необходимымъ дѣлать существенное различіе между дифференціальными уравненіями классической теоріи, производными уравненіями С. Ли и между ихъ рѣшеніями различныхъ классовъ. Поэтому намъ кажется необходимымъ возражать и быть противъ изложенія нѣкоторыхъ трактатовъ по теоріи дифференціальныхъ уравненій, которыя смѣшиваютъ рѣшенія различныхъ классовъ. Такъ, напримѣръ, при изложеніи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, по такъ называемому способу характеристикъ Коши, многіе авторы [1]) удовлетворяются указаніями на полные интегралы С. Ли въ тѣхъ случаяхъ исключенія, когда излагаемый способъ Коши не приводитъ къ искомымъ полнымъ интеграламъ Лагранжа. Читатель не можетъ быть удовлетворенъ такимъ изложеніемъ, такъ какъ упомянутые авторы не даютъ отвѣта на поставленный вопросъ во всей полнотѣ и предлагаютъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ удовлетворяться совершенно случайно полученными новыми рѣшеніями, которыя, какъ ясно видно, представляютъ существенное различіе съ первоначально поставленной задачей интегрированія. Совершенно аналогичнымъ образомъ насъ не удовлетворяетъ также интегрированіе производныхъ уравненій С. Ли, по такъ называемому обобщенному имъ способу характеристикъ Коши, который не даетъ возможности вычислять полные интегралы С. Ли заданнаго напередъ опредѣленнаго класса, но приводитъ совершенно непредвидѣннымъ образомъ, или къ нѣкоторому полному интегралу С. Ли какого-либо случайнаго класса, или даже къ полному интегралу Лагранжа. Такимъ образомъ разсматриваемый способъ С. Ли оставляетъ полную неопредѣленность въ рѣшеніи изслѣдуемой задачи. совершенно аналогично указанному выше способу Коши.

Всѣ отмѣченные вопросы теоріи характеристикъ находятся въ связи съ дальнѣйшимъ развитіемъ нашего изслѣдованія. и мы будемъ имѣть

---

[1]) *Jordan*, C.—Cours d' Analyse, t. III. Paris, 1887, p. 325.

Goursat, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891. p. 119, p. 228.

случай къ нимъ далѣе возвратиться. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли различныхъ классовъ, то задача ихъ разысканія зависитъ главнымъ образомъ отъ условій ихъ существованія для производныхъ уравненій С. Ли.

Если возьмемъ одно производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ трехъ измѣреній, то, какъ видно изъ предыдущаго изложенія (см. стр. 21—22), разсматриваемое уравненіе допускаетъ полныя интегральныя собранія M^1_2, M^0_2 только при условіи, что оно является линейнымъ относительно перемѣнныхъ p, q или не зависитъ отъ послѣднихъ, т. е. представляетъ функціональную зависимость между перемѣнными x, y, z. Изъ дальнѣйшаго изложенія будетъ слѣдовать, что и другія производныя уравненія С. Ли должны также представлять весьма частный видъ, для того чтобы допускать существованіе полныхъ интеграловъ С. Ли того или другого опредѣленнаго даннаго класса. Однако доказательство послѣдняго предложенія находится въ зависимости отъ общихъ свойствъ интегральныхъ собраній, къ изученію которыхъ мы и имѣемъ въ виду немедленно приступить. Наконецъ, въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы ограничимся разсмотрѣніемъ только полныхъ интеграловъ С. Ли его производныхъ уравненій, въ виду того что теорія ихъ находится въ тѣсной связи съ задачей интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

ГЛАВА II.

Свойства полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

1. Пусть имѣемъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній производное уравненіе С. Ли слѣдующаго вида

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n; z, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0. \tag{1}$$

Предположимъ, что данное уравненіе разрѣшимо относительно перемѣнной p_1, такъ что имѣетъ мѣсто условіе

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0. \tag{2}$$

Пусть разсматриваемое уравненіе (1) допускаетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} & z - \varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\ & x_{n-q+i} - \varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\ & i = 1, 2, \ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ послѣдними, полное интегральное собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній и представляющіяся въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$$k = 1, 2, \ldots n-q.$$

Введемъ слѣдующее условное обозначеніе

$$\varphi_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$$k = 1, 2, \ldots n-q,$$



Томъ IX, № 2.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

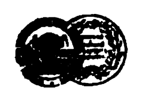
Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 3.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 3.




ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильберберг и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1905.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

такъ что послѣднія $n-q$ уравненій разсматриваемаго полнаго интегральнаго собранія становятся

$$\left.\begin{array}{c} p_\kappa - \psi_\kappa = 0, \\ \kappa = 1, 2, \ldots n-q, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ функціи ψ_κ линейны относительно перемѣнныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n$ и зависятъ кромѣ того только отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{n-q}$.

Изученіе свойствъ полныхъ интеграловъ С. Ли мы начнемъ съ разсмотрѣнія собраній нулевого класса, т. е. приведемъ основныя свойства полныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій. Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) разсматривается какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, и совокупность соотвѣтствующихъ уравненій (3) — (4) становится

$$\left.\begin{array}{c} z = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_n, C_1, C_2, \ldots C_n), \\ p_\kappa = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\kappa}, \\ \kappa = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Чтобы, въ этомъ случаѣ, первое изъ уравненій (5) представляло дѣйствительно полный интегралъ даннаго уравненія (1), т. е. результатъ исключенія всѣхъ C изъ уравненій (5) представлялъ бы уравненіе (1), для этого, какъ хорошо извѣстно, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}{C_1, C_2, C_3 \ldots C_n}\right) \gtrless 0.$$

Легко видѣть, что, на основаніи послѣдняго неравенства, въ опредѣленной разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ величинъ, система уравненій (5) приводится къ слѣдующему виду

$$\begin{array}{c} F\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ F_s\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = C_s, \\ s = 1, 2, \ldots n. \end{array}$$

Такъ какъ опредѣляемыя послѣдними уравненіями значенія перемѣннаго z, $p_1, p_2 \ldots p_n$ выражаются равенствами (5), т. е. $p_1, p_2, \ldots p_n$ являются частными производными перваго порядка функціи z соотвѣт-

ственно по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, то послѣднія $n+1$ уравненій образуютъ *замкнутую систему*, т. е., *на основаніи перваго изъ этихъ уравненій, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства*

$$[F_i, F_\kappa] = 0,$$

лѣвыя части которыхъ обозначаютъ скобки Вейлера [1]), *составленныя для всѣхъ значеній показателей i, κ, отъ 0 до n, при чемъ подъ F_0 разумѣется функція F.*

Какъ извѣстно изъ курсовъ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій, имѣетъ мѣсто также слѣдующее обратное предложеніе:

Пусть имѣемъ совокупность n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами $C_1, C_2, \ldots C_n$,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (1)-ымъ, замкнутую систему $n+1$ дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, а также опредѣляетъ значеніе перемѣнной z, функціей перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ и всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, $C_2, \ldots C_n$, то послѣднее значеніе z представляетъ полный интегралъ даннаго уравненія (1)-аго.

Наконецъ, пусть полный интегралъ Лагранжа (5) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, C_1, C_n, \ldots C_{n-1}) + C_n, \tag{6}$$

гдѣ одна изъ произвольныхъ постоянныхъ, именно C_n, является такъ называемой придаточной. Если слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \ldots \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}}{C_1, C_2, \ldots C_{n-1}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, то послѣднія $n-1$ производныхъ уравненій слѣдующей системы

$$\left. \begin{array}{c} p_\kappa = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}, \\ \kappa = 1, 2, \ldots n, \end{array} \right\} \tag{7}$$

---

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, стр. 39.

разрѣшимы относительно постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$. Въ такомъ случаѣ результатъ ихъ исключенія изъ перваго производнаго уравненія послѣдней системы представляетъ наше дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое очевидно не зависитъ отъ перемѣнной z и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$F\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = 0. \tag{8}$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, совокупность уравненій (6) и (7) приводится, внутри разсматриваемой области измѣненія перемѣнныхъ, къ системѣ, представляющей совокупность уравненія (8) и слѣдующихъ

$$F_s\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = C_s,$$

$$s = 1,\ 2, \ldots n-1,$$

$$z - F_n\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = C_n.$$

Предыдущее обратное предложеніе замѣняется, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующимъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произвольными постоянными величинами $C_1,\ C_2, \ldots C_{n-1}$,

$$\Phi_s\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-1}) = 0,$$

$$s = 1,\ 2, \ldots n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совмѣстно съ уравненіемъ (8), замкнутую систему п дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1,\ p_2, \ldots p_n$, то полный интегралъ даннаго уравненія (8) опредѣляется при помощи квадратуры.

2. Всѣ приведенныя предложенія, характеризующія полныя интегральныя собранія С. Ли нулевого класса распространяются также на всѣ полныя интегральныя собранія С. Ли, общій видъ которыхъ представляется совокупностью равенствъ (3) и (4).

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы послѣднія уравненія дѣйствительно представляли полное интегральное собраніе производнаго уравненія С. Ли (1), результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2, \ldots C_n$, изъ уравненій (3) и (4), долженъ приводиться къ одному только уравненію (1). Для этого очевидно достаточно существованія слѣдующаго условія

$$D\left(\frac{\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_q,\ \psi_2,\ \psi_3, \ldots \psi_{n-q}}{C_1,\ C_2, \ldots C_{q+1},\ C_{q+2}, \ldots C_n}\right) \gtrless 0.$$

Дѣйствительно, если послѣднее неравенство имѣетъ мѣсто, то уравненія (3) и послѣднія $n-q-1$ уравненій (4) разрѣшимы относительно всѣхъ величинъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, и результатъ ихъ исключенія, изъ перваго уравненія (4), приводится къ равенству, равносильному исходному уравненію (1). Поэтому, въ опредѣленной разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, система уравненій (3)—(4) приводится къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) &= 0, \\ F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) &= C_s, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$
$$s = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ послѣднія n уравненій представляютъ результатъ рѣшенія указанныхъ выше уравненій относительно всѣхъ постоянныхъ C.

Чтобы приступить къ изученію свойствъ послѣднихъ уравненій, начнемъ съ распространенія понятій объ *инволюціи* и *замкнутости* производныхъ уравненій С. Ли. Аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, мы условимся называть, также въ теоріи производныхъ уравненій С. Ли, величины

$$x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$$

каноническими перемѣнными, относя n первыя изъ нихъ къ *первому классу*, а остальныя n величинъ ко *второму классу каноническихъ перемѣнныхъ*. Составляя скобки Пуассона для двухъ функцій, зависящихъ отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, или скобки Вейлера, если разсматриваемыя функціи заключаютъ еще новую $2n+1$-ую перемѣнную z, мы говоримъ, что эти функціи находятся въ *инволюціи*, если указанныя скобки уничтожаются тождественно. Наконецъ, мы говоримъ, что данныя уравненія образуютъ *систему въ инволюціи* или *замкнутую систему* въ зависимости отъ того, уничтожаются-ли тождественно скобки Пуассона и Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей данныхъ уравненій, или эти скобки уничтожаются, на основаніи послѣднихъ уравненій.

Наконецъ, само собою разумѣется, если какая-либо данная система производныхъ уравненій С. Ли-*замкнутая*, то и преобразованныя ея уравненія образуютъ также *замкнутую* систему.

Условившись въ предыдущихъ опредѣленіяхъ, докажемъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ замкнутую систему.

Разсматривая всѣ величины φ_k, какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n$, замѣтимъ прежде всего, что существуютъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial\psi_j}{\partial x_k},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей k и j, отъ 1 до $n-q$, и показателей i, отъ 1 до q.

Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (3) и (4), имѣютъ слѣдующія значенія

$$[z-\varphi,\ x_{n-q+i}-\varphi_i] \equiv 0,$$

$$\left[z-\varphi,\ p_k-\psi_k\right] \equiv -p_k + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} +$$

$$+\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\psi_k}{\partial p_{n-q+i}} p_{n-q+i} = 0,$$

$$\left[x_{n-q+i}-\varphi_i,\ p-\psi_k\right] \equiv \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\psi_k}{\partial p_{n-q+i}} \equiv 0,$$

$$\left[p_j-\psi_j,\ p_k-\psi_k\right] \equiv -\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi_j}{\partial x_k} \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній, которыя должны принимать показатели i, k и j; при этомъ разсматриваемыя равенства первой, третьей и четвертой строкъ удовлетворяются тождественно, тогда какъ равенство второй строки удовлетворяется на основаніи уравненій (4).

Полученныя равенства доказываютъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ *замкнутую систему*. Слѣдовательно, уравненія (9), представляющія преобразованіе послѣднихъ, также образуютъ *замкнутую систему*.

Кромѣ того очевидно, что уравненія (9) заключаютъ $q+1$ зависимостей только между перемѣнными z, x_1, $x_2, \ldots x_n$, такъ какъ разсматриваемое интегральное собраніе принадлежитъ къ q-ому классу.

Легко показать, что *оба послѣднія свойства вполнѣ опредѣляютъ аналитически уравненія, представляющія полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса даннаго уравненія (1).*

Дѣйствительно, пусть имѣемъ n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами C_1, $C_2, \ldots C_n$,

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_s\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\ s=1, 2, \ldots n,\end{array}\right\} \quad (10)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ C и, съ другой стороны, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (1), опредѣляютъ z и q перемѣнныхъ, изъ числа $x_1, x_2, \ldots x_n$, функціями остальныхъ $n-q$ изъ этихъ перемѣнныхъ и произвольныхъ постоянныхъ.

Если кромѣ того наши $n+1$ уравненій (1) и (10) образуютъ замкнутую систему, то, въ такомъ случаѣ, легко доказать, что они представляютъ полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно убѣдиться прежде всего, что разсматриваемыя уравненія должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} z-\varphi'(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_n)=0,\\ x_{n-q+i}-\varphi_i'(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_n)=0,\\ p_k-\psi_k'(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_n)=0,\\ i=1,2,\ldots q,\quad k=1,2,\ldots n-q, \end{aligned}\right\} (11)$$

т. е. разрѣшаются относительно перемѣнныхъ x и p съ различными значками [1]). Для доказательства послѣдняго предложенія сдѣлаемъ противоположное допущеніе, а именно, что k-ое изъ $n-q$ послѣднихъ уравненій разрѣшается относительно перемѣнной p_{n-q+i} и приводится къ слѣдующему виду

$$p_{n-q+i}-\psi'(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, \ldots p_{n-q+i-1}, p_{n-q+i+1}, \ldots p_n)=0,$$

т. е. не должно зависѣть ни отъ одной изъ перемѣнныхъ p_k, такъ какъ онѣ исключаются, согласно съ послѣднимъ сдѣланнымъ предположеніемъ. Вычисляя слѣдующія скобки Вейлера

$$[x_{n-q+i}-\varphi_i', p_{n-q+i}-\psi'],$$

видимъ, что онѣ обращаются тождественно въ единицу. Но по первоначально поставленному условію, относительно замкнутости системы данныхъ уравненій (1) и (10), необходимо, чтобы послѣднія скобки, или уничтожались, на основаніи послѣднихъ уравненій, или обращались тождественно въ нуль. Такимъ образомъ сдѣланное предположеніе, относительно разрѣшимости системы уравненій (1) и (10), приводитъ къ заключенію, противорѣчащему дѣйствительности, что и убѣждаетъ насъ въ справедливости первоначально сдѣланнаго допущенія относительно того, что разсматриваемая нами совокупность уравненій (1) и (10) приводится къ виду (11).

---

[1]) *S. Lie*. Mathematische Annalen. Bd. XI, S. 277.
S. Lie u. Engel.—Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt S. 94.

Само собою разумѣется, что, на основаніи послѣднихъ равенствъ, утождествляется данное уравненіе (1) и вмѣстѣ съ тѣмъ оно получается какъ единственный результатъ исключенія всѣхъ C изъ предыдущихъ равенствъ (11).

Кромѣ того послѣднія уравненія (11) образуютъ *замкнутую* систему, такъ какъ и исходныя уравненія представляютъ *замкнутую* систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (11) должны уничтожаться, въ силу послѣднихъ. Эти скобки имѣютъ слѣдующія значенія

$$\left[z-\varphi',\ p_\kappa-\psi_\kappa'\right]=-p_\kappa+\frac{\partial\varphi'}{\partial x_\kappa}+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}}p_{n-q+i},$$

$$\left[x_{n-q+i}-\varphi_i',\ p_\kappa-\psi_\kappa'\right]=\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa}+\frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}},$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-q$, и значеній i, отъ 1 до q. Такъ какъ правая часть послѣднихъ скобокъ не зависитъ отъ перемѣнныхъ

$$z,\ x_{n-q+1},\ x_{n-q+2},\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_{n-q},$$

то она не можетъ уничтожаться, на основаніи уравненій (11), но должна быть равна нулю тождественно. Такимъ образомъ мы получаемъ тождества

$$\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa}+\frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}}\equiv 0,\ \text{или}\ \frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}}\equiv-\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa},$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до q, и значеній k, отъ 1 до $n-q$. Что касается первыхъ скобокъ, то онѣ должны уничтожаться, на основаніи послѣднихъ $n-q$ уравненій (11). Поэтому, въ силу только что сейчасъ написанныхъ тождествъ, получаемъ новыя тождества

$$\psi_\kappa'\equiv\frac{\partial\varphi'}{\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa}p_{n-q+i},$$

$$\kappa=1,\ 2,\dots n-q,$$

которыя и доказываютъ, что система (11) опредѣляетъ полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса.

Изъ доказаннаго предложенія вытекаетъ, что *совокупность уравненій (9) должна представлять замкнутую систему и кромѣ того разрѣ-*

шаться только относительно $n-q$ изъ ряда перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, для того чтобы опредѣлять полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса производнаго уравненія (1).

Другими словами это второе условіе показываетъ, что *функціи*

$$F, F_1, F_2, \ldots F_n$$

не должны быть различными относительно перемѣнныхъ $z, p_1, p_2, \ldots p_n$, т. е. долженъ тождественно уничтожаться не только функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F, F_1, F_2, \ldots F_n}{z, p_1, p_2, \ldots p_n}\right),$$

но также и всѣ его миноры, отъ перваго до q-аго порядка включительно.

Выведенное заключеніе является существеннымъ, характернымъ свойствомъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, которое, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, находится въ числѣ необходимыхъ и достаточныхъ условій, опредѣляющихъ вполнѣ послѣднія собранія.

Остановимся далѣе на разсмотрѣніи того частнаго случая, когда полное интегральное собраніе какого-либо производнаго уравненія С. Ли представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{array}{l} z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + C_n \\ x_{n-q+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}), \\ \qquad i = 1, 2, \ldots q, \end{array}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_\kappa = \psi_\kappa, \\ \kappa = 1, 2, \ldots n-q, \end{array}\right\} \quad (13)$$

при чемъ произвольная постоянная C_n является придаточной, которая не входитъ въ выраженія всѣхъ функцій φ, φ_i и ψ_κ.

Если слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \ldots C_q, C_{q+1}, C_{q+2}, \ldots C_{n-1}}\right) \gtrless 0,$$

то очевидно, что система уравненій, составленная изъ q послѣднихъ (12) и $n-q-1$ послѣднихъ (13), разрѣшима относительно всѣхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$. Результатъ исключенія послѣднихъ изъ перваго уравненія (13) приводитъ къ производному уравненію С. Ли, независящему отъ перемѣнной z, слѣдующаго вида

$$F(x_1\ x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \qquad (14)$$

которое, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, разрѣшимо относительно перемѣнной p_1, такъ какъ первое уравненіе (13) представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно послѣдней перемѣнной.

Поэтому, въ этой же области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ величинъ, система уравненій (12) и (13), аналогично дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными, представляется совокупностью уравненій (14)-аго и n слѣдующихъ

$$F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C_s,$$
$$s = 1, 2, \ldots n-1,$$
$$z - F_n(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C_n.$$

Обратное предложеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произвольными постоянными величинами $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) = 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совмѣстно съ уравненіемъ (14), замкнутую систему n производныхъ уравненій. Если послѣдняя не разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, то полный интегралъ С. Ли получается при помощи квадратуры.

Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что наша замкнутая система n уравненій выдѣляетъ q зависимостей, не заключающихъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, и приводится къ виду

$$\left.\begin{array}{c} x_{n-q+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}), \\ p_\kappa = \Psi_\kappa(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}), \\ i = 1, 2, \ldots q, \quad \kappa = 1, 2, \ldots n-q. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Чтобы доказать наше предложеніе, поступаемъ аналогично предыдущему. Такъ какъ послѣдняя система должна быть замкнутой, то составляя скобки Пуассона

$$(x_{n-q+i} - \varphi_i,\ p_\kappa - \Psi_\kappa),$$

которыя должны уничтожаться тождественно, получаемъ отсюда тождества

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\kappa}+\frac{\partial\Psi_\kappa}{\partial p_{n-q+i}}=0,$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до q, и значеній k, отъ 1 до $n-q$, которыя показываютъ, что функціи Ψ_κ линейны относительно перемѣнныхъ p_{n-q+} и имѣютъ, стало—быть, слѣдующій видъ

$$\Psi_\kappa=A_\kappa\,(x_1,\,x_2,\ldots x_{n-q},\;C_1,\,C_2,\ldots C_{n-1})-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\kappa}p_{n-q+i},$$

$$\kappa=1,\,2,\ldots n-q.$$

Далѣе, приравнивая нулю значенія скобокъ

$$(p_i-\Psi_i,\;p_\kappa-\Psi_\kappa),$$

получаемъ, совершивъ сокращенія, новыя тождества

$$\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_i}=\frac{\partial A_i}{\partial x_\kappa},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k, отъ 1 до $n-q$. Послѣднія тождества показываютъ, что выраженіе

$$\sum_{\kappa=1}^{n-q}A_\kappa\,dx_\kappa$$

представляетъ точный дифференціалъ [1]). Поэтому, выполнивъ квадратуру послѣдняго, легко видѣть, что уравненіе

$$z=\int\sum_{\kappa=1}^{n-q}A_\kappa\,dx_\kappa+C_n,$$

совмѣстно съ системой (15)-ой, опредѣляетъ полное интегральное собраніе С. Ли даннаго производнаго уравненія (14).

3. Всѣ приведенныя соображенія, относительно одного производнаго уравненія (1) или (14), распространяются также на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли, происхожденіе которыхъ мы разсматривали въ предыдущей главѣ.

Пусть имѣемъ систему m производныхъ уравненій С. Ли

---

[1]) См. моя статья: Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences, 17 août 1903).

$$F_i\ (x_1,\ x_2,\dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\dots p_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots m, \tag{16}$$

которая имѣетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса

$$\left.\begin{aligned} z - \varphi\ (x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}) = 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i\ (x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}) = 0, \\ i = 1, 2, \dots q. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Вводя аналогичное предыдущему обозначеніе функцій ψ_k, которыя въ настоящемъ случаѣ заключаютъ только $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, составляемъ дополнительныя уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ уравненіемъ геометрическаго мѣста (17), полное интегральное собраніе С. Ли данной системы (16)-ой

$$p_k - \psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots n - q. \tag{18}$$

Чтобы система уравненій (17)—(18) представляла дѣйствительно полный интегралъ С. Ли данной системы уравненій (16), для этого результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}$, изъ уравненій разсматриваемаго интегральнаго собранія, долженъ приводиться къ однимъ только исходнымъ уравненіямъ (16)-ымъ.

Предположимъ, что послѣднія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\dots p_m$, т. е. что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots p_m}\right) \gtrless 0. \tag{19}$$

Въ такомъ случаѣ равенства, которыя представляютъ непосредственный результатъ исключенія всѣхъ значеній $C_1,\ C_2 \dots C_{n-m+1}$ изъ уравненій нашего интегральнаго собранія (17)—(18), должны также быть разрѣшимы относительно величинъ $p_1,\ p_2,\dots p_m$. Послѣднее условіе удовлетворяется, напримѣръ, когда уравненія (17) и послѣднія $n - q - m$ уравненій (18) разрѣшимы относительно всѣхъ C. Въ такомъ случаѣ, чтобы разсматриваемое интегральное собраніе опредѣляло полный интегралъ С. Ли данной системы (16), для этого достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots \varphi_q,\ \psi_{m+1},\ \psi_{m+2},\dots \psi_{n-q}}{C_1,\ C_2,\dots C_{q+1},\ C_{q+2},\dots C_{n-m+1}}\right) \gtrless 0. \tag{20}$$

Если геометрическое мѣсто разсматриваемаго интегральнаго собранія представлено уравненіями

$$z = \varphi\ (x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m}) + C_{n-m+1},$$

$$x_{n-q+i} = \varphi_i\ (x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m}),$$

$$i = 1,\ 2, \ldots q,$$

гдѣ произвольная постоянная C_{n-m+1} является придаточной, то система соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій С. Ли не зависитъ явно отъ перемѣнной величины z. Поэтому, чтобы написанныя уравненія представляли полный интегралъ С. Ли для производныхъ уравненій, которыя получаются, исключеніемъ произвольныхъ постоянныхъ изъ предыдущихъ уравненій, для этого, напримѣръ, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_q,\ \psi_{m+1},\ \psi_{m+2}, \ldots \psi_{n-q}}{C_1,\ C_2, \ldots C_q,\ C_{q+1}, \ldots C_{n-m}}\right) \gtrless 0.$$

Какъ легко видѣть, если $q = 0$, то мы имѣемъ дѣло съ полнымъ интеграломъ Лагранжа системы уравненій (16), разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Въ этомъ случаѣ уравненія (17) и (18) опредѣляютъ полный интегралъ Лагранжа и его производныя уравненія, а предыдущее неравенство (20) представляетъ извѣстное условіе, которому удовлетворяютъ полные интегралы Лагранжа изслѣдуемыхъ уравненій.

Составляя непосредственно скобки Вейлера для лѣвыхъ частей уравненій (17) и (18), мы очевидно приходимъ къ заключенію, что послѣднія уравненія образуютъ замкнутую систему и, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, приводятся къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} &F_i\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = 0, \\ &F_{m+s}\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = C_s, \\ &i = 1,\ 2, \ldots m, \quad s = 1,\ 2, \ldots n-m+1, \end{aligned}\right| \tag{21}$$

при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_m,\ F_{m+1}, \ldots F_{n+1}}{z,\ p_1, \ldots p_{m-1},\ p_m, \ldots p_n}\right) \tag{22}$$

уничтожается тождественно со всѣми своими минорами, отъ перваго до q-аго порядка включительно.

Отсюда вытекаетъ прежде всего слѣдующее весьма существенное заключеніе относительно условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли, чтобы составлять систему совокупныхъ уравненій, допускающихъ полныя интегральныя собранія С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (21), представляя преобразованія равенствъ (17) и (18), образуютъ также замкнутую систему. Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ функцій

$$F_1, F_2, \ldots F_m,$$

не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}$, то эти скобки могутъ уничтожаться только въ силу первыхъ m уравненій системы (21), которыя представляютъ систему данныхъ уравненій (16). Потому мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы имѣть полныя интегральныя собранія, совокупныя производныя уравненія С. Ли необходимо должны представлять замкнутую систему. совершенно аналогично совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка, т. е. скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій, должны уничтожаться на основаніи этихъ уравненій.

Само собою разумѣется, если данныя уравненія (16) не удовлетворяютъ условію замкнутости, то для разысканія ихъ рѣшеній должно поступать совершенно такъ, какъ поступаютъ въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій. Такъ, если скобки Вейлера, составленныя для двухъ какихъ либо функцій, напримѣръ, F_i и F_k не уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій (16), то, приравнивая составленныя скобки нулю, присоединяемъ вновь полученное уравненіе къ предыдущимъ исходнымъ уравненіямъ. Продолжая поступать такимъ образомъ и далѣе, относительно каждой пары разсматриваемыхъ уравненій, мы, или придемъ, въ концѣ концовъ, къ замкнутой системѣ производныхъ уравненій, или получаемъ такую систему, число уравненій которой больше $2n+1$; въ послѣднемъ случаѣ, или всѣ перемѣнныя величины получаютъ постоянныя значенія. или разсматриваемыя уравненія несовмѣстимы.

Совершенно аналогично тому какъ мы доказывали по отношенію къ одному уравненію, такъ и здѣсь, для системы производныхъ уравненій С. Ли, также легко убѣдиться, что отмѣченныя выше свойства, характеризующія полныя интегральныя собранія С. Ли, являются *не только необходимыми, но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточными условіями, чтобы система уравненій, вида (21), опредѣляла полный интегралъ С. Ли. а именно послѣднія уравненія должны образовать замкнутую систему и соотвѣтствующій имъ функціональный опредѣлитель, вида (22), долженъ уничтожаться тождественно со всѣми своими минорами, отъ пер-*

ваго порядка до q-аго включительно, если соотвѣтствующій полный интегралъ принадлежитъ q-ому классу.

Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить значеніе, которое представляетъ опредѣлитель (22), для опредѣленія класса полнаго интеграла, представляемаго системой (21). Для полнаго интеграла нулевого класса, т. е. интеграла Лагранжа уравненій (16), разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными, функціональный опредѣлитель (22) долженъ быть отличенъ отъ нуля. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли, то соотвѣтствующій имъ функціональный опредѣлитель (22) долженъ уничтожаться тождественно со всѣми своими минорами до порядка, равнаго классу разсматриваемаго интеграла.

4. Послѣднія доказанныя предложенія устанавливаютъ однообразную точку зрѣнія на задачи о разысканіи полныхъ интеграловъ Лагранжа и С. Ли. Эта точка зрѣнія вытекаетъ изъ идеи, лежащей въ основаніи извѣстнаго второго способа Якоби интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, изложеннаго въ знаменитомъ мемуарѣ: *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi* [1]).

Развитіе идей, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, позволитъ намъ представить въ новомъ видѣ указанныя выше свойства полныхъ интегральныхъ собраній. Начнемъ съ разсмотрѣнія случая одного уравненія (1)

$$F\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = 0. \qquad (1)$$

Сущность разсматриваемаго способа Якоби состоитъ въ разысканіи обладающихъ опредѣленными свойствами $n+1$ интеграловъ линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи f перемѣнныхъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя, слѣдующаго вида

$$[F,\ f] = 0. \qquad (23)$$

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя попарно изъ $n+1$ функцій

$$F,\ F_1,\ F_2, \ldots F_n, \qquad (24)$$

опредѣляющихъ полное интегральное собраніе (9) даннаго уравненія (1), не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2, \ldots C_n$, то эти скобки

[1]) *Jacobi.* Journal fur reine und angewandte Mathematik. Bd. 60. p. 1—181. Gesammelte Werke, Bd. V. S. 1—189.

должны уничтожаться вообще въ силу даннаго уравненія (1). Въ частности, чтобы уравненія (9) составляли замкнутую систему, достаточно, чтобы функціи (24) находились въ инволюціи между собой.

Поэтому выведенное выше условіе, характеризующее полныя интегральныя собранія С. Ли одного производнаго уравненія, формулируется также слѣдующимъ образомъ:

Чтобы уравненія (9) опредѣляли полное интегральное собраніе даннаго уравненія (1), для этого достаточно, чтобы функціи

$$F_1, F_2, \ldots F_n$$

представляли систему n интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія (23). Классъ послѣдняго собранія, само собою разумѣется, опредѣляется, на основаніи свойствъ функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{F, F_1, \ldots F_n}{z, p_1, p_2, \ldots p_n}\right).$$

Послѣднее предложеніе легко представить еще другимъ образомъ.

Предположимъ, что данное производное уравненіе не зависитъ явнымъ образомъ отъ перемѣнной величины z, т. е. мы имѣемъ дѣло съ производнымъ уравненіемъ (14), которое, будучи разрѣшимымъ относительно перемѣнной p_1, приводится къ виду

$$p_1 + H\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{25}$$

Легко видѣть, что уравненія разсмотрѣннаго въ n^0 2-омъ полнаго интегральнаго собранія уравненія (14)-аго преобразовываются въ систему уравненій (25)-аго и слѣдующихъ

$$\left.\begin{array}{c} F_s\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = C_s, \\ s = 1, 2, \ldots n-1, \\ z - F_n\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = C_n. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Эти уравненія имѣютъ мѣсто для какого угодно класса изслѣдуемаго собранія, въ виду предложенія, которое мы доказали въ концѣ n^0 2-ого, при чемъ здѣсь функціи F_s и F_n не зависятъ отъ перемѣнной p_1.

Очевидно, что уравненіе (25) и первыя $n-1$ уравненій (26) находятся въ инволюціи, такъ какъ соотвѣтствующія имъ скобки Пуассона не зависятъ, ни отъ перемѣнной p_1, ни отъ величинъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$.

Слѣдовательно, *первыя $n-1$ уравненій (26) представляютъ интегралы въ инволюціи канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ производному уравненію (25),*

$$\frac{dx_k}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$k=1,2,\ldots n.$$

Наконецъ, послѣднее уравненіе (26) получается при помощи квадратуры, составленной извѣстнымъ образомъ, на основаніи предыдущихъ интеграловъ.

Возвращаясь къ первоначальному уравненію (1), разрѣшаемъ его также относительно перемѣнной p_1 и получаемъ

$$p_1+H\ (x_1,\ x_3,\ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3,\ldots p_n)=0. \tag{27}$$

Само собою разумѣется, что преобразованная система (9) опредѣляетъ полное интегральное собраніе послѣдняго уравненія (27)-ого, представленное послѣднимъ уравненіемъ и слѣдующими

$$\left.\begin{array}{c} F_s\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3,\ldots p_n)=C_s, \\ s=1,\ 2,\ldots n, \end{array}\right\} \tag{28}$$

при чемъ функціи F_s не заключаютъ болѣе перемѣнной p_1, и классъ послѣдняго собранія остается тотъ же, что и собранія (9)-аго.

Такъ какъ уравненія (27) и (28) образуютъ замкнутую систему, то очевидно, что скобки Вейлера

$$[p_1+H,\ F_s],$$

какъ зависящія отъ перемѣнной p_1 и не заключающія величинъ C_s, должны уничтожаться, на основаніи уравненія (27), и мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1}-\frac{\partial F_s}{\partial z}H+\Big[H,\ F_s\Big]=0,$$

гдѣ послѣднія скобки Вейлера распространяются только на перемѣнныя величины

$$x_2,\ x_3,\ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3\ldots p_n.$$

Стало-быть, *уравненія (28) представляютъ систему интеграловъ въ инволюціи слѣдующей обобщенной канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій* [1])

$$\frac{dx_k}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dx_1}=-\frac{dH}{dx_k},$$

$$\frac{dz}{dx_1}=\sum_{i=1}^{n-1}p_{i+1}\frac{\partial H}{\partial p_{i+1}}-H,$$

$$k=2,\,3,\ldots n.$$

Изложенныя предложенія распространяются безъ всякаго труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Пусть имѣемъ систему слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_i\,(x_1,\,x_2,\ldots x_n,\,z,\,p_1,\,p_2,\ldots p_n)=0,\\ i=1,\,2,\ldots m, \end{array}\right\}\qquad(29)$$

которая имѣетъ полное интегральное собраніе, представленное уравненіями (21).

Предположимъ, что данныя уравненія (29) представляютъ систему въ *инволюціи.*

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ всѣхъ $n+1$ функцій F попарно, не зависятъ отъ величинъ C_1, $C_2,\ldots C_{n-m+1}$, то эти скобки уничтожаются вообще, на основаніи данныхъ уравненій (29), или уничтожаются иногда тождественно, т. е., въ этомъ послѣднемъ случаѣ, всѣ функціи F находятся въ инволюціи между собой. Чтобы система (21) представляла полное интегральное собраніе для этого *достаточно* одного послѣдняго условія, т. е. чтобы имѣли мѣсто тождества

$$\left.\begin{array}{c} [F_i,\,F_{m+s}]=0,\\ i=1,\,2,\ldots m, \end{array}\right\}\qquad(30)$$

для всѣхъ значеній указателя s, отъ 1 до $n-m+1$.

Составляемъ слѣдующія линейныя уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f по перемѣннымъ

$$x_1,\,x_2,\ldots x_n,\,z,\,p_1,\,p_2,\ldots p_n,$$

разсматриваемымъ какъ независимыя,

[1]) Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, стр. 69.

$$\left.\begin{array}{c}[F_i, f] = 0,\\ =1, 2, \ldots m.\end{array}\right\} \qquad (31)$$

Извѣстное тождество Майера [1]), которому удовлетворяютъ скобки Вейлера, составленныя для трехъ функцій F_i, F_k и f представляется равенствомъ

$$\left[F_i, [F_k, f]\right] + \left[F_k, [f, F_i]\right] + \left[f, [F_i, F_k]\right] =$$

$$= \frac{\partial F_i}{\partial z}\left[F_k, f\right] + \frac{\partial F_k}{\partial z}\left[f, F_i\right] + \frac{\partial f}{\partial z}\left[F_i, F_k\right].$$

Такъ какъ данныя уравненія (29) находятся въ инволюціи, то скобки $[F_i, F_k]$ уничтожаются тождественно, и предыдущее равенство даетъ новое равенство

$$\left[F_i, [F_k, f]\right] - \left[F_k, [F_i, f]\right] =$$

$$= \frac{\partial F_i}{\partial z}\left[F_k, f\right] - \frac{\partial F_k}{\partial z}\left[F_i, f\right],$$

которое показываетъ, что линейныя уравненія (31) образуютъ замкнутую систему и, стало-быть, въ опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, допускаютъ существованіе $2n-m+1$ различныхъ интеграловъ. На основаніи тождествъ (30), мы заключаемъ, что функціи

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots F_{n+1} \qquad (32)$$

представляютъ различные интегралы системы (31), которые, согласно съ предыдущимъ, находятся между собой въ инволюціи.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Чтобы уравненія (21) представляли полное интегральное собраніе С. Ли системы производныхъ уравненій (29) въ инволюціи ***для этого*** *достаточно, чтобы функціи (32) служили интегралами въ инволюціи замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными (31).*

Наконецъ, предположимъ, что уравненія (29) представляютъ *замкнутую систему* и функціональный опредѣлитель

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, стр. 39.

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots p_m}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ уравненія (29) приводятся къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{array}{c} p_k + H_k\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = 0, \\ k=1, 2, \ldots m, \end{array}\right\} \qquad (33)$$

и ихъ полное интегральное собраніе С. Ли представляется совокупностью послѣднихъ уравненій (33) и $n-m+1$ слѣдующихъ

$$\left.\begin{array}{c} F_{m+s}\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = C_s, \\ s=1, 2, \ldots n-m+1, \end{array}\right\} \qquad (34)$$

которыя получаются изъ $n-m+1$ послѣднихъ уравненій (21), исключеніемъ изъ нихъ значеній $p_1, p_2, \ldots p_m$, опредѣляемыхъ совокупностью уравненій (33).

Легко видѣть, что послѣднія значенія функцій F_{m+1} представляютъ интегралы слѣдующей якобіевской системы линейныхъ уравненій [1])

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + \Big[H_k, f\Big] = 0,$$

$$k=1, 2, \ldots m,$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются только на перемѣнныя величины

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n.$$

Другими словами *уравненія (34) представляютъ интегралы обобщенной канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ*

$$dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} dx_k,$$

$$dp_{m+r} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m+r}} dx_k,$$

[1]) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 69.

$$dz = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k,$$

$$r = 1, 2, \ldots n - m.$$

Итакъ, изъ изложенныхъ соображеній вытекаетъ, что *для опредѣленія полнаго интегральнаго собранія С. Ли его производныхъ уравненій, достаточно составить удовлетворяющіе указаннымъ условіямъ замкнутости интегралы соотвѣтствующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными.*

Если данныя производныя уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ p, то уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ данными производными уравненіями, ихъ полное интегральное собраніе, представляютъ интегралы въ инволюціи каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ разрѣшеннымъ производнымъ уравненіямъ.

Такимъ образомъ устанавливается полная аналогія между классической теоріей дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и теоріей производныхъ уравненій С. Ли. Въ обоихъ случаяхъ изслѣдуемыя полныя рѣшенія, какъ тѣхъ такъ и другихъ уравненій, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, представляются замкнутыми системами $n+1$ уравненій. При этомъ все различіе заключается въ разрѣшимости послѣднихъ уравненій относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Относительно послѣднихъ перемѣнныхъ изслѣдуемая замкнутая система разрѣшима, для дифференціальныхъ уравненій; что же касается производныхъ уравненій С. Ли, то соотвѣтствующая замкнутая система не разрѣшается относительно каноническихъ перемѣнныхъ одного и того же класса. Эти условія разрѣшимости характеризуются значеніями извѣстнаго функціональнаго опредѣлителя и его миноровъ.

Останавливаясь на подробномъ разсмотрѣніи послѣднихъ опредѣлителей, легко составить болѣе ясное представленіе относительно изслѣдуемыхъ собраній.

Если система (28), совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (27), представляетъ его полный интегралъ q-аго класса, то мы должны имѣть тождество

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_n}{z, p_2, \ldots p_n}\right) = 0,$$

при чемъ уничтожаются тождественно также и всѣ миноры опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, отъ перваго до q-аго порядка включительно. Предположимъ, что первымъ отличнымъ отъ нуля является слѣдующій функціональный опредѣлитель—миноръ $q+1$-аго порядка

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}}{p_2,\ p_3, \ldots p_{n-q}}\right) \gtrless 0. \tag{35}$$

Въ такомъ случаѣ становится очевиднымъ, что всѣ функціи

$$F_{n-q},\ F_{n-q+1}, \ldots F_n$$

не зависятъ непосредственно отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, но являются функціями послѣднихъ только черезъ посредство остальныхъ функцій

$$F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}.$$

Слѣдовательно, между разсматриваемыми функціями должны существовать слѣдующія зависимости

$$\left.\begin{array}{c} F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}), \\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots q. \end{array}\right\} \tag{36}$$

Аналогичное заключеніе распространяется также на уравненія (34), представляющія, совмѣстно съ замкнутой системой производныхъ уравненій (33), ея полное интегральное собраніе С. Ли. Если послѣднее принадлежитъ q-ому классу, то

$$D\left(\frac{F_{m+1},\ F_{m+2}, \ldots F_{n+1}}{z,\ p_{m+1}, \ldots p_n}\right) = 0$$

и всѣ миноры функціональнаго опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, также уничтожаются тождественно, отъ перваго до q-аго порядка включительно. Предполагая отличнымъ отъ нуля опредѣлитель—миноръ

$$D\left(\frac{F_{m+1},\ F_{m+2}, \ldots F_{n-q}}{p_{m+1},\ p_{m+2}, \ldots p_{n-q}}\right) \gtrless 0, \tag{37}$$

получаемъ зависимости между функціями F_{m+i} слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{c} F_{n-q+i} \equiv \Phi_i\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ F_{m+1},\ F_{m+2}, \ldots F_{n-q}), \\ i = 1,\ 2, \ldots q+1. \end{array}\right\} \tag{38}$$

Что касается полныхъ интегральныхъ собраній нулевого класса, то опредѣляющія ихъ функціи независимы между собой относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Такимъ образомъ только что отмѣченное существенное различіе между дифференціальными уравненіями съ частными производными и производными уравненіями С. Ли формулируется слѣдующими словами:

Интегралы обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, опредѣляющіе полные интегралы соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, независимы между собой относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса; что же касается аналогичныхъ интеграловъ каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ производнымъ уравненіямъ С. Ли, то они связаны между собой зависимостями, число которыхъ равно классу разсматриваемаго интегральнаго собранія, увеличенному на единицу.

Какъ хорошо извѣстно, изъ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, эти уравненія всегда имѣютъ, въ опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, послѣдніе указанные интегралы [1]). Что касается производныхъ уравненій С. Ли, то вопросъ о существованіи разсматриваемыхъ интеграловъ соотвѣтствующихъ каноническихъ уравненій долженъ послужить для насъ предметомъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

5. Мы разсматривали выше происхожденіе производныхъ уравненій С. Ли, въ пространствѣ трехъ измѣреній, изъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ типовъ M_2^1, M_2^0, (см. стр. 20—23).

Получаемыя производныя уравненія вида

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0 \tag{39}$$

представляютъ результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ уравненій соотвѣтствующаго полнаго интегральнаго собранія. Какъ было доказано, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ полныхъ интегральныхъ собраній вида M_2^1, M_2^0, внутри опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, можетъ представляться только, или въ видѣ линейнаго уравненія относительно перемѣнныхъ p и q, или въ видѣ функціональной зависимости между перемѣнными x, y и z. Поэтому въ *пространствѣ трехъ измѣреній полные интегралы С. Ли перваго и второго классовъ существуютъ только для двухъ родовъ производныхъ уравненій, вида (39), которыя, или линейны относительно перемѣнныхъ p и q, или отъ нихъ не зависятъ.* Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, мы пришли бы къ невозможному заключенію, что, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ, изъ уравненій упомянутыхъ собраній, представляется также уравненіями, отличными отъ указанныхъ выше линейныхъ и функціональныхъ.

Точно такъ же легко убѣдиться, что производное уравненіе (1) допускаетъ полныя интегральныя собранія С. Ли $n-1$ или n класса, представляемыя символами M_n^1 и M_n^0, только при условіи, что изслѣдуемое уравненіе (1) является, или линейнымъ относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2 \ldots p_n$, или

[1]) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73.

представляетъ функціональную зависимость только между перемѣнными $x_1, x_2, \ldots x_n, z$.

Дѣйствительно, пусть имѣемъ полное интегральное собраніе $n-1$-аго класса, представленное слѣдующими уравненіями

$$\left.\begin{array}{c} z=\varphi\ (x_1,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n), \\ x_{i+1}=\varphi_i\ (x_1,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n), \\ i=1,\ 2,\ldots n-1, \\ p_1=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}p_{i+1}. \end{array}\right\} \quad (40)$$

Согласно съ понятіемъ о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ даннаго уравненія (1), послѣднее должно получаться какъ результатъ исключенія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2,\ldots C_n$ изъ послѣднихъ $n+1$ написанныхъ уравненій. При этомъ возможны два слѣдующихъ различныхъ случая, которые находятся въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли, внутри нашей области измѣненія перемѣнныхъ, n первыхъ уравненій нашей системы (40) относительно всѣхъ C, или нѣтъ. Если эти уравненія даютъ тамъ значенія $C_1,\ C_2,\ldots C_n$ функціями перемѣнныхъ $x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z$, то подставляя полученныя значенія C въ послѣднее уравненіе (40), *находимъ искомый результатъ исключенія, въ видѣ линейнаго уравненія относительно перемѣнныхъ* $p_1,\ p_2,\ldots p_n$. Если же первыя n уравненій (40) неразрѣшимы относительно всѣхъ C, то очевидно они даютъ одну зависимость, между перемѣнными $x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z$, которая и представляетъ искомый результатъ исключенія. Стало-быть, *въ этомъ случаѣ производное уравненіе С. Ли не зависитъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ втораго класса.*

Наконецъ, пусть уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ С. Ли n-аго класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ уравненій

$$z=\varphi\ (C_1,\ C_2,\ldots C_n),$$

$$x_i=\varphi_i\ (C_1,\ C_2,\ldots C_n),$$

$$i=1,\ 2,\ldots n.$$

Очевидно результатъ исключенія всѣхъ C, изъ послѣднихъ уравненій, представляется зависимостью только между перемѣнными $x_1, x_2,\ldots x_n,\ z$.

Слѣдовательно, *полные интегралы $n-1$ класса существуютъ только для производнаго уравненія С. Ли, или линейнаго относительно*

перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, или независимаго отъ послѣднихъ. ***Полные** интегралы n-аго класса существуютъ только для уравненій, не заключающихъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.*

Предположимъ, что изслѣдуемое производное уравненіе (1) имѣетъ полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса; преобразовываемъ данное уравненіе (1) къ виду (27), и пусть разсматриваемое его рѣшеніе представляется совокупностью уравненій (27)—(28). Такъ какъ послѣднее принадлежитъ q-ому классу, то существуютъ $q+1$ равенствъ (36). Поэтому система уравненій (28), въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, замѣняется слѣдующими уравненіями

$$\left.\begin{aligned} F_r\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3 \ldots p_n) = C_r, \\ r=1,\,2,\ldots n-q-1, \\ \Phi_{i+1}\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}) = C_{n-q+i}, \\ i=0,\,1,\,2,\ldots q. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Въ силу неравенства (35), первыя $n-q-1$ уравненій послѣдней системы, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (27), разрѣшаются относительно перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots p_{n-q}$ и даютъ ихъ значенія въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k = \varphi'_k\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2} \ldots p_n,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-q-1}),$$
$$k=1,\,2,\,3,\ \ldots n-q.$$

Остальныя $q+1$ уравненій предыдущей системы (41) должны въ такомъ случаѣ, на основаніи послѣднихъ уравненій, приводиться къ слѣдующему виду, какъ это слѣдуетъ изъ условія замкнутости уравненій интегральнаго собранія,

$$z = \varphi'\,(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_n),$$

$$x_{n-q+i} = \varphi'_i\,(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_n),$$
$$i=1,\,2,\ldots q.$$

Прилагая въ настоящемъ случаѣ разсужденія, которыми мы уже имѣли случай раньше пользоваться (см. стр. 41, 47), приходимъ къ заключенію, что функціи

$$\varphi'_1,\ \varphi'_2,\ \varphi'_3, \ldots \varphi'_{n-q}$$

линейны относительно перемѣнныхъ $p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n$.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующій выводъ:

Чтобы производное уравненіе (27) имѣло полный интегралъ С. Ли q-аго класса, для этого соотвѣтствующая ему обобщенная система каноническихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій должна имѣть $n-q-1$ интеграловъ, которые, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ, въ опредѣленной области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, приводятся къ системѣ $n-q$ линейныхъ уравненій, относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Наконецъ, пусть имѣемъ *замкнутую* систему производныхъ уравненій (29). Нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ заключеній:

Если перемѣнныя $p_1, p_2, \ldots p_n$ не исключаются изъ послѣдней системы, то для нея не существуетъ полныхъ интеграловъ С. Ли, классъ которыхъ былъ бы больше числа $n-m$; если для данной системы (29) существуютъ полные интегралы С. Ли класса $n-m+t$, то въ такомъ случаѣ уравненія (29) должны заключать t уравненій, не зависящихъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Наконецъ, если система уравненій (29) допускаетъ полный интегралъ С. Ли $n-m$-аго класса, то разсматриваемая система должна, или состоять изъ линейныхъ уравненій, или заключать, по меньшей мѣрѣ, одно уравненіе, не зависящее отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, при чемъ остальныя уравненія, въ такомъ случаѣ, могутъ быть какими угодно. Всѣ эти заключенія непосредственно вытекаютъ изъ разсмотрѣнія общаго вида полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, изъ которыхъ производныя уравненія получаются путемъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Разсмотримъ въ заключеніе общій случай, когда данная замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли выражается въ видѣ (33)-емъ и имѣетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представленный совокупностью уравненій (33) и (34). Принимая во вниманіе условія (37) и (38), которыя при этомъ должны имѣть мѣсто, мы приходимъ путемъ разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, къ слѣдующему заключенію:

Чтобы замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли (33) имѣла полный интегралъ q-аго класса, для этого соотвѣтствующая обобщенная система каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ должна имѣть $n-m-q$ интеграловъ, которые, совмѣстно съ уравненіями данной системы, въ опредѣленной области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, приводятся къ системѣ $n-q$ линейныхъ уравненій относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Всѣ разсмотрѣнные случаи отмѣчаютъ частный видъ, который должны представлять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы допускать полные интегралы С. Ли того или другого класса. Послѣднее

обстоятельство является весьма характернымъ для производныхъ уравненій С. Ли, значительно отличающимъ послѣднія уравненія отъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которыя всѣ безъ исключенія, внутри опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, имѣютъ полные интегралы Лагранжа.

6. Выведенное заключеніе, относительно частнаго характера производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы, отличные отъ нулевого класса, является весьма существеннымъ для установленія правильной точки зрѣнія на разсматриваемую теорію С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, въ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій установилось воззрѣніе, считающее полные интегралы С. Ли обобщеніемъ интеграловъ классической теоріи. Выше мы указывали уже (см. стр. 34—36) на существенную разницу между уравненіями дифференціальными и производными С. Ли. Теперь, при болѣе близкомъ разсмотрѣніи вопроса, когда, отъ общихъ геометрическихъ соображеній о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, мы переходимъ къ постановкѣ аналитической задачи о разысканіи интеграловъ С. Ли, тогда оказывается, что видъ производныхъ уравненій, допускающихъ существованіе послѣднихъ интеграловъ, ограниченъ болѣе узкими условіями, чѣмъ видъ дифференціальныхъ уравненій классической теоріи. Послѣднее обстоятельство заслуживаетъ того, чтобы на немъ остановиться подробнѣе тѣмъ болѣе, что связанные съ нимъ вопросы очень мало затронуты въ литературѣ изслѣдуемой теоріи.

Свои новыя понятія о производныхъ уравненіяхъ и ихъ полныхъ рѣшеніяхъ, основанныя на геометрической теоріи поверхностныхъ элементовъ, С. Ли далъ впервые въ 1872 году [1]). Послѣ этого тѣ же самыя понятія были приведены Ф. Клейномъ въ его извѣстной *Ерлангенской Программѣ* [2]) и легли затѣмъ въ основаніе мемуара С. Ли: Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, въ IX томѣ Mathematische Annalen, откуда и перешли въ большую часть трактатовъ, относительно разсматриваемыхъ уравненій. Слѣдуетъ однако замѣтить, что, ни С. Ли, ни другіе авторы не занимались подробнымъ изученіемъ идеи новыхъ введенныхъ понятій [3]). Лишь только отчасти связанные съ ними вопросы были затронуты Беклундомъ [4]), относительно про-

---

[1]) Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität Göttingen. S 473.

[2]) *F. Klein.* - Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 1891, p. 187).

[3]) *F. Engel.*—Zur Erinnerung an Sophus Lie (Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Allgemeiner Theil 1899. S. XXXI).

[4]) Mathematische Annalen, Bd. 17. S. 285.

изводныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, и С. Ли [1]) въ одномъ изъ послѣднихъ своихъ мемуаровъ. Въ своемъ сообщеніи [2]) Парижской Академіи Наукъ: *Sur les intégrales de S. Lie*, мы указали рядъ критическихъ соображеній относительно теоріи С. Ли.

Факты, которые вызываютъ необходимость критическаго разсмотрѣнія выведенныхъ С. Ли понятій, достаточно выяснены выше, и наша задача приводится къ тому, чтобы установить соотвѣтствіе между точкой зрѣнія относительно общности рѣшеній С. Ли, высказываемой нѣкоторыми авторами, и частнымъ характеромъ тѣхъ условій, которымъ должны удовлетворять разсматриваемыя уравненія, чтобы допускать полные интегралы С. Ли.

Легко убѣдиться, что если интегральныя собранія С. Ли и являются обобщеніемъ интеграловъ Лагранжа дифференціальныхъ уравненій, то только съ чисто формальной стороны.

Возьмемъ, напримѣръ, формулы (3) и (4), опредѣляющія полный интегралъ С. Ли q-аго класса производнаго уравненія (1)-аго. Полагая въ этихъ формулахъ q равнымъ нулю, мы получаемъ формулы (5), которыя представляютъ полный интегралъ Лагранжа уравненія (1), разсматриваемаго какъ дифференціальное, и заключаются такимъ образомъ какъ частный случай въ общихъ формулахъ (3) и (4). Но, удовлетворяясь послѣднимъ толкованіемъ, мы становимся на формальную точку зрѣнія и только ограничиваемся разсмотрѣніемъ внѣшняго вида формулъ, не останавливаясь на значеніи разрѣшаемыхъ ими задачъ.

Между тѣмъ способы образованія *производныхъ* уравненій С. Ли и свойства ихъ интегральныхъ собраній показываютъ, что необходимо разсматривать эти уравненія какъ совершенно различныя, въ зависимости отъ класса геометрическаго мѣста собранія поверхностныхъ элементовъ, изъ которыхъ происходятъ разсматриваемыя производныя уравненія. Это различіе между производными уравненіями различныхъ классовъ особенно наглядно обнаруживается при сравненіи собраній нулевого класса съ собраніями другихъ классовъ, порядокъ которыхъ отличенъ отъ нуля, т. е. при сравненіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными классической теоріи съ производными уравненіями С. Ли. Какъ раньше мы уже отмѣчали (см. стр. 34), каноническія перемѣнныя перваго класса разсматриваются, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, какъ независимыя перемѣнныя. Наоборотъ теорія С. Ли исходитъ изъ предположеній, что послѣднія перемѣнныя связаны между собой нѣкоторымъ числомъ q уравненій. Предполагая послѣднее число q равнымъ ну-

---

[1]) *S. Lie*.—Ueber Berührungstansformationen und Differentialgleichungen (Leipzig. Berichte. Jahrg. 1898. S. 113—180).

[2]) Comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences. 3 août 1903.

лю, мы получаемъ формулы классической теоріи и можемъ считать поэтому, съ формальной точки зрѣнія, что дифференціальныя уравненія и ихъ интегралы Лагранжа представляютъ частный случай производныхъ уравненій и полныхъ интеграловъ С. Ли.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ разсмотрѣнія однихъ только опредѣленій и понятій. Поэтому было бы слишкомъ поспѣшно, прежде чѣмъ сравнить вопросы и задачи, которые разсматриваются въ обоихъ теоріяхъ, заключать предварительно, что и вся теорія С. Ли представляетъ обобщеніе классической. Достаточно для этого возвратиться къ отмѣченнымъ выше случаямъ существованія полныхъ интеграловъ различныхъ классовъ.

Остановимся, напримѣръ, на пространствѣ трехъ измѣреній, гдѣ существуетъ шесть различныхъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ, представляемыхъ слѣдующими символами

$$M_2^2,\ M_2^1,\ M_2^0,$$

$$M_1^1,\ M_1^0,$$

$$M_0^0.$$

Всѣ эти собранія представляютъ настолько различные геометрическіе образы, что трудно ожидать *a priori*, чтобы каждая система ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемая уравненіемъ

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0,$$

могла быть собрана въ любое изъ этихъ шести собраній. И дѣйствительно, какъ мы видѣли выше, для существованія каждаго изъ указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, написанное производное уравненіе должно удовлетворять своимъ особеннымъ частнымъ условіямъ.

Послѣднее обстоятельство, съ научной, философской точки зрѣнія, находится въ полномъ соотвѣтствіи съ мыслями, которыя высказалъ С. Ли, относительно представленія геометрическихъ формъ пространства, въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ: *Ueber Complexe insbesondere Linien-und Kugel-Complexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen* [1]). Указывая, что возможно принимать за основные элементы различные геометрическіе образы, какъ точка, согласно съ Декартомъ, или прямая, вмѣстѣ съ Плюкеромъ, С. Ли прибавляетъ: Da aber hierdurch ein Geraden-System—ein Plücker' scher Linien-Complex—ausgezeichnet

---

[1]) Mathematische Annalen. Bd. 5, S. 145.

wird, so ist es einleuchtend, dass eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linien—Complexes beschäftigt, so kann es sehr vortheilhaft sein, die Linien dieses Complexes als Raumelemente zu benutzen [1]).

Совершенно аналогичныя соображенія примѣняются къ области перемѣнныхъ величинъ, представляемой системой поверхностныхъ элементовъ, которая опредѣляется однимъ даннымъ или системой данныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Какъ вытекаетъ изъ предыдущаго изложенія, въ зависимости отъ характера данной системы поверхностныхъ элементовъ, послѣдніе могутъ быть собраны въ полныя интегральныя собранія С. Ли одного или другого опредѣленнаго класса.

Такимъ образомъ, указанныя выше условія существованія интегральныхъ собраній С. Ли представляютъ достаточное основаніе, чтобы утверждать, *что разсматриваемые интегралы, внутри извѣстной, опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, существуютъ въ исключительныхъ случаяхъ только для производныхъ уравненій С. Ли, особаго частнаго вида.*

Здѣсь однако необходимо сдѣлать нѣсколько замѣчаній относительно изслѣдованій С. Ли, къ которымъ мы возвратимся подробнѣе въ дальнѣйшемъ изложеніи. Какъ въ своемъ доказательствѣ существованія полныхъ интегральныхъ собраній [2]), такъ и во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ, по интегрированію производныхъ уравненій, С. Ли все время остается на чисто формальной точкѣ зрѣнія, ограничиваясь разсмотрѣніемъ общихъ формулъ. При этомъ С. Ли не дѣлаетъ различія между интегралами различныхъ классовъ и не даетъ способовъ разысканія полныхъ интеграловъ одного даннаго опредѣленнаго класса. Такая постановка изслѣдованія не можетъ удовлетворять читателя, оставляя не выясненнымъ вопросъ о взаимномъ отношеніи теорій дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли.

Мы указали уже въ первой главѣ настоящаго изслѣдованія (см. n⁰ 8) существенное различіе въ опредѣленіи дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли; кромѣ того, на предыдущихъ страницахъ, отмѣчено также различіе между тѣми и другими уравненіями, относительно существованія ихъ рѣшеній, и указано, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для уравненій исключительнаго вида.

Въ виду послѣднихъ изложенныхъ соображеній, являются вопросы, относительно условій, при которыхъ существуютъ интегралы С. Ли, отно-

---

[1]) Loc. cit. S. 150.

[2]) Mathematische Annalen, Bd. 9, S. 261.

сительно разысканія производныхъ уравненій, допускающихъ интегралы С. Ли опредѣленнаго класса, и, наконецъ, относительно того значенія, которое представляютъ производныя уравненія С. Ли и ихъ интегральныя собранія.

Кромѣ общаго научнаго интереса, который представляетъ всякая математическая теорія, значеніе интеграловъ С. Ли, для теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, выясняется въ достаточной мѣрѣ изъ ихъ разсмотрѣннаго свойства, представлять систему интеграловъ въ инволюціи каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ даннымъ производнымъ уравненіямъ. Этимъ послѣднимъ свойствомъ интеграловъ С. Ли намъ придется воспользоваться въ дальнѣйшемъ изложеніи, при интегрированіи изслѣдуемыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Что же касается условій существованія интеграловъ С. Ли и вычисленія производныхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы различныхъ классовъ, то, для рѣшенія возникающихъ при этомъ вопросовъ, намъ придется интегрировать нѣкоторыя системы уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ функцій. Съ изученія этихъ послѣднихъ уравненій мы и имѣемъ въ виду начать наши дальнѣйшія изслѣдованія.

ГЛАВА III.

Объ интегрированіи нѣкоторыхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функцій.

1. Уравненія, которыя служатъ предметомъ изслѣдованія настоящей главы, представляютъ обобщеніе уравненій, проинтегрированныхъ Якоби въ его мемуарѣ: *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* [1]) и къ которымъ приводятся многіе вопросы анализа. Теорія интегрированія изслѣдуемыхъ уравненій была опубликована мною на страницахъ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ въ мемуарѣ: *Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* [2]).

Интегрируя на послѣдующихъ страницахъ наши обобщенныя уравненія, мнѣ придется вмѣстѣ съ тѣмъ подвергнуть и интегралы упомянутыхъ уравненій Якоби болѣе подробному изученію, чѣмъ это дѣлалъ знаменитый геометръ въ своихъ изслѣдованіяхъ.

Обозначимъ черезъ $z_1, z_2, \dots z_n$ неизвѣстныя функціи $m+p$ независимыхъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots x_{m+p}$.

Уравненія, которыя мы имѣемъ въ виду интегрировать, представляются слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \dfrac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0, \\ h=1, 2, \dots m, \qquad r=1, 2, \dots n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

при чемъ коэффиціенты X^h_k, X^{hr} представляютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_{m+p}, z_1, z_2, \dots z_n$, и значекъ p имѣетъ нѣкоторое цѣлое численное значеніе.

Въ частномъ случаѣ, когда значекъ p тождественно равенъ нулю, то всѣ коэффиціенты X^h_k исчезаютъ, и изслѣдуемая система приводится къ извѣстной системѣ уравненій

1) Jacobi.— Gesammelte Werke, Band IV, S. 7.

2) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, 5-e série, p. 423.

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} = X^{hr},$$

$$h = 1, 2, \ldots m, \quad r = 1, 2, \ldots n,$$

соотвѣтствующихъ уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ, при чемъ функціи X^{hr} должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ точности дифференціаловъ.

Если значекъ n равенъ 1, то разсматриваемыя уравненія представляютъ систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Наконецъ, если показатель m равенъ 1, то наши уравненія принимаютъ видъ упомянутой выше системы уравненій Якоби [1]), обобщеніе которой представляетъ предметъ настоящей главы нашего изслѣдованія. Въ этомъ случаѣ число уравненій n равно числу неизвѣстныхъ функцій и, стало-быть, соотвѣтствующія уравненія Якоби допускаютъ всегда, въ извѣстной области измѣненія перемѣнныхъ, существованіе интеграловъ, какъ это слѣдуетъ, на основаніи изслѣдованій Коши и Ковалевской.

Если показатель m больше 1, т. е. число уравненій превышаетъ число заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ функцій, то, какъ извѣстно, существованіе интеграловъ послѣднихъ уравненій требуетъ выполненія нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, формальнаго характера. Объ этихъ послѣднихъ легко судить по частнымъ случаямъ, отмѣченнымъ выше, когда $p = 0$ или когда $n = 1$. Въ первомъ случаѣ, для существованія интеграловъ разсматриваемыхъ уравненій, должны удовлетворяться условія точности дифференціаловъ; во-второмъ же случаѣ изслѣдуемая система уравненій должна быть якобіевской, т. е. должны уничтожаться тождественно составленныя извѣстнымъ образомъ скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій.

Ниже мы составимъ, въ самомъ общемъ видѣ, условія, которымъ должны удовлетворять изслѣдуемыя уравненія (1), для того чтобы допускать существованіе интеграловъ. Эти условія явятся слѣдствіемъ зависимости между уравненіями (1) и нѣкоторой якобіевской системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по всѣмъ перемѣннымъ величинамъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots z_n$, разсматриваемымъ какъ независимыя перемѣнныя.

2. Предположимъ, что слѣдующая система n различныхъ уравненій

$$f_i\,(x_1, x_2, \ldots x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

[1]) Въ Journal Crelle (Bd. 100, S. 104, Bd. 110, S. 171) Гамбургеръ два раза возвращался, въ своихъ изслѣдованіяхъ, къ этимъ уравненіямъ.

разрѣшимыхъ относительно перемѣнныхъ величинъ $z_1, z_2, \ldots z_n$, представляетъ рѣшеніе изслѣдуемой системы дифференціальныхъ уравненій (1). Дифференцируя уравненія (2) по всѣмъ независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, получаемъ рядъ слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_r} \dfrac{\partial z_r}{\partial x_h} = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m, \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_r} \dfrac{\partial z_r}{\partial x_k} = 0, \\ k = m+1, m+2, \ldots m+p, \end{array}\right\} \quad (4)$$

при чемъ значекъ i принимаетъ всѣ различныя значенія, отъ 1 до n.

Умножаемъ равенства (4) соотвѣтственно на X_k^h и сумму ихъ складываемъ съ уравненіемъ (3), соотвѣтствующимъ значку h. Такимъ образомъ мы получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum\limits_{r=1}^{n} \left(\dfrac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \dfrac{\partial z_r}{\partial x_k} \right) \dfrac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m, \quad i = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Такъ какъ уравненія (2) даютъ рѣшенія данной системы (1), то для опредѣляемыхъ равенствами (2) значеній функцій $z_1, z_2, \ldots z_n$ имѣютъ мѣсто тождества

$$\dfrac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \dfrac{\partial z_r}{\partial x_k} = X^{hr},$$

$$h = 1, 2, \ldots m, \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

Подставляя, въ предыдущія равенства (5), правыя части послѣднихъ написанныхъ равенствъ, вмѣсто ихъ лѣвыхъ частей, получаемъ слѣдующія новыя равенства

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum\limits_{r=1}^{n} X^{hr} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m, \quad i = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію: *чтобы опредѣляемыя уравненіями (2) функціи $z_1, z_2, \ldots z_n$ удовлетворяли данной системѣ (1), для этого равенства (6) необходимо должны быть слѣдствіемъ уравненій (2).* Такъ какъ лѣвыя части полученныхъ равенствъ (6) представляютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ x и z, то мы говоримъ, что, въ общемъ случаѣ, равенства (6) должны уничтожаться на основаніи уравненій (2). Въ частности равенства (6) могутъ также уничтожаться тождественно, были бы только для этого подобраны соотвѣтствующимъ образомъ функціи

$$f_1, f_2, \ldots f_n.$$

Наконецъ, равенства (6) должны представлять тождества еще и въ томъ случаѣ, когда въ правыхъ частяхъ уравненій (2), вмѣсто нулей, поставить соотвѣтственно произвольныя постоянныя величины $C_1, C_2, \ldots C_n$.

3. Благодаря выведеннымъ равенствамъ (6), устанавливается зависимость между изслѣдуемой системой дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функцій $z_1, z_2, \ldots z_n$ (1) и системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f по всѣмъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots z_n$, разсматриваемымъ какъ независимыя перемѣнныя,

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x_h} + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \sum\limits_{r=1}^{n} X^{hr} \dfrac{\partial f}{\partial z_r} = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что послѣдняя система уравненій (7) интегрируема и имѣетъ n интеграловъ $f_1, f_2, \ldots f_n$, различныхъ относительно перемѣнныхъ $z_1, z_2, \ldots z_n$, такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots f_n}{z_1, z_2, \ldots z_n}\right) \gtrless 0. \tag{8}$$

Легко доказать въ такомъ случаѣ, что *слѣдующія уравненія*

$$f_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots n. \tag{9}$$

опредѣляютъ рѣшеніе системы данныхъ уравненій (1).

Дѣйствительно, поступая съ уравненіями (9) совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали это въ началѣ предыдущаго n^0 2-го съ уравненіями (2), мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h}+\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h}+\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k}\right)\frac{\partial f_i}{\partial z_r}=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots n,$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателя h, отъ 1 до m.

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, функціи f_i представляютъ интегралы системы уравненій (7), то, стало-быть, имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h}+\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{r=1}^{n} X^{hr} \frac{\partial f_i}{\partial z_r}=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots n,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m.

Поэтому, на основаніи послѣднихъ равенствъ, предыдущія становятся

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z}\left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h}+\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k}-X^{hr}\right)=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots n,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m. Въ виду неравенства (8), система n послѣднихъ тождествъ приводитъ къ n слѣдующимъ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h}+\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k}-X^{hr}=0,$$

$$r=1,\ 2,\ldots n,$$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній показателя h, отъ 1 до n, и доказываютъ такимъ образомъ справедливость нашего предложенія.

4. Итакъ, чтобы изслѣдуемая система уравненій (1) имѣла рѣшенія, для этого достаточно, чтобы уравненія (7) имѣли n различныхъ интеграловъ. Поэтому условія, которымъ для этого должна удовлетворять послѣдняя система (7), представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ условія интегрируемости данныхъ уравненій (1).

Предположимъ, что коэффиціенты послѣднихъ уравненій X_k^h, X^{hr} таковы, что m уравненій (7) образуютъ *якобіевскую* систему, обладающую $p+n$ различными рѣшеніями.

Соотвѣтствующая система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ имѣетъ слѣдующій видъ

$$dx_k = \sum_{h=1}^{m} X_k^h \, dx_h,$$

$$k = m+1,\ m+2, \dots m+p,$$

$$dz_r = \sum_{h=1}^{m} X^{hr} \, dx_h,$$

$$r = 1,\ 2, \dots n.$$

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ системой уравненій (1) Якоби, т. е. при $m=1$, тогда послѣдняя система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ обращается въ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, которая можетъ быть представлена также въ слѣдующемъ видѣ, какъ изображаетъ ее Якоби,

$$dx_1 = \frac{dx_k}{X_k} = \frac{dz_r}{X^r},$$

$$k = 2,\ 3, \dots p+1, \quad r = 1,\ 2, \dots n,$$

при чемъ второй значекъ коэффиціентовъ X^r мы опускаемъ, какъ излишній.

Пусть функціи

$$f_1,\ f_2, \dots f_{p+n}$$

представляютъ систему $p+n$ различныхъ интеграловъ уравненій (7). Такъ какъ произвольная функція послѣднихъ интеграловъ представляетъ также рѣшеніе системы (7), то, на основаніи теоремы, доказанной въ предыдущемъ n^0 3-емъ, слѣдующія формулы

$$\left.\begin{array}{c} \Pi_r\ (f_1,\ f_2, \dots f_{p+n}) = 0, \\ r = 1,\ 2, \dots n, \end{array}\right\} \tag{10}$$

представляютъ рѣшеніе данныхъ уравненій (1), при чемъ $\Pi_1,\ \Pi_2, \dots \Pi_n$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Легко доказать, что уравненія (10) представляютъ *общій интегралъ* системы (1), т. е. всякое рѣшеніе послѣднихъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} z_r = \psi_r\ (x_1,\ x_2, \dots x_{m+p}), \\ r = 1,\ 2, \dots n, \end{array}\right\} \tag{11}$$

заключается въ формулахъ (10), при условіи, что всѣ значенія перемѣнныхъ x и z, удовлетворяющія зависимостямъ (11), находятся внутри

области измѣненія перемѣнныхъ величинъ, для которой якобіевская система (7) интегрируема [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, для каждаго значенія показателя h, мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0,$$

$$r = 1, 2, \ldots n,$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n} X^{hr} \frac{\partial f_s}{\partial z_r} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots p + n.$$

Подставляя въ нихъ значенія функцій $z_1, z_2, \ldots z_n$, опредѣляемыя уравненіями (11)-ыми и исключая изъ полученныхъ такимъ образомъ тождествъ значенія n величинъ X^{hr}, соотвѣтствующія показателямъ $r = 1, 2, \ldots n$, находимъ новыя тождества

$$\left.\begin{array}{c} Dx_h\, f_s + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X^h_k\, Dx_k f_s = 0, \\ s = 1, 2, \ldots p + n, \end{array}\right| \qquad (12)$$

гдѣ введены слѣдующія условныя обозначенія

$$Dx_i\, f_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial z_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}.$$

Изъ полученныхъ равенствъ (12) исключаемъ p величинъ X^h_k, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ $k = m + 1, m + 2, \ldots m + p$. Такъ какъ число всѣхъ уравненій равно $p + n$, то въ результатѣ исключенія мы получаемъ n новыхъ тождествъ, независящихъ отъ величинъ X^h_k, которыя мы представляемъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\Delta_{h\sigma} = 0,$$

$$\sigma = p + 1, p + 2, \ldots p + n.$$

Введенное здѣсь выраженіе

$$\Delta_{h\sigma}$$

---

[1]) Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій....* Стр. 26.

обозначаетъ функціональный опредѣлитель, составленный изъ функцій

$$f_1,\ f_2, \ldots f_p,\ f_\sigma,$$

относительно перемѣнныхъ величинъ

$$x_h,\ x_{m+1}, \ldots x_{m+p},$$

при чемъ перемѣнныя величины $z_1, z_2, \ldots z_n$ разсматриваются какъ функціи (11) всѣхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}$, такъ что мы имѣемъ

$$\Delta_{h\sigma} \equiv \begin{vmatrix} Dx_h\, f_1 & Dx_{m+1}\, f_1 & \ldots & Dx_{m+p}\, f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Dx_h\, f_p & Dx_{m+1}\, f_p & \ldots & Dx_{m+p}\, f_p \\ Dx_h\, f_\sigma & Dx_{m+1}\, f_\sigma & \ldots & Dx_{m+p}\, f_\sigma \end{vmatrix}.$$

Тождества

$$\Delta_{h\sigma} = 0,$$

$$h = 1,\ 2, \ldots m,$$

показываютъ, что разсматриваемыя значенія функцій

$$f_1,\ f_2, \ldots f_p,\ f_\sigma$$

связаны между собой одной зависимостью.

Давая значку σ всѣ n значеній отъ $p+1$ до $p+n$, мы заключаемъ, на основаніи послѣднихъ тождествъ, что, подставляя рѣшеніе (11) данныхъ уравненій (1) въ функціи

$$f_1,\ f_2, \ldots f_p,\ f_{p+1}, \ldots f_{p+n},$$

получаемъ ихъ значенія, которыя оказываются связанными n различными зависимостями.

Отсюда и слѣдуетъ искомое заключеніе, что *уравненія (10) представляютъ общій интегралъ данной системы дифференціальныхъ уравненій (1).*

Приведенное доказательство представляетъ обобщеніе извѣстныхъ доказательствъ, данныхъ для случаевъ одного линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи и для якобіевскихъ системъ послѣднихъ уравненій [1]).

---

[1]) Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій....* гл. II, стр. 11 и слѣд. и статью: *Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. (Nouvelles Annales de Mathématiques. 3 série,* t. XVIII).

Само собою разумѣется, что разсматриваемое доказательство ограничивается только указанной областью интегрируемости разсматриваемыхъ уравненій. Если послѣднюю область мы ограничимъ, напримѣръ, условіями однозначности коэффиціентовъ X_k^h, X^{hr} и существованія ихъ конечныхъ и непрерывныхъ первыхъ частныхъ производныхъ по входящимъ въ нихъ перемѣннымъ величинамъ, то рѣшенія уравненій (1), не удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ, не могутъ заключаться въ указанномъ общемъ интегралѣ изслѣдуемыхъ уравненій, который принадлежитъ разсматриваемой области интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣетъ мѣсто послѣдній случай, то нѣкоторые изъ разсматриваемыхъ функціональныхъ опредѣлителей

$$\Delta_{h\sigma}$$

могутъ принимать неопредѣленныя или безконечно большія значенія, и наше доказательство не приводитъ болѣе къ желаемому результату.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую систему уравненій съ частными производными двухъ функцій z_1 и z_2 по независимымъ перемѣннымъ x и y:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 1 + \sqrt{z_1 - x}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \left(z_2 - xy\right)\sqrt{z_1 - x},$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = x + \left(z_2 - xy\right)\left(x - 2\sqrt{z_1 - x}\right).$$

Внутри области однозначности коэффиціентовъ данныхъ уравненій, ихъ общій интегралъ, согласно съ изложенной теоріей, имѣетъ слѣдующее значеніе

$$z_1 = x + \left[\frac{1}{2}x - C_1 \operatorname{tang}\left(C_1 y + C_2\right)\right]^2,$$

$$z_2 = xy - 2C_1^2 \sec^2\left(C_1 y + C_2\right),$$

гдѣ C_1 и C_2 обозначаютъ двѣ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Разсматриваемыя уравненія имѣютъ очевидно также слѣдующее рѣшеніе

$$z_1 = x, \quad z_2 = xy,$$

которое однако, какъ легко видѣть, не заключается въ предыдущихъ формулахъ и не можетъ быть изъ нихъ получено, такъ какъ для опредѣляемыхъ послѣднимъ рѣшеніемъ значеній перемѣнныхъ z_1, z_2, x, y коэффиціенты данныхъ уравненій перестаютъ быть однозначными.

ГЛАВА IV.

Разысканіе производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы С. Ли даннаго класса.

1. Исходя изъ разсмотрѣнія свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, мы имѣли уже случай отмѣтить, во второй главѣ нашего изслѣдованія, нѣсколько общихъ условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы существовали для нихъ разсматриваемые интегралы даннаго опредѣленнаго класса. Наши дальнѣйшія вычисленія будутъ основываться на доказанномъ выше, въ n^{0}4-омъ второй главы, свойствѣ разсматриваемыхъ интегральныхъ собраній, представлять интегралы въ инволюціи канонической системы, которые связаны между собой указанными выше зависимостями.

Начнемъ съ изслѣдованія простѣйшаго случая, представляемаго однимъ производнымъ уравненіемъ, не заключающимъ перемѣнной z,

$$p_1 + H\,(x_1,\, x_2, \ldots x_n,\, p_2,\, p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{1}$$

Какъ было доказано, въ n^{0}2-мъ второй главы, полный интегралъ С. Ли послѣдняго уравненія опредѣляется при помощи квадратуры, послѣ того какъ извѣстны $n-1$ уравненій нашего интегральнаго собранія, независящихъ отъ перемѣнной z. Поэтому, возвращаясь къ первымъ $n-1$ уравненіямъ (26) второй главы, легко видѣть, совершенно аналогично разсмотрѣнному общему случаю, когда исходное производное уравненіе заключаетъ перемѣнную z, что функціи

$$F_1,\, F_2, \ldots F_{n-1}$$

должны удовлетворять слѣдующимъ q зависимостямъ

$$\left.\begin{array}{l} F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}\,(x_1,\, x_2, \ldots x_n,\, F_1,\, F_2, \ldots F_{n-q-1}), \\ \qquad i = 0,\, 1,\, 2, \ldots q-1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

для того, чтобы упомянутыя уравненія (26) опредѣляли полный интегралъ С. Ли q-аго класса даннаго уравненія (1).

Для выясненія сущности дальнѣйшихъ вычисленій, займемся прежде всего простѣйшимъ случаемъ существованія полныхъ интеграловъ С. Ли $n-1$ класса, который былъ изслѣдованъ выше, въ $n^{0}5$-омъ второй главы, исходя изъ основныхъ понятій о происхожденіи производныхъ уравненій С. Ли.

Если данное уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ С. Ли $n-1$-аго класса, то очевидно, что всѣ функціи F_s зависятъ только отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_n$, и равенства (2) должны выражаться слѣдующимъ образомъ

$$F_s \equiv \Phi_s\,(x_1,\ x_2, \dots x_n),$$
$$s=1,\ 2, \dots n-1.$$

Такъ какъ послѣднія функціи не заключаютъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, то всѣ функціи Φ_s находятся въ инволюціи. Наконецъ, соотвѣтствующее разсматриваемому уравненію (1) линейное уравненіе съ частными производными, которому удовлетворяютъ функціи Φ_s, становится

$$\left(p_1+H,\ \Phi\right)\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\sum_{s=2}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0. \tag{3}$$

Искомые интегралы послѣдняго уравненія

$$\Phi_1,\ \Phi_2, \dots \Phi_{n-1} \tag{4}$$

не должны зависѣть отъ перемѣнныхъ $p_2, p_3, \dots p_n$. Поэтому имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_s\,\partial p_k}=0,$$

для всѣхъ значеній указателей s и k, отъ 1 до n. Слѣдовательно, производныя, взятыя по перемѣннымъ p_k отъ предыдущихъ уравненій (3), должны также уничтожаться тождественно.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующія новыя уравненія, которымъ должны удовлетворять искомыя функціи (4),

$$\sum_{s=2}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\,\partial p_k}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,$$
$$k=2,\ 3, \dots n.$$

Такъ какъ число всѣхъ различныхъ требуемыхъ интеграловъ уравненія (3) равно $n-1$, то полученныя послѣднія $n-1$ уравненій должны уни-

чтожаться тождественно, каждое въ отдѣльности, т. е. имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\, \partial p_k} = 0, \tag{5}$$

для всѣхъ значеній s и k, отъ 2 до n. Интегрируя эти послѣднія равенства, мы получаемъ слѣдующія зависимости

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i+1}} = X_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots n-1,$$

гдѣ всѣ X_i представляютъ произвольныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Интегрируя вновь полученныя равенства еще одинъ разъ, получаемъ искомое значеніе функціи H

$$H = \sum_{i=1}^{n} X_i p_{i+1} + X,$$

при чемъ X обозначаетъ новую произвольную функцію. Такимъ образомъ, мы получаемъ прежній результатъ: *чтобы данное уравненіе (1) допускало полное рѣшеніе С. Ли $n-1$-аго класса, оно должно приводиться къ линейному уравненію относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ слѣдующаго вида*

$$p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \ldots + X_{n-1} p_n + X = 0,$$

гдѣ коэффиціенты $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$, X являются функціями перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

То же самое предложеніе имѣетъ мѣсто и для производныхъ уравненій С. Ли, заключающихъ перемѣнную величину z. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ однако всѣ искомыя функціи, число которыхъ теперь становится равнымъ n,

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n \tag{6}$$

зависятъ также отъ перемѣнной z и опредѣляются слѣдующимъ уравненіемъ (см. n^0 4, глава II)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \left(\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Такъ какъ функціи Φ_s не должны зависѣть отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, то искомые интегралы (6) послѣдняго уравне-

нія удовлетворяютъ также уравненіямъ, которыя получаются дифференцированіемъ послѣдняго по всѣмъ перемѣннымъ $p_2, p_3, \dots p_n$. Получаемыя такимъ образомъ уравненія, послѣ приведенія, принимаютъ слѣдующій видъ

$$\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} p_s \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$k = 2, 3, \dots n.$$

Отсюда, при помощи разсужденій аналогичныхъ предыдущимъ, получаются тѣ же уравненія (5). Поэтому мы приходимъ къ прежнему заключенію, что *производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, допускающее полные интегралы С. Ли $n-1$-аго класса, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, при чемъ коэффиціенты этого уравненія зависятъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса и перемѣнной z.*

2. Наши дальнѣйшія изслѣдованія начнемъ съ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ простѣйшихъ частныхъ случаевъ. Пусть имѣемъ производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, независящее отъ перемѣнной z,

$$p_1 + H\ (x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = 0. \tag{7}$$

Такъ какъ данное уравненіе представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно перемѣнной p_1, т. е. заключаетъ каноническія перемѣнныя второго класса, то, согласно съ предыдущимъ (см. $n^0 5$, глава II), разсматриваемое уравненіе (7) не имѣетъ полнаго интеграла С. Ли третьяго класса. Чтобы имѣть полные интегралы С. Ли второго класса, разсматриваемое уравненіе, на основаніи только что доказаннаго предложенія, должно быть линейнымъ относительно перемѣнныхъ величинъ p_1, p_2, p_3.

Остается, наконецъ, изслѣдовать третій возможный случай, когда существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго уравненія (7).

Составляемъ соотвѣтствующее ему линейное уравненіе

$$(p_1 + H,\ F) = 0.$$

Чтобы существовалъ искомый интегралъ уравненія (7), послѣднее линейное уравненіе должно имѣть два интеграла F_1 и F_2 такихъ, чтобы совокупность уравненій (7)-ого и двухъ слѣдующихъ

$$F_1\ (x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_1,$$

$$F_2\ (x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_2.$$

опредѣляла полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго производнаго уравненія (7), гдѣ C_1 и C_2—двѣ произвольныя постоянныя. Для этого должны существовать слѣдующія равенства

$$(p_1 + H,\ F_1) = 0, \tag{8}$$

$$(p_1 + H,\ F_2) = 0,\ (F_1,\ F_2) = 0, \tag{9}$$

и кромѣ того функція F_2 должна быть связна съ функціей F_1 зависимостью

$$F_2 = \Phi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1).$$

Оба уравненія (9) преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ. Предполагая

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtrless 0,$$

принимаемъ F_1 за новую перемѣнную вмѣсто p_2. Такъ какъ, въ силу предыдущей зависимости между F_2 и F_1, функція F_2 выражается въ новыхъ перемѣнныхъ только черезъ величины x_1, x_2, x_3 и F_1, то формулы преобразованія уравненій (9) къ новымъ перемѣннымъ становятся

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_i},$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_s}.$$

$$s = 2,\ 3.$$

Поэтому преобразованныя уравненія (9), въ силу уравненія (8), принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{3} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{3} Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

при чемъ коэффиціенты X_s, Y_s представляютъ функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, F_1 и p_3, которыя получаются соотвѣтственно изъ выраженій производныхъ

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

замѣной въ нихъ значенія прежней перемѣнной p_2 черезъ новую перемѣнную F_1.

Такъ какъ искомое значеніе функціи Φ не зависитъ отъ перемѣнной p_3, то очевидно функція Φ должна удовлетворять также слѣдующимъ уравненіямъ, которыя получаются изъ уравненій (10) дифференцированіемъ ихъ по перемѣнной p_3,

$$\sum_{s=2}^{3} \frac{\partial X_s}{\partial p_3}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{3} \frac{\partial Y_s}{\partial p_3}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Въ виду того, что система (10) допускаетъ всего одинъ только интегралъ, отличный отъ F_1, то послѣднія два уравненія должны представлять слѣдствія уравненій (10). Поэтому имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\frac{\frac{\partial X_2}{\partial p_3}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial X_3}{\partial p_3}}{Y_3}, \quad \frac{\frac{\partial Y_2}{\partial p_3}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial Y_3}{\partial p_3}}{Y_3}. \tag{11}$$

Послѣднее изъ этихъ двухъ равенствъ (11) даетъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial p_3} lg \frac{Y_2}{Y_3} = 0,$$

интегрированіе котораго показываетъ, что отношеніе $\frac{Y_2}{Y_3}$ представляетъ произвольную функцію перемѣнныхъ величинъ x_1, x_2, x_3 и F_1, независящую отъ перемѣнной p_3. Такимъ образомъ получается зависимость

$$Y_2 = \varphi\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, F_1)\; Y_3, \tag{12}$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ. Поэтому, на основаніи послѣдняго равенства (12), первое уравненіе (11) приводится къ слѣдующему виду

$$Y_3\left(\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi\frac{\partial X_3}{\partial p_3}\right) = 0.$$

Если предположить, что первый множитель послѣдняго равенства обращается въ нуль, тогда, въ силу уравненія (12), получаемъ

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0.$$

Послѣднія равенства приводятъ къ заключенію, что функція F_1, внутри нашей области измѣненія перемѣнныхъ, не зависитъ отъ перемѣнныхъ p_2 и p_3, что противно введенному выше условію $\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtrless 0$.

Отбрасывая поэтому сдѣланное предположеніе, приравниваемъ нулю второй множитель разсматриваемаго равенства и получаемъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} = 0,$$

которое приводится къ виду

$$\frac{\partial}{\partial p_3}(X_2 - \varphi X_3) = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, заключаемъ, что выраженіе въ скобкахъ представляетъ произвольную функцію перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3 и F_1, т. е.

$$X_2 - \varphi X_3 = \psi\,(x_1, x_2, x_3, F_1), \tag{13}$$

при чемъ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ.

Въ силу неравенства $Y_3 \gtrless 0$, разрѣшая уравненія (10) относительно производныхъ $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ и принимая во вниманіе равенства (12)—(13), приводимъ уравненія (10) къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi\,(x_1, x_2, x_3, F_1)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi\,(x_1, x_2, x_3, F_1)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Такъ какъ послѣдняя система уравненій должна быть нормальной, то отсюда слѣдуетъ, что функціи ψ и φ удовлетворяютъ условію

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \tag{15}$$

Возвращаясь въ уравненіяхъ (12) и (13) къ прежнимъ перемѣннымъ, т. е. совершая обратную замѣну перемѣнной F_1 черезъ p_2, мы должны разсматривать въ послѣднихъ уравненіяхъ величину F_1 какъ функцію перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, p_2, p_3; подставляя, наконецъ, значенія выраженій X_s Y_s, мы получаемъ систему слѣдующихъ двухъ уравненій, опредѣляющихъ функціи H и F_1.

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} - \varphi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1)\ \frac{\partial H}{\partial p_3} = \psi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \varphi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1)\ \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0.$$

Послѣднія уравненія принадлежатъ къ якобіевскому виду, представляющему частный случай дифференціальныхъ уравненій, теорія которыхъ изложена въ третьей главѣ настоящаго изслѣдованія. Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ интегрированію которой приводятся предыдущія уравненія, становится

$$dp_2 = \frac{dp_3}{-\varphi} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0}.$$

Система трехъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_1 = C_1,\ H - \psi p_2 = C_2,$$

$$p_3 + \varphi p_2 = C_3$$

гдѣ C_1, C_2 и C_3 обозначаютъ три произвольныя постоянныя величины. Поэтому искомыя значенія функцій H и F_1 опредѣляются уравненіями

$$H = \psi p_2 + \Pi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ p_3 + \varphi p_2),$$

$$F_1 = \Pi_1\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ p_3 + \varphi p_2), \tag{16}$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ, при чемъ выраженіе H зависитъ отъ значенія функціи F_1, черезъ посредство функцій ψ и φ.

Кромѣ того обѣ функціи H и F_1 удовлетворяютъ уравненію (8). Послѣднее мы можемъ разсматривать какъ уравненіе, служащее для опредѣленія произвольной функціи Π_1.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Производное уравненіе (7), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса, имѣетъ слѣдующій видъ

$$p_1 + \psi p_2 + \Pi (x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2) = 0,$$

при чемъ функціи ψ, φ связаны уравненіемъ (15), а функція F_1 опредѣляется уравненіями (8)-ымъ и (16)-ымъ. Искомый полный интегралъ опредѣляется функціей F_1 и интеграломъ системы (14).

Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Предположимъ, что функціи ψ и φ не зависятъ отъ функціи F_1 и имѣютъ слѣдующія значенія, удовлетворяющія условію (15)-ому,

$$\psi = 0, \quad \varphi = 1.$$

Если дать функціи Π значеніе $x_2 \, (p_2 + p_3)^2$, то соотвѣтствующее производное уравненіе С. Ли становится

$$p_1 + x_2 \, (p_2 + p_3)^2 = 0. \tag{17}$$

Соотвѣтствующее равенство (8) даетъ, для опредѣленія функціи Π_1, представляющей значеніе функціи F_1, слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + 2x_2 u \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} + 2x_2 u \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} - u_2 \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} = 0,$$

гдѣ перемѣнная величина u имѣетъ значеніе

$$u = p_2 + p_3.$$

Поэтому общій видъ функціи F_1 выражается слѣдующей формулой

$$F_1 = \Pi_1 \left[x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3}, \; x_2 \, (p_2 + p_3)^2, \; x_3 - x_2 \right],$$

при чемъ Π_1 представляетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ. Наконецъ, уравненія (14) опредѣляютъ слѣдующимъ образомъ функцію Φ

$$\Phi = \Pi_2 \, (x_3 - x_2, F_1),$$

гдѣ Π_2—также произвольная функція входящихъ въ нее аргументовъ.

Приравнявъ двумъ различнымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ функціи F_1 и Φ, мы получаемъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (17), систему, опредѣляющую искомый полный интегралъ С. Ли. Однако для этого достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ какихъ-либо

Томъ IX, № 3.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 4 и 5.

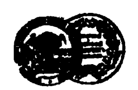
СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 4 и 5.

ХАРЬКОВЪ.



Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).


1905.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ.*

двухъ различныхъ частныхъ значеній произвольныхъ функцій Π_1 и Π_2. Такъ, напримѣръ, послѣднія два уравненія замѣнимъ слѣдующими двумя равенствами

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \; x_3 - x_2 = C_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 двѣ различныя произвольныя постоянныя величины. Послѣднія два уравненія, совмѣстно съ даннымъ (17)-ымъ, приводятся къ виду

$$x_3 = x_2 + C_2,$$

$$p_1 = -\frac{x_2}{(x_1 - C_1)^2}, \quad p_2 = \frac{1}{x_1 - C_1} - p_3.$$

Поэтому послѣднее четвертое уравненіе искомаго интегральнаго собранія опредѣляется интегрированіемъ точнаго дифференціала

$$dz = -\frac{x_2\, dx_1}{(x_1 - C_1)^2} + \frac{dx_2}{x_1 - C_1},$$

которое приводитъ къ искомому уравненію

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3,$$

гдѣ C_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Такимъ образомъ совокупность послѣдняго уравненія, совмѣстно съ тремя предыдущими, представляетъ искомое полное интегральное собраніе С. Ли перваго класса даннаго производнаго уравненія (17).

3. Пусть имѣемъ производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ пяти измѣреній

$$p_1 + H\ (x_1, x_2, x_3, x_4, p_2, p_3, p_4) = 0. \tag{18}$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе заключаетъ каноническія перемѣнныя второго класса, то, слѣдовательно, не допускаетъ полнаго интеграла С. Ли четвертаго класса.

Для того, чтобы имѣть полные интегралы третьяго класса, разсматриваемое уравненіе (18), какъ хорошо извѣстно, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Такимъ образомъ остается изслѣдовать только два случая, когда для даннаго уравненія (18) существуютъ полные интегралы С. Ли второго и перваго классовъ.

Искомый интегралъ второго класса опредѣляется очевидно тремя функціями

$$F_1, F_2, F_3,$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$\left.\begin{array}{c} (p_1 + H, F_i) = 0, \\ i = 1, 2, 3, \\ (F_1, F_r) = 0, \\ r = 2, 3, \end{array}\right\} \qquad (19)$$

при чемъ функціи F_2 и F_3 находятся въ инволюціи и связаны слѣдующимъ образомъ съ F_1

$$F_{k+1} \equiv \Phi_k\ (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1);$$
$$k = 1, 2.$$

Изъ послѣднихъ значеній функцій Φ_1 и Φ_2 становится очевиднымъ, что условіе инволюціи обоихъ функцій F_2 и F_3 удовлетворяется тождественно.

Пусть имѣемъ неравенство

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtrless 0. \qquad (20)$$

Принимая въ такомъ случаѣ F_1 за новую перемѣнную величину вмѣсто p_2, выводимъ изъ равенства (19) слѣдующую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной неизвѣстной функціи Φ, для опредѣленія обѣихъ функцій Φ_1 и Φ_2,

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum\limits_{s=2}^{4} X_s \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ \sum\limits_{s=2}^{4} Y_s \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0. \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Коэффиціенты послѣднихъ уравненій X_s, Y_s имѣютъ слѣдующія значенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \quad Y_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобками обозначается результатъ указанной замѣны перемѣнной p_2 черезъ F_1.

Искомые интегралы Φ_1 и Φ_2 системы (21) не должны зависѣть отъ перемѣнныхъ p_3 и p_4. Поэтому должны существовать слѣдующія равенства, которыя получаются дифференцированіемъ уравненій (21) по перемѣннымъ p_3 и p_4,

$$\sum_{s=2}^{4} \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^{4} \frac{\partial Y_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$k = 3, 4.$$

Легко видѣть, что послѣднія равенства не могутъ представлять новыхъ уравненій, которыя служили-бы, совмѣстно съ системой (21), для опредѣленія искомыхъ функцій. Поэтому только-что полученныя четыре равенства должны представлять слѣдствія уравненій (21), и, слѣдовательно, должны имѣть мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{\frac{\partial X_2}{\partial p_k}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial X_3}{\partial p_k}}{Y_3} = \frac{\frac{\partial X_4}{\partial p_k}}{Y_4}, \\ \frac{\frac{\partial Y_2}{\partial p_k}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial Y_3}{\partial p_k}}{Y_3} = \frac{\frac{\partial Y_4}{\partial p_k}}{Y_4}, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$k = 3, 4.$$

Равенства послѣдней строки даютъ слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial}{\partial p_k} lg \frac{Y_3}{Y_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_k} lg \frac{Y_4}{Y_2} = 0,$$

$$k = 3, 4.$$

Интегрируя систему послѣднихъ четырехъ уравненій, находимъ

$$\left.\begin{aligned} Y_3 = \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1) Y_2, \\ Y_4 = \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1) Y_2, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

Принимая во вниманіе, что, внутри разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, существуетъ неравенство $Y_2 \gtrless 0$, полу-

чаемъ изъ первой строки равенствъ (22), на основаніи (23), слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial X_3}{\partial p_k} - \varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial X_4}{\partial p_k} - \varphi_2 \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = 0,$$

$$k = 3, 4,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_k}(X_3 - \varphi_1 X_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k}(X_4 - \varphi_2 X_2) = 0,$$

$$k = 3, 4.$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ зависимостямъ

$$\left.\begin{aligned} X_3 - \varphi_1 X_2 &= \psi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \\ X_4 - \varphi_2 X_2 &= \psi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

при чемъ ψ_1 и ψ_2 представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

На основаніи полученныхъ равенствъ (23) и (24), система уравненій (21) приводится къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Такъ какъ написанныя уравненія должны представлять нормальную систему, то мы получаемъ слѣдующія уравненія, для опредѣленія функцій $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Если возвратиться къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, т. е. замѣнить перемѣнную F_1 ея значеніемъ въ прежней перемѣнной p_2, то уравненія (23) и (24) даютъ слѣдующую систему, служащую для опредѣленія функцій H и F_1,

$$\frac{\partial H}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0.$$

Полученныя уравненія представляютъ систему, принадлежащую къ типу разсмотрѣнныхъ нами въ предыдущей главѣ. Соотвѣтствующія имъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ имѣютъ слѣдующій видъ

$$dp_2 = -\varphi_1 dp_3 - \varphi_2 dp_4,$$

$$dH = \psi_1 dp_3 + \psi_2 dp_4,$$

$$dF_1 = 0.$$

Общій интегралъ послѣдней системы представляется равенствами

$$F_1 = C_1,$$

$$H - \psi_1 p_3 - \psi_2 p_4 = C_2,$$

$$p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4 = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 обозначаютъ три различныя произвольныя постоянныя величины. Поэтому, внутри разсматриваемой области измѣненія перемѣнныхъ, функціи H и F_1 опредѣляются слѣдующими уравненіями

$$H = \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4), \tag{27}$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Для того, чтобы выполнить всѣ требованія нашей задачи, функція Π_1 должна удовлетворять первому уравненію (19), а функціи φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 системѣ уравненій (26).

Поэтому мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли второго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4) = 0,$$

гдѣ Π—произвольная функція, а остальныя функціи φ_1, φ_2, Φ_1, Φ_2 и F_1 опредѣляются указаннымъ выше образомъ, при помощи перваго уравненія (19) и уравненій (26)—(27). Искомый полный интегралъ опредѣляется функціей F_1 и двумя различными интегралами системы уравненій (25).

Разсмотримъ, наконецъ, условія существованія полнаго интеграла С. Ли перваго класса даннаго уравненія (18). Этотъ интегралъ опредѣляется тремя функціями

$$F_1, F_2, F_3,$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned} &(p_1+H,\ F_i)=0,\\ &\quad i=1,2,3,\\ &(F_1,\ F_2)=0,\\ &(F_k,\ F_3)=0,\\ &\quad k=1,2, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

при чемъ функція F_3 связана слѣдующимъ образомъ съ F_1 и F_2

$$F_3\equiv\Phi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ F_1,\ F_2).$$

Пусть имѣемъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2,\ p_3}\right)\gtrless 0. \qquad (29)$$

Принимая F_1 и F_2 за новыя независимыя перемѣнныя вмѣсто p_2 и p_3, выводимъ изъ равенствъ (28) слѣдующую систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, для опредѣленія функціи Φ,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\sum_{s=2}^{4}X_s\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,\\ &\sum_{s=2}^{4}Y_s\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,\\ &\sum_{s=2}^{4}Z_s\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

гдѣ введены обозначенія

$$X_s=\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right),\quad Y_s=\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s}\right),\quad Z_s=\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ произведенной замѣны перемѣнныхъ.

Такъ какъ функція Φ не зависитъ отъ перемѣнной p_4, то существуютъ еще слѣдующія равенства

$$\sum_{s=2}^{4} \frac{\partial X_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^{4} \frac{\partial Y_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{4} \frac{\partial Z_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Послѣднія равенства не должны давать новыхъ уравненій, отличныхъ отъ (30)-ыхъ, и представляютъ, стало-быть, слѣдствіе послѣднихъ уравненій. Поэтому получаются слѣдующія равенства, опредѣляющія функціи X_s, Y_s, Z_s,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial p_4} & \frac{\partial X_3}{\partial p_4} & \frac{\partial X_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Всѣ опредѣлители первыхъ частей написанныхъ равенствъ отличаются другъ отъ друга только элементами первой строки. Поэтому соотвѣтствующіе послѣднимъ опредѣлители-миноры имѣютъ одни и тѣ же значенія, которыя назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$A, B, C,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$A = Y_3 Z_4 - Y_4 Z_3,$$

$$B = Y_4 Z_2 - Y_2 Z_4,$$

$$C = Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2.$$

Въ силу послѣднихъ обозначеній, предыдущія три равенства представляются соотвѣтственно въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial X_2}{\partial p_4}+B\frac{\partial X_3}{\partial p_4}+C\frac{\partial X_4}{\partial p_4}&=0,\\ A\frac{\partial Y_2}{\partial p_4}+B\frac{\partial Y_3}{\partial p_4}+C\frac{\partial Y_4}{\partial p_4}&=0,\\ A\frac{\partial Z_2}{\partial p_4}+B\frac{\partial Z_3}{\partial p_4}+C\frac{\partial Z_4}{\partial p_4}&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

На основаніи свойствъ опредѣлителей, мы имѣемъ два тождества

$$\left.\begin{aligned} AY_2+BY_3+CY_4&=0,\\ AZ_2+BZ_3+CZ_4&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Дифференцируя послѣднія по перемѣнной p_4, получаемъ новыя тождества, на основаніи которыхъ послѣднія два уравненія (31) преобразовываются въ слѣдующія

$$Y_2\frac{\partial A}{\partial p_4}+Y_3\frac{\partial B}{\partial p_4}+Y_4\frac{\partial C}{\partial p_4}=0,$$

$$Z_2\frac{\partial A}{\partial p_4}+Z_3\frac{\partial B}{\partial p_4}+Z_4\frac{\partial C}{\partial p_4}=0.$$

Въ силу введенныхъ выше обозначеній A, B, C. черезъ величины всѣхъ Y_s и Z_s, легко вывести слѣдующія два уравненія изъ двухъ предыдущихъ

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial p_4}}{A}=\frac{\frac{\partial B}{\partial p_4}}{B}=\frac{\frac{\partial C}{\partial p_4}}{C}.$$

Эти два уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial}{\partial p_4}\,lg\frac{A}{C}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial p_4}\,lg\frac{B}{C}=0.$$

Интегрируя написанныя уравненія, находимъ

$$\left.\begin{aligned} A&=\varphi_1\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,F_1,\,F_2).C,\\ B&=\varphi_2\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,F_1,\,F_2).C, \end{aligned}\right| \qquad (33)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ двѣ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

Такъ какъ, въ силу неравенства (29), опредѣлитель C отличенъ отъ нуля, то, на основаніи полученныхъ равенствъ (33), первое уравненіе (31) становится

$$\varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_4} + \varphi_2 \frac{\partial X_3}{\partial p_4} + \frac{\partial X_4}{\partial p_4} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_4} (\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4) = 0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія представляетъ новое равенство

$$\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4 = \psi\ (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2), \tag{34}$$

гдѣ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее перемѣнныхъ величинъ.

Наконецъ, на основаніи уравненій (33) и условія $C \gtrless 0$, равенства (32) даютъ слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} Y_4 + \varphi_1 Y_2 + \varphi_2 Y_3 = 0, \\ Z_4 + \varphi_1 Z_2 + \varphi_2 Z_3 = 0. \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

Исключая выраженія X_4, Y_4, Z_4, опредѣляемыя уравненіями (34) и (35), изъ системы (30), преобразовываемъ ее къ новому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) X_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) X_3 = 0,$$

$$Y_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + Y_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0,$$

$$Z_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + Z_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0.$$

Въ силу неравенства нулю опредѣлителя C, выраженія, въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ, коэффиціентами при которыхъ служатъ Y_2 и Z_2, Y_3 и Z_3, тождественно равны нулю, и мы получаемъ такимъ образомъ систему уравненій, для опредѣленія искомой функціи Φ,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0, \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0, \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{36}
$$

Такъ какъ послѣднія уравненія должны представлять нормальную систему, то функціи ψ, φ_1 и φ_2 должны удовлетворять тремъ условіямъ

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+1}} + \varphi_k \frac{\partial \psi}{\partial x_4} = 0, \\
&\qquad\qquad k = 1, 2, \\
&\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} = 0.
\end{aligned}
\right| \tag{37}
$$

Наконецъ, для опредѣленія значеній функцій H, F_1 и F_2, обращаемся къ уравненіямъ (34) и (35). Возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ p_2 и p_3 и внося значенія всѣхъ X_s, Y_s и Z_s, получаемъ изъ послѣднихъ уравненій слѣдующую систему якобіевскаго вида, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_3} = \psi, \\
&\frac{\partial F_1}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0, \\
&\frac{\partial F_2}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_2}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_3} = 0.
\end{aligned}
$$

Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій становится

$$
dp_4 = \frac{dp_2}{\varphi_1} = \frac{dp_3}{\varphi_2} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0} = \frac{dF_2}{0}.
$$

Интегралы послѣдней системы представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$
F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad H - \psi p_4 = C_3,
$$

$$
p_2 - \varphi_1 p_4 = C_4, \quad p_3 - \varphi_2 p_4 = C_5,
$$

гдѣ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 обозначаютъ пять произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Поэтому искомыя функціи H, F_1 и F_2 выражаются слѣдующимъ образомъ

$$H = \psi p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_2 = \Pi_1\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4).$$

гдѣ Π, Π_1 и Π_2 обозначаютъ три произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Кромѣ того, чтобы выполнять всѣ требованія разсматриваемой задачи, функціи Π_1 и Π_2 должны удовлетворять первому, второму и четвертому уравненіямъ системы (28), а функціи ψ, φ_1, φ_2 уравненіямъ (37)

Итакъ, *производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ*

$$p_1 + \psi p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4) = 0,$$

гдѣ Π—произвольная функція, а остальныя функціи опредѣляются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ опредѣляется общими функціями F_1, F_2 и интеграломъ системы линейныхъ уравненій (36).

4. Приведенныя выше вычисленія легко распространяются на производныя уравненія С. Ли въ пространствѣ сколькихъ угодно измѣреній и позволяютъ составить общій видъ уравненій, допускающихъ полные интегралы того или другого класса.

Пусть имѣемъ, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, производное уравненіе С. Ли

$$p_1 + H\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{38}$$

Полный интегралъ С. Ли q-аго класса послѣдняго уравненія опредѣляется $n-1$ функціями въ инволюціи

$$F_1,\ F_2, \ldots F_{n-1},$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$(p_1 + H_1, F_k) = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots n-1,$$

и связанными между собой зависимостями слѣдующаго вида

$$F_{n-q+i-1} \equiv \Phi_i \ (x_1, x_2, \ldots x_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-q-1}),$$

$$i = 1, 2, \ldots q.$$

Предположимъ, что существуетъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \ldots p_{n-q}}\right) \gtrless 0. \tag{39}$$

Принимая величины $F_1, F_2, \ldots F_{n-q-1}$ за новыя независимыя перемѣнныя вмѣсто $p_2, p_3, \ldots p_{n-q}$, составляемъ слѣдующую систему линейныхъ уравненій, для опредѣленія всѣхъ функцій Φ_i,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{n} Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sigma = 1, 2, \ldots n-q-1, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_s \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ выполненной замѣны перемѣнныхъ.

Такъ какъ функціи Φ_i не зависятъ отъ перемѣнныхъ величинъ

$$p_{n-q+1}, \ p_{n-q+2}, \ldots p_n,$$

то дифференцируя предыдущія равенства по послѣднимъ перемѣннымъ, находимъ

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sigma = 1, 2, \ldots n-q-1, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до q.

Послѣднія равенства не должны давать новыхъ уравненій, для опредѣленія функціи Φ. Поэтому каждое изъ этихъ равенствъ должно являться слѣдствіемъ послѣднихъ $n-q-1$ уравненій (40).

Начнемъ съ преобразованія послѣднихъ уравненій. Назовемъ черезъ Δ слѣдующій опредѣлитель

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{13} & \dots Y_{1,\,n-q} \\ Y_{22} & Y_{23} & \dots Y_{2,\,n-q} \\ . & . & \dots . \\ . & . & \dots . \\ Y_{n-q-1,\,2} & Y_{n-q-1,\,3} & \dots Y_{n-q-1,\,n-q} \end{vmatrix}$$

и черезъ Δ_{rk} обозначимъ опредѣлитель, который получается изъ послѣдняго замѣной его элементовъ r-аго столбца соотвѣтственно слѣдующими величинами

$$Y_{1,\,n-q+k},\; Y_{2,\,n-q+k}, \dots Y_{n-q-1,\,n-q+k}.$$

Благодаря введеннымъ обозначеніямъ, послѣднія $n-q-1$ уравненій (40), принимая во вниманіе неравенство (39), или $\Delta \gtrless 0$, преобразовываются къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} = -\sum_{k=1}^{q} \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}},$$

$$r = 1, 2, \dots n-q-1.$$

Такъ какъ равенства (41) должны представлять слѣдствія послѣднихъ уравненій, то мы получаемъ слѣдующія равенства, которымъ удовлетворяютъ функціи X_s и $Y_{\sigma s}$,

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ &\Delta \frac{\partial Y_{\sigma,\,n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} \frac{\partial Y_{\sigma,\,r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ &k = 1, 2, \dots q, \quad \sigma = 1, 2, \dots n-q-1, \\ &i = 1, 2, \dots q. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Въ силу свойствъ опредѣлителей, существуютъ тождества

$$\Delta Y_{\sigma,\, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} Y_{\sigma,\, r+1} = 0, \tag{43}$$

для всѣхъ значеній σ, отъ 1 до $n-q-1$, и значеній k, отъ 1 до q.

Дифференцируя послѣднія тождества по перемѣннымъ

$$p_{n-q+1},\; p_{n-q+2}, \ldots p_n,$$

получаемъ рядъ новыхъ тождествъ, на основаніи которыхъ уравненія второй строки системы (42) преобразовываются въ слѣдующія

$$\left. \begin{array}{c} Y_{\sigma,\, n-q+k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial p_{n-q+i}} - \sum\limits_{r=1}^{n-q+1} Y_{\sigma,\, r+1} \dfrac{\partial \Delta_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ \sigma = 1,\, 2, \ldots n-q-1, \end{array} \right\} \tag{44}$$

при чемъ k принимаетъ значенія, отъ 1 до q, и i, отъ 1 до $n-q-1$.

Система $n-q-1$ уравненій (44) линейна относительно $n-q-1$ величинъ

$$\frac{\partial \Delta_{1k}}{\partial p_{n-q+i}},\; \frac{\partial \Delta_{2k}}{\partial p_{n-q+i}}, \ldots \frac{\partial \Delta_{n-q-1,\, k}}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при послѣднихъ величинахъ въ разсматриваемыхъ уравненіяхъ равенъ Δ и, стало-быть, отличенъ отъ нуля. Поэтому уравненія (44) даютъ

$$\frac{\partial \Delta_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{n-q+i}},$$
$$r = 1,\, 2, \ldots n-q-1,$$

при чемъ k принимаетъ всѣ значенія, отъ 1 до q, и i, отъ 1 до $n-q-1$.

Изъ послѣднихъ уравненій выводятся слѣдующія

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+i}} lg \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} = 0$$
$$i = 1,\, 2, \ldots q,$$

для всѣхъ значеній r, отъ 1 до $n-q-1$, и k, отъ 1 до q.

Интегрируя послѣднія уравненія, находимъ

$$\left. \begin{array}{c} \Delta_{rk} = \varphi_{rk}\, (x_1,\, x_2, \ldots x_n,\, F_1,\, F_2, \ldots F_{n-q+1})\, \Delta, \\ r = 1,\, 2, \ldots n-q, \quad k = 1,\, 2, \ldots q, \end{array} \right\} \tag{45}$$

гдѣ φ_{rk} представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Поэтому уравненія первой строки системы (42) становятся

$$\frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+k}}\left(X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1}\right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots q, \quad k = 1, 2, \ldots q.$$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ

$$\left.\begin{array}{c} X_{n-q+k} - \sum\limits_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1} = \psi_k\ (x_1, x_2, \ldots x_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-q-1}), \\ k = 1, 2, \ldots q, \end{array}\right\} \quad (46)$$

при чемъ ψ_k обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

Наконецъ, равенства (43), на основаніи полученныхъ выше уравненій (45), даютъ новыя зависимости

$$\left.\begin{array}{c} Y_{\sigma, n-q+k} - \sum\limits_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma, r+1} = 0, \\ \sigma = 1, 2, \ldots n-q-1, \quad k = 1, 2, \ldots q. \end{array}\right\} \quad (47)$$

На основаніи полученныхъ уравненій (46) и (47), система уравненій (40) приводится къ такому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{q} \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{r=1}^{n-q-1} X_{r+1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}}\right) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{n-q+1} Y_{\sigma, r+1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}}\right) = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots n-q-1.$$

Такъ какъ опредѣлитель Δ отличенъ отъ нуля, то очевидно, что эта система $n-q$ уравненій преобразовывается въ слѣдующую

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{q}\psi_k\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}}=0,\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}}+\sum_{k=1}^{b}\varphi_{rk}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}}=0,\\
&r=1,2,\ldots n-q-1.
\end{aligned}\right\}\qquad(48)$$

Вслѣдствіе нормальности послѣдней системы, функціи ψ_k, φ_{rk} удовлетворяютъ слѣдущимъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_1}-\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{r+1}}+\sum_{k=1}^{q}\left(\psi_k\frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}}-\varphi_{rk}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-q+k}}\right)=0,\\
&\frac{\partial \varphi_{\sigma i}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{\sigma+1}}+\sum_{k=1}^{q}\left(\varphi_{rk}\frac{\partial \varphi_{\sigma i}}{\partial x_{n-q+k}}-\varphi_{\sigma k}\frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}}\right)=0,\\
&i=1,2,\ldots q,
\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

при чемъ r и σ принимаютъ всѣ возможныя, одновременно различныя значенія, отъ 1 до $n-q-1$.

Подставляя далѣе значенія всѣхъ функцій X_s и $Y_{\sigma,s}$ въ уравненія (46) и (47) и возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, мы получаемъ, для опредѣленія функцій H, F_1, F_2, $\ldots F_{n-q-1}$, слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій, принадлежащихъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ предыдущей третьей главѣ,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}=\psi_k,\\
&\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-q+k}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}}=0,\\
&k=1,2,\ldots q,\qquad \sigma=1,2,\ldots n-q-1.
\end{aligned}$$

Соотвѣтствующія линейныя уравненія съ частными производными одной функціи f имѣютъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-q+k}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial f}{\partial p_{r+1}}+\psi_k\frac{\partial f}{\partial H}=0,$$

$$k=1,2,\ldots q,$$

и образуютъ очевидно якобіевскую систему, такъ какъ эти уравненія не зависятъ отъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial F_\sigma}$, а коэффиціенты уравненій не заключаютъ перемѣнныхъ, по которымъ взяты частныя производныя функціи f. Поэтому изслѣдуемая задача интегрированія приводится къ системѣ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dp_{r+1} = -\sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk}\, dp_{n-q+k},$$

$$dH = \sum_{k=1}^{q} \psi_k\, dp_{n-q+k},$$

$$r = 1,\ 2, \ldots n-q-1,$$

$$dF_\sigma = 0,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1.$$

Полная система интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_\sigma = C_\sigma,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1,$$

$$H - \sum_{k=1}^{q} \psi_k p_{n-q+k} = C_{n-q},$$

$$p_{r+1} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk}\ p_{n-q+k} = C_{n-q+r},\ .$$

$$r = 1,\ 2, \ldots n-q-1.$$

Слѣдовательно, искомыя функціи имѣютъ значенія

$$H = \sum_{k=1}^{q} \psi_k p_{n-q+k} + \Pi(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \ldots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\, k} p_{n-q+k}),$$

$$F_\sigma = \Pi_\sigma(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k},\ p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \ldots$$

$$\ldots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\, k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1,$$

гдѣ Π, Π_1, $\Pi_2, \ldots \Pi_{n-q-1}$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Чтобы удовлетворить требованіямъ задачи функціи Π_s должны выполнять всѣ указанныя выше условія инволюціи, а всѣ функціи φ и ψ должны опредѣляться системой (49)-ой.

Такимъ образомъ получается слѣдующій результатъ:

Производное уравненіе (38), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1+\sum_{k=1}^{q}\psi_k p_{n-q+k}+\Pi(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_2+\sum_{k=1}^{q}\varphi_{1k}p_{n-q+k},$$

$$p_3+\sum_{k=1}^{q}\varphi_{2k}p_{n-q+k},\ldots p_{n-q}+\sum_{k=1}^{q}\varphi_{n-q-1,\,k}p_{n-q+k})=0,$$

гдѣ Π представляетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ, а остальныя функціи опредѣляются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ выражается при помощи функцій F_1, $F_2, \ldots F_{n-q-1}$ и q различныхъ интеграловъ системы уравненій (48).

5. Пусть имѣемъ, наконецъ, систему производныхъ уравненій въ инволюціи

$$\left.\begin{array}{c} p_k+H_k(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ldots p_n)=0, \\ k=1,\ 2,\ldots m. \end{array}\right\} \qquad (50)$$

Полный интегралъ С. Ли q-аго класса, при условіи, что $q<n-m$ (см. стр. 62), опредѣляется $n-m$ функціями въ инволюціи

$$F_1,\ F_2,\ldots F_{n-m},$$

удовлетворяющими уравненіямъ

$$\left.\begin{array}{c} (p_k+H_k,\ F_s)=0, \\ k=1,\ 2,\ldots m,\quad s=1,\ldots n-m, \end{array}\right\} \qquad (51)$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-m-q+i}\equiv\Phi_i(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ F_1,\ F_2,\ldots F_{n-m-q}),$$

$$i=1,\ 2,\ldots q.$$

Предполагая слѣдующій функціональный опредѣлитель отличнымъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}}{p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{n-q}}\right),$$

принимаемъ величины $F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}$ за новыя независимыя перемѣнныя вмѣсто $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{n-q}$. Въ такомъ случаѣ система уравненій, для опредѣленія функцій Φ_i, становится

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum\limits_{s=m+1}^{n} X_{ks} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ \qquad k = 1, 2, \dots m, \\ \sum\limits_{s=m+1}^{n} Y_{\sigma s} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ \qquad \sigma = 1, 2, \dots n-m-q, \end{array}\right\} \tag{52}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_{ks} \equiv \left(\frac{\partial H_k}{\partial p_s}\right), \quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки имѣютъ прежнее значеніе. При помощи разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, составляются равенства

$$\sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial X_{ks}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots q,$$

которыя должны быть слѣдствіями послѣднихъ $n-m-q$ уравненій системы (52).

Не вдаваясь въ подробности вычисленій, которыя весьма немногимъ отличаются отъ вычисленій предыдущаго n^0—a, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Система производныхъ уравненій въ инволюціи (50), для которой существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k+\sum_{i=1}^{q}\psi_{ki}p_{n-q+i}+\Pi_k(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_{m+1}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{1i}p_{n-q+i},$$

$$p_{m+2}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{2i}p_{n-q+i},\dots,\ p_{n-q}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{n-m-q,\,i}p_{n-q-i})=0,$$

$$k=1,\ 2,\dots m,$$

гдѣ $\Pi_1,\ \Pi_2,\dots\Pi_m$ *обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ, а всѣ* $\psi_{ki},\ \varphi_{1i},\ \varphi_{2i},\dots\varphi_{n-m-q,\,i}$ *представляютъ функціи перемѣнныхъ величинъ*

$$x_1,\ x_2,\dots x_n,\ F_1,\ F_2,\dots F_{n-m-q}$$

и удовлетворяютъ уравненіямъ, которыя вытекаютъ изъ условій нормальности слѣдующей якобіевской системы

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{q}\psi_{ki}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+i}}=0,\\&\frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+r}}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{ri}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+i}}=0,\\&k=1,\ 2,\ \dots m,\quad r=1,\ 2,\dots n-m-q.\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

Функціи $F_1,\ F_2,\dots F_{n-m-q}$ *представляются въ видѣ*

$$F_\sigma=\Pi'_\sigma(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_{m+1}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{1i}p_{n-q+i},$$

$$p_{m+2}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{2i}p_{n-q+i},\dots,\ p_{n-q}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{n-m-q,\,i}p_{n-q+i}),$$

$$\sigma=1,\ 2,\dots n-m-q,$$

гдѣ Π'_σ *обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ и кромѣ того должны удовлетворять уравненіямъ (51) и условію инволюціи всѣхъ функцій* F_σ. *Искомый полный интегралъ опредѣляется совокупностью послѣднихъ n—m—q функцій и q различными интегралами системы уравненій (53).*

6. До сихъ поръ мы разсматривали только уравненія, которыя не заключаютъ перемѣнной z. Пусть имѣемъ, наконецъ, уравненіе, зависящее отъ z,

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, p_3, \dots p_n) = 0. \tag{54}$$

Полный интегралъ С. Ли q-аго класса послѣдняго уравненія опредѣляется n функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots F_n,$$

удовлетворяющими условіямъ (см. $n^0 4$, второй главы)

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - H\frac{\partial F_s}{\partial z} + [H, F_s] = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots n,$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots x_n, z, F_1, F_2, \dots F_{n-q-1}),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots q.$$

Предполагая существованіе неравенства

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots p_{n-q}}\right) \gtrless 0, \tag{55}$$

составляемъ, какъ и въ прежнихъ случаяхъ, слѣдующую систему уравненій, которымъ удовлетворяютъ всѣ функціи Φ_{i+1},

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + X\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{n} Y_{\sigma s}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + Y_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \dots n-q-1,$$

гдѣ коэффиціенты X_s, $Y_{s\sigma}$ имѣютъ прежнія значенія и

$$X = \left(\sum_{s=2}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_s}p_s - H\right),$$

$$Y_\sigma = \left(\sum_{s=2}^{n}\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s}p_s\right).$$

Легко вывести, при помощи вычисленій, аналогичныхъ предыдущимъ, слѣдующія зависимости

$$\left.\begin{array}{c}
X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \psi_{rk} X_{r+1} = \psi_k, \\
X - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_r X_{r+1} = \psi, \\
Y_{\sigma,\, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma,\, r+1} = 0, \\
Y_\sigma - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_r Y_{\sigma,\, r+1} = 0, \\
k = 1, 2, \ldots q, \quad \sigma = 1, 2, \ldots n-q-1,
\end{array}\right\} \tag{56}$$

гдѣ обозначенія φ_{rk}, φ_r, ψ_k, ψ представляютъ произвольныя функціи величинъ

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z, F_1, F_2, \ldots F_{n-q-1}.$$

Наконецъ, уравненія, опредѣляющія искомые интегралы Φ_{i+1}, становятся

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{q} \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \varphi_r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\
r = 1, 2, \ldots n-q-1,
\end{array}\right\} \tag{57}$$

и должны представлять якобіевскую систему.

Возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, получаемъ изъ равенствъ (56), послѣ нѣкоторыхъ приведеній, слѣдующую систему уравненій

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} = \psi_k, \\
\sum_{r=1}^{n-q-1} \left(p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{ri} p_{n-q+i}\right) \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} + \\
+ \sum_{i=1}^{q} \psi_i p_{n-q+i} = H + \psi, \\
\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}} = 0, \\
\sum_{r=1}^{n-q-1} \left(p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{ri} p_{n-q+i}\right) \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}} = 0, \\
k = 1, 2, \ldots q, \quad \sigma = 1, 2, \ldots n-q-1.
\end{array}\right\} \tag{58}$$

Равенства послѣдней строки, а затѣмъ и второй преобразовываются, въ силу условія (55), въ слѣдующія уравненія

$$p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{ri} p_{n-q+i} = 0,$$

$$r = 1, 2, \ldots n-q-1,$$

$$H = \sum_{i=1}^{q} \psi_i p_{n-q+i} - \psi.$$

Какъ легко видѣть, уравненія первой строки системы (58) удовлетворяются на основаніи послѣдняго значенія функціи H. Наконецъ, уравненія третьей строки системы (58) даютъ, при помощи интегрированія,

$$F_\sigma = \Pi_\sigma (x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \ldots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\,k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots n-q-1,$$

при чемъ Π_σ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Производное уравненіе С. Ли (54), заключающее перемѣнную z, для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{i=1}^{q} \psi_i\, p_{n-q+i} = \psi,$$

при чемъ всѣ входящія функціи опредѣляются указанными выше условіями и формулами. Искомый полный интегралъ выражается при помощи $n-q-1$ послѣднихъ написанныхъ функцій F_σ и $q+1$ различныхъ интеграловъ якобіевской системы уравненій (57).

Полученное уравненіе отличается отъ прежнихъ результатовъ своей правой частью ψ, которая представляетъ произвольную функцію, зависящую отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса только черезъ посредство функцій F_σ. Это послѣднее обстоятельство находится въ тѣсной зависимости отъ того, что, во-первыхъ, разсматриваемое нами уравненіе заключаетъ перемѣнную величину z и, во-вторыхъ, разсматриваемое интегральное собраніе представляется, въ послѣднемъ случаѣ, совокупностью $n+1$ уравненій, зависящихъ также отъ перемѣнной z.

Мы не станемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изслѣдованіи уравненій, допускающихъ полные интегралы С. Ли того или другого класса. Хотя полученные результаты представляютъ искомыя уравненія, при помощи опредѣленій, выраженныхъ въ весьма общей формѣ, тѣмъ не менѣе найденныя формулы достаточно разъясняютъ нашу основную идею, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для производныхъ уравненій весьма частнаго вида. Дѣйствительно, какъ легко видѣть, всѣ полученныя нами уравненія принадлежатъ къ типу такъ называемыхъ *уравненій раздѣляющихъ перемѣнныя* [1]). Такимъ образомъ теорія С. Ли не представляетъ, для насъ, обобщенія классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, но разсматриваетъ только нѣсколько новыхъ задачъ, представляющихъ аналогію съ задачами интегрированія частныхъ дифференціальныхъ уравненій. Поэтому мы будемъ въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи лишь по столько касаться изслѣдованій С. Ли, по сколько разсматриваемые имъ вопросы послужили къ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

---

[1]) Ср. *Imschenetsky.*—Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. p. 75.

Goursat. E.—Leçons sur l'intégration des equations.... p. 152.

ГЛАВА V.

Касательныя преобразованія.

1. Поверхностный элементъ называется еще иначе *касательнымъ элементомъ*. Какъ говорятъ *касательный элементъ* принадлежитъ поверхности, кривой или точкѣ, если онъ опредѣляется точкой послѣдняго геометрическаго мѣста и касательной къ нему плоскостью, проведенной въ послѣдней точкѣ.

Мы говоримъ, что два *геометрическія мѣста* имѣютъ общій касательный элементъ, если, проходя черезъ одну и ту же точку, оба геометрическія мѣста имѣютъ въ ней общую касательную плоскость.

Аналогичнымъ образомъ два геометрическія собранія поверхностныхъ элементовъ называются *касательными*, если они имѣютъ общій поверхностный элементъ.

Всякое преобразованіе, при помощи котораго какія-либо два касательныхъ собранія преобразовываются также въ касательныя собранія, называется *касательнымъ* (или *тангенціальнымъ*) преобразованіемъ.

Послѣднія понятія распространяются на преобразованія въ пространствахъ сколькихъ угодно измѣреній.

Пусть въ пространствѣ n измѣреній перемѣнныя

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

обозначаютъ координаты поверхностнаго элемента какого-либо геометрическаго собранія. Обозначимъ новыя перемѣнныя, въ которыхъ представляется послѣднее преобразованное собраніе, черезъ

$$x_1',\ x_2', \ldots x_n',\ z',\ p_1',\ p_2', \ldots p_n'.$$

Въ виду того, что разсматриваемые нами поверхностные элементы образуютъ собраніе, то опредѣляющія ихъ, аналитически, перемѣнныя удовлетворяютъ равенству

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s = 0. \tag{1}$$

Такъ какъ преобразованная къ новымъ перемѣннымъ система поверхностныхъ элементовъ также должна представлять геометрическое собраніе, то новыя перемѣнныя должны необходимо удовлетворять условію

$$dz' - \sum_{s=1}^{n} p_s' \, dx_s' = 0. \tag{2}$$

Чтобы перейти отъ выраженія разсмотрѣннаго геометрическаго собранія въ прежнихъ перемѣнныхъ къ его представленію въ новыхъ перемѣнныхъ, т. е. чтобы совершить аналитическое преобразованіе, необходимо имѣть выраженія перемѣнныхъ одной системы черезъ другую. Предположимъ, напримѣръ, что новыя перемѣнныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ первоначальныя перемѣнныя

$$\left.\begin{aligned} x_s' &= X_s\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ z' &= Z\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ p_s' &= P_s\,(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ & s = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Такъ какъ прежнія перемѣнныя должны въ свою очередь выражаться черезъ новыя перемѣнныя, то послѣднія уравненія (3) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ x, z, p и даютъ ихъ значенія въ перемѣнныхъ x_s', z, p_s'.

Если обѣ системы разсматриваемыхъ перемѣнныхъ удовлетворяютъ зависимостямъ (1) и (2), то уравненія (3) должны для этого обладать опредѣленными свойствами, которыя легко вывести.

Равенства (3) условимся называть *формулами* или *уравненіями преобразованія* и подраздѣлять ихъ на различные классы, въ зависимости отъ числа уравненій, которыя даетъ система (3) между однѣми перемѣнными

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z, x_1', x_2', \ldots x_n', z'. \tag{4}$$

Такъ, если результатъ исключенія перемѣнныхъ p_1, $p_2, \ldots p_n$ изъ $n+1$ первыхъ уравненій (3) приводитъ къ $m+1$ зависимостямъ между предыдущими перемѣнными, то опредѣляемое формулами (3) касательное преобразованіе мы будемъ называть m-аго класса.

Наименьшимъ возможнымъ классомъ касательныхъ преобразованій является очевидно нулевой, такъ какъ изъ системы $n+1$ уравненій всегда возможно исключить n перемѣнныхъ и получить всегда одну зависимость между перемѣнными величинами (4).

Наконецъ, касательное преобразованіе n-аго класса заключаетъ $n+1$ различныхъ зависимостей между перемѣнными (4), которыя выражаютъ прежнія перемѣнныя черезъ новыя, и такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ такъ называемымъ точечнымъ преобразованіемъ перемѣнныхъ.

Введеніе въ анализъ понятій о касательныхъ преобразованіяхъ принадлежитъ Эйлеру. Затѣмъ Лежандръ и Якоби пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ нѣкоторыми касательными преобразованіями частнаго вида, когда за новыя независимыя перемѣнныя принимаются прежнія частныя производныя. Наконецъ, общая теорія разсматриваемыхъ преобразованій была создана трудами С. Ли [1]).

Существуетъ нѣсколько способовъ изложенія основныхъ предложеній ученія о касательныхъ преобразованіяхъ [2]). До сихъ поръ обыкновенно считалось наиболѣе простымъ изложеніе разсматриваемой теоріи С. Ли, которое было дано А. Майеромъ. Намъ представляется однако, что соображенія, лежащія въ основаніи изложенія С. Ли, позволяютъ гораздо проще представить изслѣдуемую теорію, чѣмъ это было сдѣлано А. Майеромъ. Легко убѣдиться въ этомъ изъ послѣдующихъ строкъ, гдѣ мы будемъ исходить изъ изученныхъ выше свойствъ уравненій, представляющихъ собранія поверхностныхъ элементовъ.

Пусть формулы (3) представляютъ касательное преобразованіе, на основаніи котораго лѣвыя части уравненій (1) и (2) взаимно преобразовываются другъ въ друга, такъ что существуетъ слѣдующая зависимость

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s = \sigma\left(dz' - \sum_{s=1}^{n} p'_s\, dx'_s\right), \tag{5}$$

гдѣ σ представляетъ функцію перемѣнныхъ величинъ $x'_1, x'_2, \ldots x'_n, z, p'_1, p'_2, \ldots p'_n$.

Написанное равенство является основнымъ въ разсматриваемой теоріи и послужитъ для изученія свойствъ формулъ преобразованія (3).

Исходя изъ послѣдняго равенства (5), легко представить формулы (3) въ слѣдующемъ видѣ. Для симметричности вычисленій обозначимъ черезъ

---

[1]) *S. Lie.*—Begründung einer Invarianten—Theorie der Berührungs—Trasformationen (Mathematische Annalen, Bd. 8, S. 215).

S. Lie u. *F. Engel.*—Theorie der Transformatiansgruppen. Abschnitt II, S. 114.

[2]) *A. Mayer.*—Directe Begründung der Theorie der Berührungs--Transformationen (Mathematische Annalen. Bd. 8, S. 304).

G. Darboux.—Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p.p. 80, 250.

G. Darbaux. Sur le probléme de Pfaff (Bulletin des Sciences Mathématiques. t. VI. 2-e série).

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots \xi_{2n}, \xi_{2n+1}$$

соотвѣтственно наши перемѣнныя

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z', x_1', \ldots x_{n-1}', x_n'.$$

и затѣмъ введемъ обозначенія

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots \eta_{2n}, \eta_{2n+1},$$

соотвѣтственно вмѣсто слѣдующихъ величинъ

$$p_1, p_2, \ldots p_n, \sigma, -\sigma p_1', \ldots -\sigma p_{n-1}', -\sigma p_n'.$$

Благодаря послѣднимъ обозначеніямъ, равенство (5) становится

$$dz - \sum_{s=1}^{2n+1} \eta_s d\xi_s = 0 \tag{6}$$

и опредѣляетъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $2n+2$ измѣреній.

Общій видъ собраній поверхностныхъ элементовъ m-аго класса выражается здѣсь слѣдующими уравненіями (ср. стр. 17—18)

$$\left.\begin{array}{c} z = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \eta_{2n-m+i+1} - H, \\ \xi_{2n-m+i+1} = \dfrac{\partial H}{\partial \eta_{2n-m+i+1}}, \quad \eta_k = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_k}, \\ i=1, 2, \ldots m, \quad k=1, \ldots 2n-m+1, \end{array}\right\} \tag{7}$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \eta_{2n-m+i+1} - \varphi,$$

причемъ φ_i и φ обозначаютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2n+1}.$$

Въ частномъ случаѣ рѣшеніе нулевого класса разсматриваемаго уравненія (6), или (5)-аго, при сохраненіи первоначальнаго обозначенія перемѣнныхъ, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, z', x_1', x_2', \ldots x_n'),$$

$$p_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \quad \sigma p_s' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_s'},$$

$$s = 1, 2, \ldots n,$$

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial z'}.$$

Въ силу послѣдняго значенія σ, и предыдущія равенства становятся

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} p_s' = 0.$$

Если первое изъ написанныхъ нами уравненій разсматриваемаго рѣшенія представить въ слѣдующемъ общемъ видѣ, неразрѣшенномъ относительно перемѣнной z,

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n, z, x_1', x_2', \ldots x_n', z') = 0,$$

то разсматриваемое рѣшеніе нулевого класса представляется совокупностью послѣдняго написаннаго уравненія и слѣдующихъ равенствъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_s = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_s'} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} p_s' = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n,$$

$$\sigma = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z'}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Такимъ образомъ формулы касательнаго преобразованія нулевого класса вполнѣ опредѣляются при помощи одной только функціи Φ, опредѣляемой уравненіемъ. которое называется *основной формулой* преобразованія.

2. Такъ какъ равенства (3) представляютъ формулы преобразованія, при помощи которыхъ уравненіе (1) преобразовывается во (2)-е, то формулы (3), совмѣстно съ однимъ новымъ уравненіемъ, опредѣляющимъ соотвѣтствующее значеніе множителя σ, утождествляютъ равенство (5), представляя его рѣшенія и, стало-быть, должны заключаться въ формулахъ вида (7). Какъ и раньше въ предыдущемъ n^0, относимъ къ первому классу каноническихъ перемѣнныхъ всѣ величины

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z', x_1', x_2', \ldots x_n',$$

и ко второму классу соотвѣтственно перемѣнныя

$$p_1, p_2, \ldots p_n, \sigma, q_1, q_2, \ldots q_n,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$\left.\begin{array}{c} q_s = -\sigma p'_s, \\ s=1, 2, \ldots n. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Поэтому равенство (5) принимаетъ видъ

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s + \sigma dz' + \sum_{s=1}^{n} q_s dx'_s. \tag{9}$$

Присоединяя къ уравненіямъ (3) еще одно новое уравненіе опредѣляющее значеніе множителя σ въ прежнихъ перемѣнныхъ x_s, z, p_s, получаемъ, на основаніи равенствъ (8), слѣдующую систему уравненій, представляющую рѣшеніе уравненія (9),

$$\left.\begin{array}{c} X_s - x'_s = 0, \quad Z - z' = 0, \\ P_s + \dfrac{q_s}{\sigma} = 0, \\ s=1, 2, \ldots n, \\ R - \sigma = 0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

гдѣ прежнія выраженія X_s, Z, P_s и функція R представлены всѣ въ прежнихъ перемѣнныхъ.

Какъ доказано выше, въ n^0 2 второй главы, уравненія, опредѣляющія собраніе поверхностныхъ элементовъ, образуютъ замкнутую систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (10), должны уничтожаться. Составляя послѣднія скобки, мы будемъ обозначать прямыми скобками [...] только скобки Вейлера, распространяемыя на прежнія перемѣнныя; что же касается остальныхъ членовъ разсматриваемыхъ скобокъ, которые распространяются на новыя перемѣнныя, то мы будемъ вычислять ихъ непосредственно.

Такъ какъ уравненія первой строки системы (10) зависятъ отъ z' и новыхъ перемѣнныхъ только одного класса, то легко видѣть, что должны существовать слѣдующія тождества

$$[X_i, X_k] \equiv 0, \ [X_i, Z] \equiv 0, \tag{11}$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k, отъ 1 до n.

Для составленія остальныхъ скобокъ, замѣчаемъ, что существуютъ слѣдующія символическія равенства

$$\frac{d}{dx'_s} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_s} + \frac{\partial}{\partial z} q_s, \quad \frac{d}{dz'} \equiv \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma.$$

Поэтому, приравнивая нулю скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій системы (10), получаемъ равенства

$$[X_i, P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (X_i - x'_i) + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z, P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (Z - z') + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i, P_k] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} P_k - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_k -$$

$$- \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} P_i + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_i = 0,$$

$$[X_i, R] + \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z, R] + \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i, R] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} (R - \sigma) - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (R - \sigma) +$$

$$+ \frac{d}{dz'} P_i = 0.$$

Какъ легко видѣть имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{d}{dx'_s} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} q_s - \begin{cases} 1, s = i, \\ 0, s \gtrless i, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx'_s}(Z-z')\equiv\frac{\partial Z}{\partial z}q_s,$$

$$\frac{d}{dz'}(Z-z')\equiv\frac{\partial Z}{\partial z}\sigma-1,$$

$$\frac{d}{dx'_s}P_k\equiv\frac{\partial P_k}{\partial z}q_s,\quad \frac{q}{dz'}P_k\equiv\frac{\partial P_k}{\partial z}\sigma,$$

$$\frac{d}{dx'_s}(R-\sigma)\equiv\frac{\partial R}{\partial z}q_s,$$

$$\frac{d}{dz'}(R-\sigma)\equiv\frac{\partial R}{\partial z}\sigma.$$

На основаніи послѣднихъ тождествъ и въ силу зависимостей (8), предыдущія равенства приводятся къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned}
&[X_i,\ P_k]\equiv\begin{cases}0, & i \gtrless k,\\ -\dfrac{1}{\sigma}, & i=k.\end{cases}\\
&[Z,\ P_k]\equiv-\frac{P_k}{\sigma},\\
&[P_i,\ P_k]\equiv 0,\\
&[X_i,\ R]\equiv-\frac{\partial X_i}{\partial z}\sigma,\\
&[Z,\ R]\equiv 1-\frac{\partial Z}{\partial z}\sigma,\\
&[P_i,\ R]\equiv\frac{\partial P_i}{\partial z}\sigma,
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k, отъ 1 до n.

Полученныя равенства (11) и (12) представляютъ основныя тождества, характеризующія собой касательное преобразованіе (3).

Легко видѣть, что тождества (11) и (12) представляютъ не только необходимыя но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточныя условія для того, чтобы формулы (3) опредѣляли касательное преобразованіе. Въ самомъ дѣлѣ.

данныя тождества (11) и (12) показываютъ, что уравненія (10) образуютъ замкнутую систему. Стало-быть, на основаніи уравненій (10), удовлетворяется равенство (9), или (5) (см. стр. 42—44), которое и представляетъ аналитическое опредѣленіе касательныхъ преобразованій.

Отмѣтимъ особенно одинъ частный случай касательныхъ преобразованій, когда соотвѣтствующія формулы преобразованія (3) таковы, что всѣ функціи X_s и P_s не зависятъ отъ перемѣнной величины z, которая входитъ только въ выраженіе функціи Z въ слѣдующей формѣ

$$Z \equiv Az + F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n);$$

такъ что $n+1$-ое уравненіе системы (3) становится

$$z' - Az = F.$$

Такимъ образомъ перемѣнныя z' и z входятъ всего въ одно изъ уравненій формулъ преобразованія и только въ одной совмѣстной комбинаціи

$$z' - Az.$$

Поэтому соотвѣтствующее настоящему случаю первое уравненіе системы (7), которое разрѣшено относительно перемѣнной z, становится

$$z - \frac{1}{A} z' = \varphi,$$

гдѣ функція φ не зависить отъ каноническихъ перемѣнныхъ втораго класса. Такъ какъ остальныя уравненія разсматриваемаго собранія не заключаютъ перемѣнныхъ z и z', то, чтобы равенство (5) уничтожалось на основаніи послѣднихъ уравненій, необходимо должно существовать слѣдующее равенство

$$\sigma = \frac{1}{A},$$

т. е. при преобразованіи разсматриваемаго частнаго случая, *множитель σ долженъ представлять постоянную величину.* Не нарушая общности разсужденій, возможно положить A равнымъ единицѣ, такъ какъ для этого стоитъ только, вмѣсто z', принять величину $\frac{1}{A} z'$ за новую перемѣнную.

Въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ формулы (11) остаются безъ измѣненія.

Что касается равенствъ первыхъ трехъ строкъ системы (12), то они, въ разсматриваемомъ предположеніи, принимаютъ слѣдующій видъ

$$(X_i, P_k) \equiv \begin{cases} 0, i \gtrless k, \\ -1, i = k, \end{cases}$$

$$[Z, P_k] \equiv -P_k,$$

$$(P_i, P_k) \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k, отъ 1 до n.

Наконецъ, остальныя равенства системы (12) въ настоящемъ случаѣ уничтожаются тождественно.

3. Приведенныя выше формулы (7) показываютъ, что уравненія касательнаго преобразованія m-аго класса опредѣляются вполнѣ, при помощи $m+1$ зависимостей между перемѣнными z, z' и каноническими перемѣнными перваго класса какъ первоначальной такъ и новой системы перемѣнныхъ величинъ.

На послѣдующихъ строкахъ мы разсмотримъ, слѣдуя С. Ли, задачу составленія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, исходя изъ нѣсколькихъ ихъ данныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ $n+1$ различныхъ функцій въ инволюціи

$$X_1, X_2, \ldots X_n, Z, \tag{13}$$

зависящихъ отъ перемѣнныхъ величинъ x_1, $x_2, \ldots x_n$, z, p_1, $p_2, \ldots p_n$. Въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто тождества

$$[X_i, X_k] = 0, \quad [X_i, Z] = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k, отъ 1 до n.

Легко показать, что, при помощи элементарныхъ операцій, всегда возможно найти n функцій прежнихъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_n$, z, p_1, $p_2, \ldots p_n$

$$P_1, P_2, \ldots P_n,$$

удовлетворяющихъ равенству (5), т. е. выполняющихъ всѣ условія (12).

Подставляя въ равенство (5) значенія, получаемыя изъ первыхъ $n+1$ данныхъ уравненій (3),

$$dz' = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial Z}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial p_r} dp_r,$$

$$dx'_s = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial X_s}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial p_r} dp_r,$$

$$s = 1, 2, \ldots n,$$

получаемъ слѣдующій результатъ

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} - \frac{1}{\sigma}\right) dz + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} + \frac{p_r}{\sigma}\right) dx_r$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r}\right) dp_r = 0.$$

Предполагая, что перемѣнныя величины $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$ не связаны между собой никакими зависимостями, мы приходимъ къ заключенію, что коэффиціенты при ихъ дифференціалахъ въ послѣднемъ тождествѣ должны уничтожаться. Такимъ образомъ получается слѣдующій рядъ новыхъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} = \frac{1}{\sigma}, \\ &\frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} = -\frac{p_r}{\sigma}, \\ &\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} = 0, \\ &r = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Исключивъ множитель σ изъ первыхъ $n+1$ равенствъ, получаемъ n слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{dX_s}{dx_r} = 0, \\ &r = 1, 2, \ldots n \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Легко показать, что въ системѣ $2n$ уравненій, образованныхъ сейчасъ полученными n равенствами (15) и n послѣдними равенствами (14), существуютъ только n различныхъ между собой уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ n слѣдующихъ тождествъ

$$[Z,\ X_k] - \sum_{s=1}^{n} P_s [X_s,\ X_k] = 0,$$
$$k = 1,\ 2, \ldots n.$$

Послѣ раскрытія скобокъ Вейлера и приведенія, написанныя тождества приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n} \left[\frac{dX_k}{dx_r} \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} \right) - \right. \\ &\left. \frac{\partial X_k}{\partial p_r} \left(\frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{dX_s}{dx_r} \right) \right] = 0, \\ &k = 1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Легко видѣть, что, вслѣдствіе условій инволюціи функцій (13), по меньшей мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей n-аго порядка слѣдующей матриссы долженъ быть отличнымъ отъ нуля [1])

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dX_1}{dx_1} & \frac{dX_1}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_1}{dx_n} & \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_2}{dx_n} & \frac{dX_2}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial p_1} & \frac{\partial X_n}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{matrix} \right\|$$

Поэтому равенства (16) представляютъ n различныхъ уравненій относительно выраженій, представляющихъ лѣвыя части уравненій системы, состоящей изъ послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15). Слѣдовательно, изъ послѣдней системы уравненій только n различны между собой, остальныя же n уравненій уничтожаются, на основаніи предыдущихъ, въ силу зависимостей (16).

Кромѣ того, вслѣдствіе неравенства нулю по меньшей мѣрѣ одного изъ упомянутыхъ опредѣлителей матриссы, становится очевиднымъ, что

[1]) См. E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p.p. 271, 216.

соотвѣтствующія ему n различныхъ уравненій, разсматриваемой совокупности послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15), разрѣшимы относительно величинъ

$$P_1,\ P_2, \ldots P_n$$

и даютъ ихъ значенія, которыя, совмѣстно съ данными функціями (13), опредѣляютъ касательное преобразованіе.

Такимъ образомъ, по даннымъ $n+1$ функціямъ въ инволюціи, при помощи элементарныхъ операцій дифференцированія и алгебраическаго рѣшенія линейныхъ уравненій, опредѣляются новыя n функцій, которыя, совмѣстно съ данными функціями, удовлетворяютъ зависимостямъ, выраженнымъ равенствами (11) и (12).

Какъ эти послѣднія зависимости такъ и только что разрѣшенная задача разысканія упомянутыхъ функцій представляютъ полную аналогію со свойствами канонической системы интеграловъ каноническихъ дифференціальныхъ уравненій и съ задачей разысканія общаго интеграла послѣдней системы по половинному числу ея интеграловъ въ инволюціи. Къ этимъ послѣднимъ вопросамъ намъ придется возвратиться на послѣдующихъ страницахъ нашего изслѣдованія.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующія уравненія

$$x_1' = x_1,\ x_2' = p_2,\ x_3' = x_3,$$

$$z' = z - (x_1 + x_2)p_2.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ

$$X_1 \equiv x_1,\ X_2 \equiv p_2,\ X_3 \equiv x_3,$$

$$Z \equiv z - (x_1 + x_2)p_2,$$

при чемъ соотвѣтствующія условія (11) удовлетворяются тождественно. Въ настоящемъ случаѣ n послѣднихъ уравненій (14) и уравненія (15) образуютъ систему шести уравненій, изъ которыхъ три уничтожаются тождественно, а остальныя три даютъ слѣдующія равенства

$$x_1 + x_2 + P_2 = 0,$$

$$p_2 - p_1 + P_1 = 0,$$

$$p_3 - P_3 = 0.$$

Поэтому три остальныя искомыя уравненія разсматриваемаго касательнаго преобразованія становятся

$$p_1' = p_1 - p_2, \quad p_2' = x_1 - x_2, \quad p_3' = p_3.$$

4. Пусть имѣемъ m различныхъ функцій, выраженныхъ въ прежней системѣ перемѣнныхъ,

$$F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \quad r = 1, 2, \ldots m. \tag{17}$$

Назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$F_r'(x_1', x_2', \ldots x_n', z', p_1', p_2', \ldots p_n'), \quad r = 1, 2, \ldots m,$$

значенія, которыя принимаютъ функціи (17) въ новыхъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ, на основаніи формулъ касательнаго преобразованія (3), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) =$$

$$= F_r'(X_1, X_2, \ldots X_n, Z, P_1, P_2, \ldots P_n).$$

Поэтому, составляя скобки Вейлера для какой-либо пары функцій F_s и F_σ, получаемъ, на основаніи извѣстныхъ формулъ [1]), слѣдующее равенство

$$[F_s, F_\sigma] = \sum_i \sum_k D\left(\frac{F_s', F_\sigma'}{x_i', x_k'}\right)[X_i, X_k] + \sum_i D\left(\frac{F_s', F_\sigma'}{x_i', z'}\right)[X_i, Z]$$

$$+ \sum_i \sum_k D\left(\frac{F_s', F_\sigma'}{x_i', p_k'}\right)[X_i, P_k] + \sum_k D\left(\frac{F_s', F_\sigma'}{z', p_k'}\right)[Z, P_k] +$$

$$+ \sum_i \sum_k D\left(\frac{F_s', F_\sigma'}{p_i', p_k'}\right)[P_i, P_k],$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ различныя значенія s и σ, отъ 1 до n.

Въ силу свойствъ касательныхъ преобразованій, выраженныхъ условіями (11) и (12), послѣднее равенство становится

---

[1]) См. мое сочиненіе *„Объ интегрированіи уравненій съ частными производными“*.... стр. 40.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 276.

$$[F_s, F_\sigma] = \frac{1}{\sigma}[F'_s, F'_\sigma] \tag{18}$$

и показываетъ, что скобки Вейлера, составленныя для каждой пары данныхъ функцій (17), обладаютъ свойствами *инваріантности* по отношенію къ касательнымъ преобразованіямъ.

Полученное равенство приводитъ къ весьма важному заключенію, что ***замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли преобразовывается, при помощи касательныхъ преобразованій, тоже въ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли; такимъ же образомъ нормальная система преобразовывается тоже въ нормальную систему.***

Возьмемъ слѣдующую замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной функціи f по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$

$$\left.\begin{array}{c}[F_r, f] = 0, \\ r=1, 2, \ldots m,\end{array}\right\} \tag{19}$$

гдѣ всѣ функціи F_r находятся между собой въ инволюціи. Преобразовываемъ послѣднюю систему къ новымъ перемѣннымъ $x'_1, x'_2, \ldots x'_n, z', p'_1, p'_2, \ldots p'_n$, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3). Назовемъ соотвѣтственно черезъ F'_r и f' значенія функцій F_r и f въ новыхъ перемѣнныхъ. На основаніи предыдущаго, легко видѣть, что система уравненій (19) преобразовывается въ слѣдующую систему уравненій, видъ которой аналогиченъ предыдущему,

$$\left.\begin{array}{c}[F'_r, f'] = 0, \\ r=1, 2, \ldots m.\end{array}\right\} \tag{20}$$

Наконецъ, въ силу равенства (18)-аго, становится очевиднымъ, что ***каждый интегралъ системы линейныхъ уравненій (19), будучи преобразованъ, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3), становится, въ новыхъ перемѣнныхъ x'_s, z', p'_s, интеграломъ системы уравненій (20).*** Поэтому, ***система нѣсколькихъ интеграловъ въ инволюціи уравненій (19) представляетъ, въ указанныхъ новыхъ перемѣнныхъ, тоже систему интеграловъ въ инволюціи преобразованныхъ уравненій (20).***

Предыдущія разсужденія приводятъ, наконецъ, къ слѣдующему заключенію:

Пусть имѣемъ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли

$$\left.\begin{array}{c}F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ r=1, 2, \ldots m,\end{array}\right\} \tag{21}$$

которую преобразовываемъ къ новымъ перемѣннымъ, по формуламъ касательныхъ преобразованій (3). Въ такомъ случаѣ очевидно, что каждое полное интегральное собраніе данныхъ уравненій (21) преобразовывается, при помощи тѣхъ же формулъ касательнаго преобразованія, въ полное интегральное собраніе преобразованной системы производныхъ уравненій.

При этомъ однако слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что классъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли вообще измѣняется, при замѣнѣ перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій. Въ самомъ дѣлѣ, классъ преобразованнаго интегральнаго собранія зависитъ не только отъ класса первоначальнаго собранія, но также и отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія.

Пусть имѣемъ, напримѣръ, уравненіе

$$p_1 + x_2(p_2 + p_3)^2 = 0. \tag{22}$$

Преобразовываемъ его по слѣдующимъ формуламъ касательнаго преобразованія

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = p_3, \quad z' = z - x_3 p_3,$$

$$p_1' = p_1, \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = x_3.$$

Разсматриваемое уравненіе становится

$$p_1' + x_2'(p_2' - x_3')^2 = 0 \tag{23}$$

и имѣетъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа

$$z' = \frac{x_2'}{x_1' - C_1} + x_3'(x_2' + C_3) + C_3,$$

или полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса, составленное изъ уравненія (23) и трехъ слѣдующихъ

$$x_1' - \frac{1}{p_2' - x_3'} = C_1, \quad p_3' - x_2' = C_2, \quad z' - x_2'(p_2' - x_3') - x_3' p_3' = C_3.$$

Возвращаясь къ прежнимъ перемѣннымъ, приводимъ послѣднюю систему къ совокупности уравненій (22) и слѣдующихъ

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2, \quad z - x_2(p_2 + p_3) = C_3.$$

Послѣднія равенства опредѣляютъ слѣдующій полный интегралъ С. Ли перваго класса

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3, \quad x_3 = x_2 + C_2.$$

Для второго примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе

$$p_1 + \frac{(z - 2x_2 p_2) p_2}{x_1 p_3} + \frac{z - (x_2 + x_3) p_2}{x_1} = 0. \tag{24}$$

Послѣднее уравненіе, при помощи формулъ касательнаго преобразованія

$$x_1' = x_1, \; x_2' = p_2, \; x_3' = x_3, \; z' = z - x_2 p_2, \; p_1' = p_1, \; p_2' = -x_2, \; p_3' = p_3,$$

приводится къ слѣдующему виду

$$p' + \frac{(z' + x_2' p_2') x_2'}{x_1' p_3'} + \frac{z' - x_2' x_3'}{x_1'} = 0. \tag{25}$$

Полное интегральное собраніе нулевого класса послѣдняго уравненія представляется совокупностью уравненія (25) и трехъ слѣдующихъ

$$-x_1' p_3' = C_1, \quad x_1'(1 + \frac{p_3'}{p_2'}) = C_2, \quad (x_2' p_2' + x_3' p_3' - z') \frac{p_2'}{p_3'} = C_3, \tag{26}$$

которыя опредѣляютъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа уравненія (24)

$$z' = \frac{C_1 x_2'}{x_1' - C_2} - \frac{C_1 x_3 + C_2 C_3}{x_1'} + C_3.$$

Обратная замѣна перемѣнныхъ преобразовываетъ уравненіе (25) въ (24) и найденное полное интегральное собраніе нулевого класса въ собраніе перваго класса уравненія (24), представляемое совокупностью этого послѣдняго уравненія и трехъ слѣдующихъ,

$$-x_1 p_3 = C_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_3}{x_2}\right) = C_2, \quad (z - x_3 p_3) \frac{x_2}{p_3} = C_3,$$

которыя опредѣляютъ полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго уравненія (24)

$$z = -\frac{C_1 x_3 - C_2 C_3}{x_1} + C_3, \quad x_2 = \frac{C_1}{C_2 - x_1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, слѣдующую систему уравненій

$$p_1+\frac{(z-x_4p_4)^6}{p_3^2}=0,\quad p_2+\frac{x_4\,p_4}{2x_2}=0. \tag{27}$$

Формулы касательнаго преобразованія

$$x_1'=x_1,\ x_2'=x_2,\ x_3'=x_3,\ x_4'=-p_4,\ z'=z-x_4\,p_4,$$

$$p_1'=p_1,\ p_2'=p_2,\ p_3'=p_3,\ p_4'=x_4,$$

приводятъ уравненія (27) къ слѣдующему виду

$$p_1'+\frac{z'^6}{p_3'^2}=0,\quad p_2'-\frac{x_4'}{2x_2'}p_4'=0. \tag{28}$$

Эти послѣднія уравненія имѣютъ полный интегралъ С. Ли перваго класса

$$z'=\frac{1}{C_3-C_2\,x_3'-\frac{1}{C_2^2}x_1'},\quad x_4'=\frac{C_1}{\sqrt{x_2'}}.$$

Соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется совокупностью уравненій (28) и слѣдующихъ

$$x_4'\sqrt{x_2'}=C_1,\quad \frac{z'}{\sqrt{p_1'}}=C_2,\quad \frac{1}{z'}+\frac{x_1'\,p_1'}{z'^2}+\frac{z'\,x_3'}{\sqrt{p_1'}}=C_3.$$

Совершая обратную замѣну перемѣнныхъ получаемъ данныя уравненія (27) и слѣдующія

$$-p_4\sqrt{x_2}=C_1,\quad \frac{z-x_4\,p_4}{\sqrt{p_1}}=C_2,\quad \frac{1}{z-x_4p_4}+\frac{x_1\,p_1}{(z-x_4\,p_4)^2}+$$

$$+\frac{(z-x_4\,p_4)\,x_3}{\sqrt{p_1}}=C_3,$$

представляющія полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса данныхъ уравненій (27). Результатъ исключенія, изъ послѣднихъ трехъ уравненій, величинъ p_1 и p_4 приводитъ къ полному интегралу Лагранжа системы (27)

$$z = -\frac{C_1 x_4}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{C_3 - \frac{x_1}{C_2^2} - C_2 x_3}.$$

Въ приведенныхъ примѣрахъ мы совершали касательныя преобразованія, чтобы указать, какъ видоизмѣняется классъ полныхъ интегральныхъ собраній, при преобразованіи перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій.

Само собою разумѣется, что приходится возвращаться къ разсмотрѣнному случаю преобразованія интегральнаго собранія всякій разъ, когда мы преобразовываемъ полный интегралъ Лагранжа какого-либо уравненія съ частными производными перваго порядка. Дѣйствительно, пусть имѣемъ дифференціальное уравненіе съ частными производными

$$F'(x_1', x_2', \ldots x_n', z', p_1', p_2', \ldots p_n') = 0$$

и его полный интегралъ Лагранжа

$$z' = V(x_1', x_2', \ldots x_n', C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Чтобы получить отсюда полный интегралъ уравненія, въ которое преобразовывается данное уравненіе замѣной входящихъ въ него перемѣнныхъ черезъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$, при помощи формулъ (3), мы преобразовываемъ къ новымъ перемѣннымъ не только данный интегралъ изслѣдуемаго уравненія, нои его первыя производныя уравненія по перемѣннымъ $x_1', x_2', \ldots x_n'$. Такимъ образомъ задача приводится къ преобразованію полнаго интегральнаго собранія С. Ли нулевого класса. Поэтому классъ того собранія, которое получается въ результатѣ преобразованія перемѣнныхъ, зависитъ отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія и вообще отличенъ отъ нулевого. Слѣдовательно, исходя изъ полнаго интеграла Лагранжа даннаго уравненія, мы не имѣемъ вообще возможности, при помощи касательныхъ преобразованій, найти полный интегралъ Лагранжа преобразованнаго уравненія.

Съ другой стороны, какъ мы видимъ, въ послѣднемъ изъ приведенныхъ примѣровъ, касательныя преобразованія даютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ способъ получать интегралы классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, исходя изъ интегральныхъ собраній С. Ли. Въ этомъ отношеніи наилучшій примѣръ представляетъ извѣстное обобщенное уравненіе Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q) \tag{29}$$

гдѣ f нѣкоторая, какая угодно функція перемѣнныхъ p и q. Вводя новыя перемѣнныя, по формуламъ касательнаго преобразованія

$$x' = p,\ y' = q,\ z' = z - xp - yq,\ p' = -x,\ q' = -y,$$

преобразовываемъ данное уравненіе къ слѣдующему виду, въ формѣ функціональной зависимости,

$$z' = f(x',\ y'). \tag{30}$$

Легко разрѣшить слѣдующимъ образомъ послѣднее равенство, разсматриваемое, съ точки зрѣнія С. Ли, также какъ производное уравненіе. Исключая значеніе дифференціала dz',

$$dz' = \frac{\partial f}{\partial x'}dx' + \frac{\partial f}{\partial y'}dy',$$

изъ условія соединенности поверхностныхъ элементовъ

$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy',$$

получаемъ равенство

$$\left(p' - \frac{\partial f}{\partial x'}\right)dx' + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right)dy' = 0.$$

Послѣднее равенство имѣетъ три различныхъ рѣшенія. Первое изъ нихъ слѣдующее

$$x' = C_1,\quad y' = C_2,$$

гдѣ C_1, C_2—двѣ произвольныя постоянныя величины. Второе рѣшеніе имѣетъ видъ

$$y' = \varphi(x'),$$

$$p' - \frac{\partial f}{\partial x'} + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right)\varphi'(x') = 0,$$

гдѣ $\varphi(x')$ представляетъ произвольную функцію. Наконецъ, третье рѣшеніе представляется слѣдующимъ образомъ

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x'},\quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Соотвѣтственно послѣднимъ рѣшеніямъ, мы получаемъ три различныхъ рѣшенія преобразованнаго уравненія (30). Первое изъ выше найденныхъ

рѣшеній приводитъ къ полному рѣшенію второго класса уравненія (30)

$$z' = f(C_1, C_2), \quad x' = C_1, \quad y' = C_2.$$

Второе рѣшеніе представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z' = f(x', \varphi(x')), \quad y' = \varphi(x'),$$

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x} - \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \varphi'(x').$$

Если, напримѣръ, положить въ послѣднемъ рѣшеніи $\varphi(x') = C'x' + C''$, гдѣ C', C''—двѣ произвольныя постоянныя, то мы получаемъ полное рѣшеніе С. Ли перваго класса уравненія (30). Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) представляется въ видѣ

$$z' = f(x', y'), \quad p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Совершая обратную замѣну перемѣнныхъ, мы находимъ, соотвѣтственно изъ приведеннаго выше перваго рѣшенія преобразованнаго уравненія, полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (29)

$$z = C_1 x + C_2 y + f(C_1, C_2).$$

Второе рѣшеніе уравненія (30) приводитъ къ общему интегралу уравненія (29)

$$z = xp + yq + f(p, q).$$

$$q = \varphi(p),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} + \left(y + \frac{\partial f}{\partial q}\right) \varphi'(p) = 0,$$

гдѣ p и q представляютъ перемѣнные параметры. Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) даетъ особенный интегралъ обобщеннаго уравненія Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

гдѣ p и q—перемѣнные параметры. Такимъ образомъ, какъ слѣдуетъ также изъ нашихъ предыдущихъ изслѣдованій, относительно существо-

ванія полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, обобщенное уравненіе Клеро не имѣетъ полныхъ интеграловъ, отличныхъ отъ нулевого класса, и всѣ интегральныя собранія различныхъ классовъ преобразованнаго уравненія (30) переходятъ, при помощи касательныхъ преобразованій, въ рѣшенія нулевого класса обобщеннаго уравненія Клеро.

Въ своихъ изслѣдованіяхъ С. Ли не останавливается на сравненіи между собой преобразованныхъ интегральныхъ собраній, не различая ихъ по классамъ. Съ точки зрѣнія С. Ли, полныя интегральныя собранія различныхъ классовъ являются совершенно эквивалентными аналитическими элементами. Устанавливая однако въ нашемъ изслѣдованіи существенное различіе между интегралами Лагранжа и С. Ли, намъ приходится также принимать во вниманіе классы разсматриваемыхъ интегральныхъ собраній въ обѣихъ системахъ перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій. На это послѣднее обстоятельство я имѣлъ случай указывать въ своемъ сочиненіи „*Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*" и въ двухъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ [1]) „*Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer*", по поводу такъ называемаго усовершенствованія С. Ли способа интегрированія Якоби—Майера уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется возвратиться къ этому послѣднему вопросу съ болѣе общей точки зрѣнія.

5. Гурса [2]) разсматриваетъ, какъ приложеніе теоріи касательныхъ преобразованій, извѣстный способъ А. Н. Коркина интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи [3]). На послѣдующихъ строкахъ мы изложимъ эти соображенія въ нѣсколько обобщенномъ видѣ.

Пусть имѣемъ *нормальную* систему разсматриваемыхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Возьмемъ полный интегралъ первыхъ k уравненій послѣдней системы, гдѣ $k<m$. Соотвѣтствующее ему полное интегральное собраніе, представленное уравненіями въ инволюціи, составляется при помощи операцій

---

[1]) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 26 juin et 3 juillet 1899.

[2]) E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 302.

[3]) А. Н. Коркинъ.—*О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка.* С.П.Б. 1867.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII, p. 14 60.

дифференцированія и алгебраическихъ исключеній (см. стр. 54—57). Предположимъ, что это послѣднее собраніе представляется слѣдующей системой уравненій въ инволюціи

$$F_r(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) = 0,$$
$$r = 1, 2, \dots k,$$

$$\Phi_i(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots p_n) = C_i,$$
$$i = 1, 2, \dots n - k + 1,$$

гдѣ всѣ C_i—произвольныя постоянныя, при чемъ классъ этого собранія можетъ быть нулевымъ или какимъ угодно, такъ какъ всѣ послѣдующія разсужденія прилагаются къ собраніямъ любого класса.

Принимая выраженія F_r и Φ_i соотвѣтственно за функціи X_1, $X_2, \dots X_n$, Z, составляемъ формулы касательнаго преобразованія (см. n^o3 настоящей главы)

$$x'_r = X_s, \quad z' = Z, \quad p'_s = P_s,$$
$$s = 1, 2, \dots n.$$

Преобразованныя къ новымъ перемѣннымъ x'_s, z', p'_s уравненія (31) очевидно становятся

$$x'_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots k,$$

$$F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots p'_n) = 0,$$
$$i = 1, 2, \dots m - k.$$

Такъ какъ система данныхъ уравненій (31) *нормальная*, то полученныя преобразованныя уравненія представляютъ также *нормальную* систему. Поэтому скобки Вейлера

$$[x'_r, F'_{k+i}] \equiv -\frac{\partial F'_{k+i}}{\partial p'_r} \equiv 0,$$

должны уничтожаться тождественно для всѣхъ различныхъ значеній r, отъ 1 до k, и значеній i, отъ 1 до $m-k$.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ функціи F'_{k+i} не зависятъ отъ перемѣнныхъ $p'_1, p'_2, \dots p'_k$, и преобразованная нормальная система уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{array}{c} F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots x'_n, z', p'_{k+1}, p'_{k+2}, \dots p'_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots m - k. \end{array} \right\} \quad (32)$$

Такимъ образомъ система (31), составленная изъ m уравненій съ n частными производными, преобразовывается въ аналогичную систему (32),

число уравненій которой и частныхъ производныхъ—каждое меньше на k единицъ, сравнительно съ первоначальной системой. Продолжая повторять тѣ же самыя дѣйствія съ полученными уравненіями (32), приходимъ, наконецъ, къ одному дифференціальному уравненію. Такъ какъ интегрированіе одного уравненія проводится, на основаніи Якоби-Майеровскаго способа, къ интегрированію системы уравненій, то изложенный способъ приводитъ въ результатѣ интегрированіе данныхъ уравненій къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію.

Приведенный способъ изложенія обобщенной теоріи А. Н. Коркина даетъ мѣсто двумъ существеннымъ возраженіямъ:

Во-первыхъ, вслѣдствіе введенія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, становится неизвѣстнымъ классъ полнаго интегральнаго собранія, которое должно получаться въ результатѣ выполненнаго интегрированія, т. е. вводится таже неопредѣленность, относительно искомаго рѣшенія, которая характеризуетъ всѣ способы интегрированія С. Ли.

Во-вторыхъ, приведенное изложеніе упускаетъ изъ виду одну особенность, которая является весьма существенной при нѣкоторыхъ приложеніяхъ способа интегрированія А. Н. Коркина. Дѣйствительно, этотъ послѣдній требуетъ, сравнительно съ другими пріемами интегрированія частныхъ уравненій, наибольшаго числа операцій интегрированія. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ вопросахъ, которые находятся въ связи съ разысканіемъ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ, какъ показалъ А. Н. Коркинъ [1]), его способъ интегрированія даетъ простое рѣшеніе разсматриваемой задачи.

Новое изложеніе разсматриваемой теоріи, которое мы дадимъ ниже, основывается также на касательныхъ преобразованіяхъ, при чемъ числа новыхъ и прежнихъ перемѣнныхъ различны между собой. Поэтому необходимо предварительно остановиться на нѣсколькихъ теоретическихъ соображеніяхъ.

6. Пусть прежнія перемѣнныя

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2 \ldots p_n$$

и новыя перемѣнныя

$$x'_1,\ x'_2, \ldots x'_m,\ z,\ p'_1,\ p'_2, \ldots p'_m$$

---

[1]) *Коркинъ.—О совокупныхъ уравненіяхъ...*

Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel (Mathematische Annalen. Bd. II, 1869, S. 13).

Н. Н. Салтыковъ.—Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити (Сообщенія Харьк. Математическаго Общ., т. VI).

связаны между собой зависимостями

$$\left.\begin{aligned} x'_s &= X_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ z' &= Z(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ p'_s &= P_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ & s=1, 2, \ldots m. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Если между разсматриваемыми перемѣнными существуетъ равенство

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s = \sigma \left(dz' - \sum_{s=1}^{m} p'_s \, dx'_s\right), \tag{34}$$

то обѣ системы перемѣнныхъ опредѣляютъ собой касательное преобразованіе [1]).

Предположимъ, что $m<n$. Такъ какъ наименьшее число уравненій рѣшенія уравненія (34) равняется $n+m+2$, то, чтобы послѣднее равенство имѣло мѣсто, очевидно необходимо должны существовать, кромѣ $2m+1$ уравненій (33), еще $n-m+1$ зависимостей. Изъ нихъ $n-m$ связываютъ прежнія перемѣнныя между собой, а послѣдняя зависимость опредѣляетъ черезъ нихъ значеніе перемѣнной σ. Предположимъ, что эти зависимости выражаются слѣдующими уравненіями

$$\left.\begin{aligned} f_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ r=1, 2, \ldots n-m, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\sigma = R(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

На основаніи свойствъ рѣшеній равенства (34), разсуждая аналогично тому, какъ мы это дѣлали въ $n^o 2$ настоящей главы, мы заключаемъ:

Во-первыхъ, что *уравненія (35) образуютъ замкнутую систему, и* во-вторыхъ, что *существуютъ слѣдующія равенства*

$$\left.\begin{aligned} &[X_i, X_k] = 0, \quad [X_i, Z] = 0, \\ &[X_i, P_k] = \begin{cases} 0, & i \gtrless k, \\ -\dfrac{1}{\sigma}, & i=k, \end{cases} \\ &[Z, P_k] = -\frac{P_k}{\sigma}, \quad [P_i, P_k] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

---

[1]) *Ср. E. Goursat.*—Leçons sur l'intégration... p. 325.

$$\left.\begin{aligned}
[X_i,\ R] &= -\frac{\partial X_i}{\partial z}\sigma, \\
[Z,\ R] &= 1 - \frac{\partial Z}{\partial z}\sigma, \\
[P_i,\ R] &= \frac{\partial P_i}{\partial z}\sigma,
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

для всѣхъ различныхъ значеній i и k, отъ 1 до n. При этомъ написанныя равенства выполняются, вообще, на основаніи уравненій (35).

Однако въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ равенства (36) имѣютъ мѣсто тождественно, аналогично тому случаю, когда числа новыхъ и прежнихъ перемѣнныхъ равны между собой. Предположимъ, напримѣръ, что уравненія (35) зависятъ явно отъ величинъ

$$p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m}$$

и разрѣшимы относительно послѣднихъ, такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_{n-m}}{p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m}}\right) \gtrless 0.$$

Если функціи X_s, Z, P_s не зависятъ отъ перемѣнныхъ

$$p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m},$$

то становится очевиднымъ, что равенства первыхъ трехъ строкъ формулъ (36) должны удовлетворяться *тождественно*. Наконецъ, если функція R не зависитъ отъ тѣхъ же перемѣнныхъ, то тогда и остальныя равенства (36) тоже удовлетворяются тождественно.

Предположимъ, что, разрѣшивъ уравненія (33) и (35) относительно прежнихъ перемѣнныхъ, получаемъ слѣдующія ихъ $n+m+1$ значеній въ новыхъ перемѣнныхъ и остальныхъ $n-m$ прежнихъ

$$\left.\begin{aligned}
x_r &= X'_r(x'_1,\ x'_2, \ldots x'_m,\ z',\ p'_1,\ p'_2, \ldots p'_m,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-m}), \\
z &= Z'(x'_1,\ x'_2, \ldots x'_m,\ z',\ p'_1,\ p'_2, \ldots p'_m,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-m}), \\
p_s &= P'_s(x'_1,\ x'_2, \ldots x'_m,\ x',\ p'_1,\ p'_2, \ldots p'_m,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-m}), \\
& r = n-m+1,\ n-m+2, \ldots n, \qquad s = 1,\ 2, \ldots m.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

На основаніи разсужденій n^0 4-аго настоящей главы, легко вывести слѣдующее заключеніе:

Если уравненія замкнутой или нормальной системы, будучи преобразованы къ новымъ перемѣннымъ, при помощи формулъ (37), не зависятъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2 \ldots x_{n-m}$, то преобразованная къ новымъ перемѣннымъ система является также соотвѣтственно замкнутой или нормальной.

7. Пользуясь приведенными соображеніями, легко изложить теорію А. Н. Коркина. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи

$$\left.\begin{array}{c} F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{38}$$

Предположимъ, что первыя k изъ послѣднихъ уравненій образуютъ нормальную систему и разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2 \ldots p_k$, такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_k}{p_1, p_2, \ldots p_k}\right) \gtrless 0. \tag{39}$$

Напишемъ полный интегралъ разсматриваемыхъ k уравненій

$$z = V(x_1, x_2, \ldots x_n, z', x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'), \tag{40}$$

гдѣ величины $z', x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'$ обозначаютъ $n-k+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ выполняется условіе

$$D\left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial x_{k+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{k+2}}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{z', x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'}\right) \gtrless 0. \tag{41}$$

Составляемъ уравненія, представляющія, совмѣстно съ (40)-ымъ, общее интегральное собраніе проинтегрированныхъ уравненій,

$$\left.\begin{array}{c} p_s = \dfrac{\partial V}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \ldots n, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_i'} + \dfrac{\partial V}{\partial z'} p_i' = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n-k, \end{array}\right\} \tag{42}$$

при чемъ z' разсматривается какъ функція остальныхъ произвольныхъ постоянныхъ $x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'$, и выраженія p_i' обозначаютъ частныя про-

изводныя перваго порядка функціи z' соотвѣтственно по независимой перемѣнной x'_i, такъ что имѣетъ мѣсто равенство

$$dz' = \sum_{i=1}^{n-k} p'_i dx'_i.$$

Дифференцируя уравненіе (40), получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial V}{\partial z'} dz' + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial V}{dx'_i} dx'_i.$$

Поэтому, если ввести обозначеніе

$$\sigma = -\frac{\partial V}{\partial z'}, \tag{43}$$

то становится очевиднымъ, что равенство

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s = \sigma (dz' - \sum_{i=1}^{n-k} p'_i dx'_i)$$

удовлетворяется тождественно, на основаніи уравненій (40), (42) и (43), т. е. послѣднія опредѣляютъ касательное преобразованіе между прежними перемѣнными

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$$

и новыми перемѣнными величинами

$$x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-k}, z', p'_1, p'_2, \ldots p'_{n-k}.$$

На основаніи неравенства (41), уравненія (40) и (42) опредѣляютъ выраженія слѣдующихъ прежнихъ перемѣнныхъ

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n \tag{44}$$

въ новыхъ перемѣнныхъ и k прежнихъ

$$x_1, x_2, \ldots x_k.$$

Преобразовывая къ новымъ перемѣннымъ данныя уравненія (38), т. е. подставляя въ нихъ указанныя значенія перемѣнныхъ (44), замѣчаемъ, что первыя k уравненій (38) уничтожаются тождественно, такъ какъ значеніе (40)-ое функціи z представляетъ ихъ интегралъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдуетъ замѣтить, что эти k первыя уравненій (38) представляютъ

въ силу условій (39) и (41), результатъ исключенія новыхъ перемѣнныхъ изъ уравненія (40) и n первыхъ уравненій (42). Такимъ образомъ разсматриваемыя k уравненій являются въ настоящемъ случаѣ тѣми зависимостями между прежними перемѣнными, которыя имѣютъ мѣсто въ формулахъ касательныхъ преобразованій, когда число новыхъ перемѣнныхъ меньше числа прежнихъ. Наконецъ, предположимъ, что остальныя $m-k$ уравненій (38) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{array}{c} F'_r(x'_1, x'_2, \dots x'_{n-k}, z', p'_1, p'_2, \dots p'_{n-k}, x_1, x_2, \dots x_k) = 0, \\ r = k+1, k+2, \dots m, \end{array}\right\} \quad (45)$$

т. е. зависятъ вообще отъ k прежнихъ перемѣнныхъ.

До сихъ поръ мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно интегрируемости изслѣдуемыхъ уравненій (38). Но если предположить, что послѣднія имѣютъ интегралъ, то въ такомъ случаѣ легко доказать, что уравненія (45) приводятся къ новой системѣ, уравненія которой не зависятъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть рѣшеніе данныхъ уравненій (38) представляется равенствомъ

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots x_n). \quad (46)$$

Въ такомъ случаѣ рѣшеніе преобразованной системы (45) получается какъ результатъ исключенія $n+1$ величинъ

$$x_1, x, \dots x_n, z$$

изъ системы $n+2$ уравненій (40), (46) и n слѣдующихъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе преобразованныхъ уравненій, какого-бы класса оно ни было, во всякомъ случаѣ не зависитъ отъ значеній величинъ $x_1, x_2, \dots x_k$. Поэтому рѣшеніе системы (45) утождествляетъ ея уравненія при какихъ-угодно значеніяхъ $x_1, x_2, \dots x_k$. Слѣдовательно, то же рѣшеніе утождествляетъ также уравненія

$$\frac{\partial F'_r}{\partial x_h} = 0, \quad \frac{\partial^2 F'_r}{\partial x_h \partial x_l} = 0, \dots$$

которыя получаются дифференцированіемъ уравненій (45) по всѣмъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \dots x_k$. Увеличивая такимъ образомъ число уравненій

системы (45)-ой прибавленіемъ ея указанныхъ производныхъ уравненій, мы получимъ въ результатѣ систему уравненій, не зависящихъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ. Если бы получилось число уравненій, которое больше $n-k+1$, то въ такомъ случаѣ разсматриваемыя уравненія не имѣютъ интеграла. Если же число уравненій вновь полученной системы меньше $n-k+1$, то, поступая съ ней какъ съ первоначальной системой, мы продолжимъ наши вычисленія до тѣхъ поръ, пока не сведемъ задачу къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, или пока не убѣдимся, что данныя уравненія несовмѣстны.

Изложенный способъ разсужденія А. Н. Коркина представляетъ то преимущество, что не основывается на приведеніи данныхъ уравненій къ замкнутымъ системамъ и позволяетъ такимъ образомъ приступить къ интегрированію безъ предварительнаго вычисленія всѣхъ дополнительныхъ уравненій или неизвѣстныхъ коэффиціентовъ и функцій, которые, при извѣстныхъ задачахъ, входятъ въ данныя уравненія. Это послѣднее обстоятельство обусловливаетъ успѣхъ, съ которымъ примѣняется разсматриваемый способъ интегрированія въ указанныхъ выше вопросахъ (см. стр. 133).

Въ частномъ случаѣ, если данныя уравненія (38) образуютъ замкнутую систему, то въ такомъ случаѣ очевидно, что преобразованныя уравненія (45) приводятся къ $m-k$ различнымъ уравненіямъ, независящимъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_k$. Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, извѣстно, что уравненія (45) имѣютъ интегралъ, независящій отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, и, во-вторыхъ, число уравненій (45) не должно превосходить числа $m-k$, такъ какъ ихъ полный интегралъ долженъ заключать $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому единственное возможное заключеніе, которое остается сдѣлать, состоитъ въ томъ, что всѣ перемѣнныя $x_1, x_2, \dots x_k$ исключаются изъ уравненій (45) и результатъ послѣдняго исключенія представляется совокупностью $m-k$ различныхъ уравненій въ новыхъ перемѣнныхъ. Само собою разумѣется, что эти уравненія образуютъ *замкнутую систему*, такъ какъ по условію имѣютъ полный интегралъ съ $n-m+1$ различными произвольными постоянными.

Наконецъ, если данныя уравненія (38) образуютъ *нормальную* систему и преобразованныя уравненія (45) не зависятъ отъ $x_1, x_2, \dots x_k$, то очевидно, что эта система (45) также *нормальная*. Въ частномъ случаѣ, если $k=1$, то въ своемъ изслѣдованіи А. Н. Коркинъ доказываетъ, что данныя уравненія, преобразованныя къ новымъ перемѣннымъ, не зависятъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ.

Итакъ, выполнивъ преобразованіе А. Н. Коркина, мы получаемъ систему уравненій, заключающую меньшее число перемѣнныхъ, сравнительно съ данными уравненіями. Продолжая прежнія преобразованія, мы приходимъ, наконецъ, къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, и

тогда, для полученія искомаго интеграла, остается выполнить обратную замѣну перемѣнныхъ. При этомъ необходимо отмѣтить то существенное обстоятельство, что обратная замѣна перемѣнныхъ всегда приводитъ къ полному интегралу Лагранжа или къ полному интегральному собранію нулевого класса данныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, въ основу каждаго преобразованія кладется общій интегралъ Лагранжа. Хотя послѣдній и представляется совокупностью уравненій, заключающихъ вспомогательные параметры, которые принимаются за новыя независимыя перемѣнныя, тѣмъ не менѣе результатъ исключенія послѣднихъ изъ разсматриваемой системы уравненій всегда приводитъ къ интегралу, представляемому однимъ уравненіемъ. Послѣднее обстоятельство находитъ теоретическое подтвержденіе въ извѣстной *теоремѣ Коши*, доказывающей существованіе общаго интеграла уравненій съ частными производными [1]).

Въ своемъ изложеніи А. Н. Коркинъ совершаетъ каждое послѣдовательное преобразованіе, исходя изъ интеграла одного только уравненія, а затѣмъ преобразовываетъ къ новымъ перемѣннымъ всѣ остальныя изслѣдуемыя уравненія. Что касается изложенныхъ выше соображеній, то они позволяютъ сократить число всѣхъ преобразованій, необходимыхъ для интегрированія, и приводятъ такимъ образомъ быстрѣе къ окончательному результату. Кромѣ того, приведенное изложеніе позволяетъ уменьшать число преобразовываемыхъ уравненій даже въ томъ случаѣ, когда каждое новое преобразованіе совершается какъ у А. Н. Коркина, при помощи интеграла одного только изъ разсматриваемыхъ уравненій. Дѣйствительно, при каждомъ послѣдовательномъ преобразованіи перемѣнныхъ, нѣтъ надобности преобразовывать къ новымъ перемѣннымъ всѣ разсматриваемыя уравненія, но достаточно преобразовать только одно изъ нихъ или нѣсколько, съ тѣмъ чтобы принять ихъ полный интегралъ за основаніе новаго преобразованія перемѣнныхъ и т. д.

Проинтегрируемъ, напримѣръ, нормальную систему уравненій

$$\left.\begin{aligned} p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4} = 0, \quad p_2 - \frac{x_4}{x_2} p_4 = 0, \\ p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Полный интегралъ первыхъ двухъ уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

[1]) См. мое изслѣдованіе: *„Объ интегрированіи уравненій...* стр. 45 и статью: „Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue" (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXI).

$$z = x_1' x_1 + \frac{x_2 x_3 x_4}{x_1'} + z',$$

гдѣ x_1' и z' обозначаютъ двѣ произвольныя постоянныя величины.

Полагая $x_3 = x_2'$ и принимая x_1' и x_2' за новыя независимыя перемѣнныя, а z' за новую неизвѣстную функцію, составляемъ формулы преобразованія къ новымъ перемѣннымъ, обозначая черезъ p_1', p_2' новыя частныя производныя $\frac{\partial z'}{\partial x_1'}$ и $\frac{\partial z'}{\partial x_2'}$,

$$z = x_1' x_1 + \frac{x_2 x_4 x_2'}{x_1'} + z',$$

$$p_1 = x_1', \quad p_2 = \frac{x_4 x_2'}{x_1'},$$

$$p_3 = \frac{x_2 x_4}{x_1'} + p_2', \quad p_4 = \frac{x_2 x_2'}{x_1'},$$

$$x_1 - \frac{x_2 x_2' x_4}{x_1'^2} + p_1' = 0.$$

Преобразованное къ новымъ перемѣннымъ послѣднее уравненіе (47) становится

$$p_2' + \frac{x_1'}{x_2'} p_1' = 0,$$

т. е. не зависитъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ. Полный интегралъ послѣдняго уравненія имѣетъ значеніе

$$z' = C_1 \frac{x_1'}{x_2'} + C_2,$$

гдѣ C_1, C_2 — двѣ произвольныя постоянныя.

Обратная замѣна перемѣнныхъ приводитъ къ слѣдующему полному интегралу данныхъ уравненій (47)

$$z = 2\sqrt{x_2 x_4 (x_1 x_3 + C_1)} + C_2.$$

ГЛАВА VI.

Теорія характеристикъ.

1. До сихъ поръ мы занимались изслѣдованіемъ общихъ положеній теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и производныхъ уравненій С. Ли. Что касается полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли различныхъ классовъ, отличныхъ отъ нулевого, то мы видѣли, что они существуютъ только для уравненій опредѣленныхъ типовъ. Наше дальнѣйшее изслѣдованіе посвящается способамъ разысканія полныхъ интегральныхъ собраній. Какъ было выше показано, во II-ой главѣ, каждое полное интегральное собраніе С. Ли, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, представляется замкнутой системой $n+1$ уравненій, которая въ свою очередь вполнѣ опредѣляется уравненіями геометрическаго мѣста соотвѣтствующаго интегральнаго собранія. Послѣднее геометрическое мѣсто выражается въ классической теоріи однимъ уравненіемъ, а въ теоріи С. Ли—нѣсколькими равенстами. Поэтому способы интегрированія разсматриваемыхъ уравненій приводятся къ разысканію, или послѣднихъ геометрическихъ мѣстъ, или опредѣляемыхъ ими интегральныхъ собраній непосредственно.

Изъ нашихъ изслѣдованій (см. стр. 66) вытекаетъ, что не всякое производное уравненіе С. Ли имѣетъ полные интегралы любого класса. Поэтому становится вполнѣ понятнымъ, почему общіе способы интегрированія С. Ли отличаются неопредѣленностью въ томъ смыслѣ, что не даютъ возможности заранѣе установить классъ того интеграла, который долженъ получиться въ результатѣ производимыхъ вычисленій. Дѣйствительно, каждое рѣшеніе даннаго класса допускается только производными уравненіями опредѣленнаго типа. Такъ какъ, въ своихъ изслѣдованіяхъ, С. Ли не принималъ въ расчетъ всѣ эти соображенія, то естественно, что классъ получаемыхъ имъ рѣшеній является совершенно случайнымъ.

Намъ не представляется цѣлесообразнымъ сохранять послѣднюю точку зрѣнія С. Ли, которая однако проводится въ современныхъ трактатахъ теоріи уравненій съ частными производными, тѣмъ болѣе, что мы уже получили въ предыдущихъ главахъ рядъ результатовъ относи-

тельно существованія полныхъ рѣшеній С. Ли различныхъ классовъ. Намъ представляется также недостаточнымъ въ теоретическомъ, научномъ отношеніи удовлетвориться результатами С. Ли, послѣ того какъ мы установили простое аналитическое различіе между разсматриваемыми рѣшеніями различныхъ классовъ, выражаемое при помощи функціональныхъ опредѣлителей и ихъ уничтожающихся миноровъ (см. стр. 44 и 50—51). Болѣе того, мы считаемъ невозможнымъ, послѣ всего сказаннаго, смѣшивать полные интегралы различныхъ классовъ, какъ это дѣлаютъ другіе авторы, на что было уже указано на предыдущихъ страницахъ (см. стр. 35). Удовлетвориться рѣшеніемъ С. Ли, излагая теорію интегрированія дифференціальныхъ уравненій, равносильно признанію въ несостоятельности излагаемой теоріи давать искомые интегралы во всѣхъ различныхъ случаяхъ, которые могутъ представиться, при приложеніи теоріи на практикѣ.

При разысканіи разсматриваемыхъ интеграловъ, представляются нѣсколько различныхъ случаевъ опредѣленія искомыхъ функцій, на основаніи различныхъ аналитическихъ элементовъ. Если извѣстно нѣсколько новыхъ уравненій, заключающихъ равное число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ и образующихъ замкнутую систему, совмѣстно съ данными уравненіями, или если извѣстно нѣсколько интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ даннымъ интегрируемымъ, то задача интегрированія послѣднихъ выполняется при помощи способа Якоби—Майера. Если извѣстные интегралы послѣднихъ линейныхъ уравненій не находятся въ инволюціи, то въ такомъ случаѣ задача интегрированія разсматриваемыхъ уравненій совершается при помощи рѣшенія такъ называемой задачи С. Ли. Наконецъ, если извѣстна полная система интеграловъ послѣднихъ упомянутыхъ линейныхъ уравненій, то задача разысканія интеграловъ данныхъ уравненій выполняется при помощи алгебраическихъ исключеній, на основаніи такъ называемой *теоріи характеристикъ*.

Эта теорія получила свое названіе, благодаря изслѣдованіямъ Монжа [1], который положилъ основаніе геометрическому способу изложенія задачи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Второе аналитическое рѣшеніе разсматриваемаго вопроса было дано Коши [2], для разысканія общихъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Получаемый отсюда способъ составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа равно и такъ называемый первый способъ Якоби [3]) представляютъ однако случаи исключенія, когда не получаются искомые ин-

[1]) *Monge.—Application de l'Analyse à la Géometrie.*

[2]) *Cauchy.—Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques,* 1841, p. 238.

[3]) *Journal Crelle,* t, XVII, S. 97, или *Gesammelte Werke,* Bd. IV, S. 59.

тегралы. Эти послѣдніе случаи были изслѣдованы Майеромъ, Бертраномъ и Дарбу [1]). Почти одновременно С. Ли опубликовалъ также свои изслѣдованія, при чемъ избѣжалъ необходимости разсматривать упомянутые случаи исключенія, вводя понятія о своихъ интегральныхъ собраніяхъ.

Излагая теорію характеристикъ, на страницахъ Mathematische Annalen, Bd. IX [2]), С. Ли приводитъ также доказательство существованія своихъ интеграловъ. Но такъ какъ С. Ли не различаетъ классовъ интегральныхъ собраній, то, съ развиваемой въ настоящемъ изслѣдованіи точки зрѣнія, указанное доказательство не представляетъ интереса, такъ какъ доказываетъ только существованіе системы интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соотвѣтсвующихъ разсматриваемымъ производнымъ. Наконецъ, для симметричности вычисленій, С. Ли всѣ разсматриваемыя уравненія представляетъ въ видѣ однородныхъ. Впрочемъ вычисленія, которыми мы будемъ пользоваться, являются настолько простыми, что намъ представляется излишнимъ придавать изслѣдуемымъ уравненіямъ какой либо спеціальный видъ, тѣмъ болѣе, что, благодаря подобнымъ искусственнымъ преобразованіямъ, усложняются вычисленія, при переходѣ отъ общей теоріи къ приложеніямъ.

На предыдущихъ страницахъ мы въ достаточной мѣрѣ уже выяснили и установили нашу точку зрѣнія на сущность идей С. Ли. Послѣ того какъ извѣстенъ общій видъ всѣхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы даннаго класса, задача разысканія послѣднихъ, для насъ, не представляетъ болѣе интереса, съ точки зрѣнія общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы сосредоточимъ наше вниманіе на разысканіи полныхъ интеграловъ Лагранжа.

Не смотря на господство въ наукѣ, въ послѣднее время, идей С. Ли, тѣмъ не менѣе послѣдній вопросъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій не переставалъ привлекать вниманіе ученыхъ. Въ этомъ направленіи слѣдуетъ отмѣтить изслѣдованія Майера [3]), Морера [4]) и лек-

---

[1]) *Mayer.—Mathematische Annalen*, Bd. III, S. 435.

Bertrand.—Comptes rendus, t. LXXXII,p. 641.

Darboux.—Comptes rendus, t. LXXIX, p. 1488: t. LXXX, p. 160: *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1-re série, t. VIII, p. 219.

[2]) S.S. 261—264.

[3]) *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August Universität.* Göttingen 1873, p. 299.

Mathematische Annalen, Bd. VI, 1873, p. 192.

[4]) *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti, 2-e serie, vol.* XVI, 1883, p. p. 637. 691.

ціи Е. Вебера по теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными [1]).

Съ болѣе общей точки зрѣнія теорія характеристикъ разсматривается въ моихъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ [2]), въ сочиненіи: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, и въ мемуарѣ: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*[3]). Въ этихъ послѣднихъ изслѣдованіяхъ разсматриваемый вопросъ рѣшается для дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, представленныхъ въ слѣдующихъ двухъ частныхъ случаяхъ, или когда данныя уравненія разрѣшены относительно частныхъ производныхъ, или когда эти уравненія, не будучи разрѣшены относительно производныхъ, вмѣстѣ съ тѣмъ не зависятъ отъ неизвѣстной функціи z. На послѣдующихъ строкахъ распространяются предыдущія соображенія на системы уравненій общаго вида, какъ было мною указано въ засѣданіи, 19 декабря 1900 г., *Société Mathématique de France*, въ Парижѣ, и затѣмъ опубликовано въ изданіяхъ того же Общества въ статьѣ: *Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction* [4])

2. Пусть имѣемъ систему m уравненій съ частными производными *въ инволюціи*

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ i=1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_m$, такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta \equiv D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots p_m}\right) \gtrless 0. \tag{2}$$

Составляемъ соотвѣтствующую даннымъ уравненіямы (1) замкнутую [5]) систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной функціи f

$$\left.\begin{array}{c} [F_i, f] = 0, \\ i=1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, 1900, *S. S. 438, 468.*

[2]) *Comptes rendus, 16 janvier et 24 juillet* 1899.

[3]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5-e série,* t. V, 1899, p. 435.

[4]) *Bulletin de le Société Mathématique de France,* t. XXIV, 1901, p. 86.

[5]) См. стр. 55 настоящаго изслѣдованія.

Послѣднія уравненія называются *дифференціальными уравненіями характеристикъ*. При геометрическомъ изложеніи, выводъ ихъ совершается на основаніи геометрическихъ свойствъ разсматриваемой задачи интегрированіе. Что касается аналитическаго изложенія теоріи характеристикъ, то въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (3) являются непосредственнымъ слѣдствіемъ основной идеи такъ называемаго второго способа Якоби интегрированія разсматриваемыхъ уравненій [1]). Тогда вся задача теоріи характеристикъ представляетъ ничто иное, какъ рѣшеніе послѣдняго изъ трехъ различныхъ, указанныхъ выше аналитическихъ вопросовъ, представляющихся при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Поэтому мы не станемъ останавливаться на вопросѣ о составленіи дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, а перейдемъ непосредственно къ вычисленію искомыхъ полныхъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій.

Предположимъ, что извѣстна полная система $2n-m+1$ различныхъ интеграловъ уравненій (3), которая представляется слѣдующими функціями

$$F_1, F_2, \dots F_m, f_1, f_2, \dots f_{2n-2m+1}. \tag{4}$$

Задача разсматриваемой нами теоріи характеристикъ приводится къ рѣшенію слѣдующаго вопроса:

Составить при помощи данныхъ функцій (4) *значенія перемѣнныхъ*

$$z, p_1, p_2, \dots p_n,$$

въ функціяхъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_n$, *при томъ такъ, чтобы послѣднія функціи удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ*

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=p_1, \frac{\partial z}{\partial x_2}=p_2, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}=p_n$$

и утождествляли данныя дифференціальныя уравненія (1).

Приравниваемъ m первыхъ функцій (4) нулямъ, а всѣ остальныя функціи соотвѣтственно произвольнымъ постояннымъ величинамъ $C_1, C_2, \dots C_{2n-2m+1}$, и получаемъ такимъ образомъ слѣдующую сисистему уравненій

$$F_i(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n)=0,$$
$$i=1, 2, \dots m,$$

$$f_r(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n)=C_r$$
$$r=1, 2, \dots 2n-2m+1.$$

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5-e série t. V p. 435).

Вслѣдствіе условія, представленнаго неравенствомъ (2), послѣдняя система уравненій разрѣшима относительно перемѣнныхъ

$$x_{m+1},\ x_{m+2}, \dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \dots p_n.$$

Предположимъ, что опредѣляемыя такимъ образомъ значенія ихъ представляются равенствами

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi(x_1,\ x_2, \dots x_m,\ C_1,\ C_2, \dots C_{2n-2m+1}), \\ x_{m+k} &= \varphi_k(x_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots C_{2n-2m+1}), \\ p_s &= \theta_s(x_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots C_{2n-2m+1}), \\ & k=1,2,\dots n-m,\ s=1,2,\dots n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Составимъ, наконецъ, систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующую линейнымъ уравненіямъ (3), для которой уравненія (5) являются интегральными. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что нашъ опредѣлитель Δ выражается слѣдующимъ образомъ, въ явной формѣ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}.$$

Обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$\Delta_i,\ \Delta_{ik},\ \Delta_i^s$$

тѣ значенія, которыя принимаетъ послѣдній опредѣлитель Δ, при замѣнѣ въ немъ элементовъ i—аго столбца соотвѣтствующими частными производными функцій

$$F_1,\ F_2, \dots F_m,$$

взятыми соотвѣтственно по перемѣннымъ

$$z,\ p_{m+k},\ x_s.$$

Разрѣшая уравненія (3) относительно частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

получаемъ слѣдующую якобіевскую систему

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n-m}X^i_{m+k}\frac{\partial f}{\partial x_{m+k}}+\sum_{s=1}^{n}P^i_s\frac{\partial f}{\partial x_s}+Z^i\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots m,$$

коэффиціенты которой имѣютъ слѣдующія значенія

$$X^i_{m+k}\equiv-\frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

$$P^i_s\equiv\frac{\Delta^s_i+\Delta_i\,p_s}{\Delta},$$

$$Z^i\equiv-(p_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}p_{m+k}).$$

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ именно искомую систему

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+k}&=\sum_{i=1}^{m}X^i_{m+k}dx_i,\\ dp_s&=\sum_{i=1}^{m}P^i_s\,dx_i,\\ dz&=\sum_{i=1}^{m}Z^i\,dx_i,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$k=1,\ 2,\ldots n-m,\quad s=1,\ 2,\ldots n.$$

Очевидно, что значенія (5) утождествляютъ уравненія (6). Потому, на основаніи равенствъ (5), система $n-m$ первыхъ уравненій (6) и послѣднее изъ нихъ приводятъ къ слѣдующему тождеству

$$dz=\sum_{i=1}^{m}p_i\,dx_i+\sum_{k=1}^{n-m}p_{m+k}\,dx_{m+k}.$$

Отсюда вытекаетъ весьма важное заключеніе: Если возможно вывести изъ уравненій (5) значенія z, p_{m+1}, p_{m+2},$\ldots p_n$, въ функціяхъ перемѣнныхъ x_1, x_2,$\ldots x_n$, удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+k}}=p_{m+k},\quad k=1,\ 2,\ldots n-m,\qquad(7)$$

то должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=p_i, \quad i=1,\ 2,\ldots m,$$

такъ какъ въ уравненіяхъ (5) перемѣнныя величины $x_1, x_2, \ldots x_m$ являются независимыми. Такимъ образомъ разсматриваемая задача приводится къ разысканію указанныхъ значеній z и p_{m+k}, удовлетворяющихъ условіямъ (7). Для этого *необходимо* и *достаточно*, какъ доказано въ моихъ упомянутыхъ выше изслѣдованіяхъ [1]), исключить изъ перваго уравненія (5) $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ, при помощи $n-m$ уравненій $x_{m+k}=\varphi_k$, такимъ образомъ, чтобы уничтожались тождественно слѣдующія выраженія

$$U_c=\frac{\partial z}{\partial C}-\sum_{k=1}^{n-m}p_{m+k}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial C},$$

соотвѣтствующія всѣмъ исключаемымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ C. Если кромѣ того всѣ функціи U_c, соотвѣтствующія всѣмъ $n-m+1$ остальнымъ произвольнымъ постояннымъ C, отличны отъ нуля, то въ такомъ случаѣ полученный результатъ исключенія представляетъ *полный интегралъ* Лагранжа изслѣдуемой системы уравненій (1).

Само собою разумѣется, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ самый видъ уравненій (5) указываетъ непосредственно, какія произвольныя постоянныя слѣдуетъ исключить, чтобы получить искомый интегралъ. Что касается общаго случая то, для рѣшенія разсматриваемаго вопроса здѣсь слѣдуетъ изслѣдовать свойства функцій U_c, которыя доказываютъ существованіе цѣлаго ряда произвольныхъ постоянныхъ, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ, необходимымъ для рѣшенія задачи, и представляютъ обобщеніе нашихъ предыдущихъ изслѣдованій.

3. Мы начнемъ съ вычисленія производныхъ по $x_1, x_2, \ldots x_m$ функціи U_c, которая зависитъ только отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, въ силу уравненій (5). Легко видѣть, что искомыя производныя приводятся къ слѣдующему виду.

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-\sum_{k=1}^{n-m}p_{m+k}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+k}}{\partial C}\cdot\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i}-\frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}\right).$$

---

[1]) *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 80—82,
Mémoire sur l'intégration des équations..., p.p. 441—443.

Обозначимъ через M_i^h миноръ опредѣлителя Δ, соотвѣтствующій его элементу $\frac{\partial F_h}{\partial p_i}$, со включеніемъ своего знака. Въ такомъ случаѣ получаемъ слѣдующія равенства

$$\Delta \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_i}, \qquad \Delta_i \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial z},$$

$$\Delta_{ik} \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}, \qquad \Delta_i^s \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial x_s}.$$

Подставляя въ послѣднее выраженіе $\frac{\partial U_c}{\partial x_i}$, вмѣсто производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i},$$

соотвѣтственно ихъ значенія, изъ уравненій (6),

$$Z^i, \; X^i_{m+k}, \; P^i_{m+k},$$

получаемъ, въ силу предыдущихъ выраженій опредѣлителей Δ, Δ_i, Δ_{ik}, Δ_i^s, слѣдующій результатъ

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial C} + \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{m} M_i^h \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right) +$$

$$+ \frac{\Delta_i}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}.$$

Такъ какъ данныя уравненія (1) утождествляются на основаніи равенствъ (5), то имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} \right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial C} +$$

$$+ \frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C} = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots m,$$

для каждой изъ произвольныхъ постоянныхъ C. Поэтому предыдущее выраженіе производныхъ становится

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i} = -U_c \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} lg\, U_c = -\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до m. Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\Delta_j}{\Delta},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей j и i, отъ 1 до m, которыя показываютъ, что выраженіе

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i}{\Delta} dx_i$$

представляетъ точный дифференціалъ [1]), въ силу уравненій (5). Обозначимъ этотъ точный дифференціалъ черезъ dV. Вслѣдствіе предыдущихъ выраженій производныхъ $lg\, U_c$, получаемъ, при помощи квадратуры, слѣдующее равенство

$$U_c = U_c^0 e^{-\int_{V_0}^{V} dV}, \tag{8}$$

гдѣ U_c^0 V_0 обозначаютъ начальныя значенія функцій U_c и V.

Предыдущая зависимость упрощается, когда разсматриваемыя уравненія не зависятъ отъ перемѣнной z. Какъ извѣстно, къ послѣднему случаю преобразовываются также и данныя уравненія (1) увеличеніемъ числа перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ вмѣсто z новую функцію v, всѣхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z$, связанную съ ними слѣдующей зависимостью

$$v(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = 0.$$

---

[1]) Послѣднее выраженіе представляетъ обобщеніе изслѣдованнаго мною раньше точнаго дифференціала (см. *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 83.)

Обозначимъ черезъ q_s и q соотвѣтственно частныя производныя $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$. Въ силу данной зависимости, опредѣляющей новую функцію, прежнія производныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ новыя производныя

$$p_s = -\frac{q_s}{q}.$$

Преобразованныя уравненія (1) остаются также въ *инволюціи*, такъ какъ имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства между скобками Пуассона, для преобразованныхъ уравненій, и скобками Вейлера, для данныхъ уравненій (1),

$$(F'_k, F'_h) = -\frac{1}{q}[F_k, F_h]',$$

при чемъ значки обозначаютъ результатъ подстановки, выполненной надъ выраженіями, при которыхъ поставлены эти значки.

Такъ какъ производная q отлична отъ нуля, то ограничивая наши изслѣдованія областью измѣненія перемѣнныхъ, внутри которой частная производная q сохраняетъ конечное значеніе, заключаемъ изъ предыдущаго равенства, что условія инволюціи данныхъ уравненій (1) влекутъ за собой условія инволюціи преобразованныхъ уравненій. Такимъ образомъ система уравненій въ инволюціи (1) преобразовывается въ новую систему уравненій въ инволюціи, которыя не заключаютъ болѣе зависимой перемѣнной величины.

Для послѣднихъ уравненій очевидно формула (8) принимаетъ слѣдующій видъ

$$U_c = U_c^0,$$

гдѣ U_c^0 обозначаетъ начальное значеніе изслѣдуемой функціи U_c.

Мы ограничимъ наши изслѣдованія областью измѣненія перемѣнныхъ величинъ, внутри которой интегралъ дифференціала dV сохраняетъ конечную опредѣленную величину. Такъ какъ, при этомъ условіи, выраженіе $e^{-\int_{V_0}^{V} dV}$ никогда не можетъ обратиться въ нуль, то, въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, функціи U_c обращаются въ нуль или отличны отъ нуля одновременно со своими начальными значеніями U_c^0. Такимъ образомъ задача составленія полныхъ интеграловъ даннныхъ уравненій (1) находится въ непосредственной зависимости отъ значенія выраженій U_c^0.

4. Чтобы удовлетворить всѣмъ указаннымъ условіямъ, примемъ въ разсматриваемомъ интегралѣ (5) за произвольныя постоянныя величины начальныя значенія a_i, b_i и b соотвѣтственно слѣдующихъ выраженій

$$x_{m+i},\quad p_{m+i},\quad z-\sum_{k=1}^{n-m} x_{m+k}p_{m+k}.$$

Пусть, въ этомъ предположеніи, уравненія (5) приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi(x_1,\ x_2,\ldots x_m,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{n-m},\ b,\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-m}),\\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-m}),\\ p_s &= \Phi_s(x_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-m}),\\ & k=1,2,\ldots n-m,\qquad s=1,2,\ldots n. \end{aligned}\right\}\quad (9)$$

Очевидно, что $n-m$ уравненій, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно величинъ $a_1,\ a_2,\ldots a_{n-m}$. Кромѣ того имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$U^0_{a_k}=0,\quad U^0_{b_k}=a_k,\quad U^0_b=1,$$
$$k=1,2,\ldots n-m.$$

Слѣдовательно, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ a_1, $a_2,\ldots a_{n-m}$ изъ перваго уравненія (9), на основаніи слѣдующихъ за нимъ $n-m$ уравненій, представляетъ искомый полный интегралъ [1]) данной системы (1).

Предположимъ, во-вторыхъ, что въ уравненіяхъ (9) постоянная b обозначаетъ начальное значеніе перемѣнной z, т. е.

$$b=z^0,$$

и что $n-m$ уравненій (9), отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ $b_1,\ b_2,\ldots b_{n-m}$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что результатъ исключенія, изъ перваго уравненія (9), ихъ значеній, опредѣленныхъ послѣдними уравненіями, представляетъ также искомый полный интегралъ.

Пусть, наконецъ, въ уравненіяхъ (9) постоянная b имѣетъ слѣдующее значеніе

$$b=z^0-\sum_k a_k b_k,$$

гдѣ суммированіе распространяется на показатели всѣхъ тѣхъ постоянныхъ b_k, относительно которыхъ разрѣшимы $n-m$ уравненій системы (9), отъ второго до $n-m+1$ включительно. Въ такомъ случаѣ оче-

[1]) Ср. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи...* стр. 85—86.

видно, что результатъ исключенія изъ перваго уравненія (9) указанныхъ значеній b_k и всѣхъ a_i, для которыхъ $i \gtrless k$, представляетъ также искомый полный интегралъ.

5. Аналогично разысканію полныхъ интеграловъ изслѣдуемой системы уравненій (1), легко вывести также законъ составленія ихъ общаго интеграла. Представимъ интегральныя уравненія (5) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \ldots x_m, x^0_{m+1}, \ldots x^0_n, z^0, p^0_{m+1} \ldots p^0_n), \\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \ldots \ldots p^0_n), \\ p_s &= \Phi_s(x_1, \ldots \ldots p^0_n), \\ & k=1, 2, \ldots n-m, \quad s=1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Предположимъ далѣе, что произвольныя постоянныя величины x^0_{m+k}, z, p^0_{m+k} связаны между собой слѣдующими зависимостями

$$\left.\begin{aligned} z^0 = \Theta_0;\quad p^0_{m+k} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial x^0_{m+k}}, \\ k=1, 2, \ldots n-m, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

гдѣ Θ_0 обозначаетъ начальное значеніе функціи $\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$, соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ ея перемѣнныхъ $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_n$. Кромѣ того необходимо должно удовлетворяться также условіе, чтобы опредѣляемыя формулами (11) значенія z^0, $p^0_{m+1}, p^0_{m+2}, \ldots p^0_n$ лежали внутри разсматриваемой нами области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ величинъ.

Уравненія (10), въ силу значеній (11), становятся

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi'(x_1, x_2, \ldots x_m, x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots x^0_n), \\ x_{m+k} &= \Psi'_k(x_1, x_2, \ldots \ldots x^0_n), \\ p_s &= \Phi'_s(x_1, \ldots \ldots x^0_n), \\ & k=1, 2, \ldots n-m, \quad s=1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Очевидно, что $n-m$ уравненій послѣдней системы, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно постоянныхъ величинъ $x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots x^0_n$, такъ какъ *функціи* Ψ'_k *принимаютъ послѣднія значенія* для значеній $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_m$ независимыхъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_m$, и, слѣдовательно, функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\Psi'_1,\ \Psi'_2,\ldots \Psi'_{n-m}}{x^0_{m+1},\ x^0_{m+2},\ldots x^0_n}\right),$$

для послѣднихъ начальныхъ значеній, становится равнымъ единицѣ. Наконецъ, всѣ функціи

$$U_{x^0_{m+i}},\quad i=1,\ 2,\ldots n-m,$$

уничтожаются тождественно, въ силу уравненій (11). Поэтому исключая $x^0_{m+1},\ x^0_{m+2},\ldots x^0_n$ изъ перваго уравненія (12), при помощи $n-m$ послѣдующихъ за нимъ уравненій, мы получаемъ рѣшеніе данной системы (1).

Легко убѣдиться, что полученное рѣшеніе представляетъ *общій интегралъ Коши*. Обозначимъ, въ самомъ дѣлѣ, черезъ

$$\theta(x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots x_n)$$

значеніе функціи Θ, для начальныхъ значеній $x^0_1,\ x^0_2,\ldots x^0_m$ перемѣнныхъ $x_1,\ x_2,\ldots x_m$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что, для послѣднихъ начальныхъ значеній, функція z и ея частныя производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}},\ \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}},\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

принимаютъ соотвѣтственно значенія функціи θ и ея частныхъ производныхъ по $x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots x_n$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_{m+1}},\ \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+2}},\ldots \frac{\partial \theta}{\partial x_n}.$$

Такимъ образомъ полученное рѣшеніе представляетъ дѣйствительно общій интегралъ Коши.

———

ГЛАВА VII.

Интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ и каноническихъ уравненій. Усовершенствованный С. Ли способъ Якоби-Майера интегрированія уравненій съ частными производными.

1. Каноническія дифференціальныя уравненія обыкновенныя и въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ частный случай дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣтствующихъ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка, представленнымъ въ видѣ, разрѣшенномъ относительно частныхъ производныхъ. Поэтому теорія дифференціальныхъ уравненій характеристикъ представляетъ полную аналогію съ теоріей каноническихъ уравненій. Какъ хорошо извѣстно, существуетъ тѣсная взаимная зависимость между задачами интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и соотвѣтствующими дифференціальными уравненіями характеристикъ [1]). Въ предыдущей главѣ мы занимались вопросомъ о составленіи полнаго интеграла дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, исходя изъ общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Въ настоящей главѣ мы имѣемъ въ виду привести нѣсколько соображеній по поводу обратной задачи составленія общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, послѣ того какъ проинтегрировано соотвѣтствующее уравненіе съ частными производными. Съ рѣшеніемъ этой послѣдней задачи также тѣсно связаны имена *Гамильтона*, *Якоби* и *Ліувилля*, которые подошли, независимо другъ отъ друга и съ различныхъ точекъ зрѣнія, къ рѣшенію разсматриваемой задачи, какъ объ этомъ можно судить, сопоставляя сочиненія этихъ знаменитыхъ геометровъ.

Всѣ первоначальные труды ихъ относятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ динамики. Первыми, по времени своего опубликованія, являются изслѣдованіе Гамильтона: *On a general method in dynamics* [2]) и письмо Якоби Парижской Академіи Наукъ: *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps* [3]).

---

[1]) См. мои изслѣдованія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными..., Mémoire sur l'intégration des équations... (Journal Jordan, 1899), Sur les théorèmes de Jacobi et Liouville (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 1903).*

[2]) *Philosophical Transactions*, 1831—1835.

[3]) *Comptes rendus*, t. III, p. 59—61.

Jacobi.—Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 33.

Въ указанномъ изслѣдованіи Гамильтонъ выражаетъ общій интегралъ системы обыкновенныхъ каноническихъ уравненій при помощи полнаго интеграла соотвѣтствующаго уравненія съ частными производными, при чемъ произвольными постоянными служатъ начальныя значенія перемѣнныхъ. Что касается упомянутаго письма Якоби, то онъ показываетъ въ немъ, какъ, при помощи дифференцированія, составляется общій интегралъ канонической системы дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости, для которой извѣстны интегралъ живой силы и второй интегралъ, независящій отъ времени. Въ своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ [1]) Якоби развилъ точку зрѣнія Гамильтона, принимая произвольныя величины, не представляющія начальныхъ значеній перемѣнныхъ, за постоянныя интегрированія и распространяя разсматриваемую теорію на одно уравненіе съ частными производными общаго вида. Затѣмъ въ 1853 году Ліувилль опубликовалъ свою замѣтку [2]): *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853.* Сущность послѣдней представляетъ распространеніе перваго вышеуказаннаго предложенія Якоби на каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій общаго вида. Въ этой статьѣ Ліувилль показываетъ, какъ составляется общій интегралъ обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, когда извѣстна половина всѣхъ интеграловъ, при условіи, что послѣдніе находятся въ инволюціи. Кромѣ того Ліувилль дополняетъ свою замѣтку весьма цѣннымъ замѣчаніемъ относительно того случая, когда данные интегралы разсматриваемой канонической системы неразрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ одного и того же класса. При этомъ Ліувилль указываетъ, что, въ своихъ лекціяхъ въ *Collége de France*, онъ изслѣдовалъ послѣдній случай во всей его общности. Болѣе подробное разсмотрѣніе этого послѣдняго случая находится въ диссертаціи Лафона [3]). Наконецъ, мы считаемъ необходимымъ поставить въ тѣсную связь съ послѣднимъ вопросомъ изслѣдованія Майера, Бертрана и Дарбу, упомянутыя нами выше, при изложеніи теоріи характеристикъ и къ которымъ намъ придется еще разъ возвратиться, устанавливая ихъ взаимное соотношеніе съ теоріей полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

---

[1]) *Jacobi.—Ueber die Reduction der integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer zahl Variabeln auf die integration eines einzigen systemes gewönlicher Differenzialgleichungen* (*Gesammelte Werke*, Bd. IV. S. 57).

Jacobi.—Vorlesungen über Dynamik. Zweite, revidirte Ausgabe. Berlin, 1884, Zwanzigste Vorlesung, S. 157.

[2]) *Journal Liouville*, t. XX, 1855, p. 137.

[3]) *Lafon, A.*—Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique. Thèse. Paris 1854.

Что касается двухъ различныхъ точекъ отправленія, которыя мы здѣсь отмѣтили, при составленіи общаго интеграла каноническихъ дифференціальныхъ уравненій, то оба разсматриваемыхъ предложенія Гамильтона-Якоби и Якоби-Ліувилля не представляютъ существеннаго различія. Въ самомъ дѣлѣ, первая теорія исходитъ изъ полнаго интеграла уравненія съ частными производными, тогда какъ Ліувилль принимаетъ за основаніе интегралы въ инволюціи соотвѣтствующей канонической системы, число которыхъ равно порядку послѣдней. Легко видѣть однако, что какъ послѣдніе интегралы такъ и полный интегралъ соотвѣтствующаго частнаго уравненія представляють эквивалентные элементы, въ смыслѣ интегрированія послѣдняго уравненія. Кромѣ того мы установимъ далѣе такое же аналогичное соотвѣтсвіе между отмѣченнымъ выше частнымъ случаемъ Ліувилля и полными интегралами С. Ли.

2. Мы начнемъ съ изложенія новаго. весьма простого доказательства разсматриваемыхъ предложеній о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Всѣ хорошо извѣстныя доказательства послѣднихъ предложеній представляютъ непосредственную повѣрку формулъ, видъ которыхъ дается предварительно. Легко однако иначе поставить вопросъ, задавшись цѣлью вычислить искомые интегралы, не предполагая напередъ извѣстнымъ ихъ видъ.

Пусть имѣемъ слѣдующее уравненіе

$$p+H(t, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n)=0, \tag{1}$$

гдѣ перемѣнныя p, p_1, $p_2, \dots p_n$ обозначаютъ частныя производныя перваго порядка функціи z соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ t, x_1, $x_2, \dots x_n$.

Составляемъ соотвѣтствующую каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dx_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i=1, 2, \dots n.\end{array}\right| \tag{2}$$

Предположимъ, что полный интегралъ уравненія (1) представляется уравненіемъ

$$z=V(t, x_1, x_2, \dots x_n, b_1, b_2, \dots b_n)+b, \tag{3}$$

гдѣ b_1, $b_2, \dots b_n$, b обозначаютъ $n+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \dots b_n}\right) \tag{4}$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно, уравненія

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots n,$$

разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \dots b_n$ и приводятъ къ n различнымъ интеграламъ въ инволюціи конической системы (2)

$$\left.\begin{array}{c} F_i(t, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = b_i, \\ i = 1, 2, \dots n. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Обратно эти послѣдніе интегралы разрѣшимы очевидно относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \dots p_n$.

Такимъ образомъ, благодаря извѣстному полному интегралу частнаго уравненія (1), становятся извѣстными n интеграловъ канонической системы (2). Поэтому задача интегрированія послѣдней приводится къ составленію n различныхъ дифференціальныхъ зависимостей, интегрированіе которыхъ приводило бы къ n остальнымъ искомымъ интеграламъ. Съ этою цѣлью составляемъ тождество

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x_1, x_2, \dots x_n, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

которое получается изъ даннаго уравненія (1), при помощи подстановки его рѣшенія (3).

Дифференцируя послѣднее тождество по $b_1, b_2, \dots b_n$, получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial b_s} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots n.$$

Въ силу уравненій интегрируемой системы (2), послѣднія тождества преобразовываются въ систему n слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n.$$

Какъ легко видѣть, первыя части послѣднихъ уравненій представляютъ точныя производныя, и мы приводимъ разсматриваемыя уравненія къ слѣдующему виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n.$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій даетъ искомыя интегральныя уравненія изслѣдуемой канонической системы (2)

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_n$ обозначаютъ n произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Легко видѣть, что получаемые отсюда интегралы различны. Это слѣдуетъ изъ того, что послѣднія уравненія не зависятъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса и разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, вслѣдствіе введеннаго предположенія о неравенствѣ нулю опредѣлителя (4).

Въ изложенномъ сейчасъ доказательствѣ мы исходили изъ полнаго интеграла уравненія (1). Мы дадимъ еще второй способъ разысканія общаго интеграла канонической системы (2), принимая за основаніе ея n интеграловъ въ инволюціи (5). Съ этою цѣлью начнемъ съ разсмотрѣнія свойствъ искомыхъ интеграловъ.

Замѣтимъ прежде всего, что функціи

$$p + H, \; F_1, \; F_2, \ldots F_n \tag{6}$$

находятся въ инволюціи. Поэтому слѣдующія $n+1$ уравненій съ частными производными функціи f

$$(p + H, f) = 0,$$

$$(F_i, f) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \ldots s-1, s+1, \ldots n, \\ 1, & i = s, \end{cases}$$

образуютъ нормальную систему, допускающую n различныхъ, отличныхъ отъ функцій (6) интеграловъ, которые обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$f_1, f_2, \ldots f_n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ *отсюда убѣждаемся также въ существованіи и слѣдующихъ интеграловъ канонической системы (2)*

$$f_s(t, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = a_s,$$
$$s = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Каждый изъ этихъ интеграловъ находится въ союзѣ (conjuguée) съ однимъ изъ интеграловъ (5) и въ инволюціи съ остальными изъ нихъ.

Убѣдившись въ существованіи послѣднихъ интеграловъ, легко ихъ вычислить, исходя изъ того, что каждая функція f_s опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} &(p + H, f_s) = 0, \\ &(F_i, f_s) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \ldots s-1, s+1, \ldots n, \\ 1, & i = s. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, интегралы (5) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, то функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_n}{p_1, p_2, \ldots p_n}\right) \qquad (8)$$

долженъ быть отличнымъ отъ нуля. Преобразовываемъ уравненія (7) къ новымъ перемѣннымъ, принимая $b_1, b_2, \ldots b_n$ за новыя перемѣнныя вмѣсто $p_1, p_2, \ldots p_n$, и обозначимъ черезъ θ_s значеніе преобразованной функціи f_s. Въ силу свойствъ функцій (6), преобразованная система уравненій (7) становится

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Съ другой стороны значенія перемѣнныхъ $p, p_1, p_2, \ldots p_n$, опредѣляемыя уравненіями (1) и (5) какъ функціи величинъ

$$t, x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_n,$$

утождествляютъ эти послѣднія уравненія. Дифференцируя полученныя такимъ образомъ тождества по величинамъ $b_1, b_2, \ldots b_n$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}=\begin{cases}0, & i \gtrless s,\\ 1, & i=s.\end{cases}$$

Вычитая послѣднія тождества соотвѣтственно изъ предыдущихъ, получаемъ тождества

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots n,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n. Отсюда, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (8), вытекаютъ слѣдующія тождества

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial \theta_s}{\partial t}=\dfrac{\partial p}{\partial b_s},\quad \dfrac{\partial \theta_s}{\partial x_k}=\dfrac{\partial p_k}{\partial b_s},\\ k=1,\ 2,\ldots n,\end{array}\right\} \tag{9}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n. Такъ какъ опредѣляемыя уравненіями (1) и (5) значенія перемѣнныхъ p, p_1, p_2, ... p_n удовлетворяютъ попарно условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x_r},$$

то, дифференцируя послѣднія по b_1, b_2, ... b_n, получаемъ новыя условія которыя показываютъ, что уравненія (9) интегрируемы. Поэтому функціи θ_s опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s=\int\left(\frac{\partial p}{\partial b_s}\partial t+\frac{\partial p_1}{\partial b_s}dx_1+\ldots+\frac{\partial p_n}{\partial b_s}dx_n\right),$$

$$s=1,\ 2,\ldots n,$$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины.

Какъ легко видѣть, найденныя значенія функцій θ выражаются также слѣдующимъ образомъ, при помощи полнаго интеграла (3).

$$\theta_s = \frac{\partial V}{\partial b_s}, \quad s = 1, 2 \ldots n.$$

Чтобы получить отсюда значенія функцій f_s, остается совершить обратное преобразованіе перемѣнныхъ, замѣнивъ величины $b_1, b_2, \ldots b_n$ соотвѣтственно ихъ функціональными значеніями $F_1, F_2, \ldots F_n$. Наконецъ, только что изложенное доказательство становится болѣе простымъ, вслѣдствіе симметричности вычисленій, если за исходное принять слѣдующее дифференціальное уравненіе общаго вида

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0.$$

Соотвѣтствующія дифференціальныя уравненія характеристикъ становятся

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \cdots \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \cdots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Пусть имѣемъ n слѣдующихъ различныхъ интеграловъ въ инволюціи послѣдней системы

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = b_i,$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

гдѣ F_0, b_0 условно обозначають значенія F, b и $b, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ представляють n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Уравненія, служащія для опредѣленія остальныхъ искомыхъ $n-1$ интеграловъ $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, принимають видъ

$$(F_i, f_s) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, 2, \ldots s-1, \quad s+1, \ldots n-1, \\ 1, & i = s, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Предполагая существованіе слѣдующаго неравенства

$$D\left(\frac{F, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}}{p_1, p_2, p_3, \ldots p_n}\right) \gtrless 0,$$

принимаемъ величины $b, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ за новыя перемѣнныя, вмѣсто $p_1, p_2, \ldots p_n$. Мы приходимъ такимъ образомъ къ двумъ различнымъ системамъ слѣдующихъ равенствъ

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Вычитая равенства второй строки соотвѣтственно изъ равенствъ первой строки, получаемъ слѣдующія уравненія

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

для всѣхъ различныхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Въ силу неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, получаемъ новыя уравненія

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s},$$

$$k = 1, 2, \ldots n, \quad s = 1, 2, \ldots n-1,$$

которыя и опредѣляютъ искомые интегралы при помощи квадратуръ.

3. Послѣднее доказательство распространяется также на случай, отмѣченный Ліувиллемъ, когда извѣстные интегралы (5) канонической системы (2) разрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ различныхъ классовъ, но при этомъ различныхъ значковъ. Такъ предположимъ, напримѣръ, что уравненія (5) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ величинъ

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-m}, x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots x_n,$$

такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_{n-m}, F_{n-m+1}, \ldots F_n}{p_1, p_2, \ldots p_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots x_n}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Возвращаясь къ уравненіямъ (7), опредѣляющимъ искомыя функціи f_s, вводимъ $b_1, b_2, \ldots b_n$ какъ новыя перемѣнныя вмѣсто величинъ $p_1, p_2, \ldots p_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots x_n$. Преобразованныя уравненія (7) становятся

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-m+r}}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}}\frac{\partial\theta_s}{\partial q_{n-m+r}}=\begin{cases}0, & i\gtrless s,\\ 1, & i=s.\end{cases}$$

Кромѣ того мы имѣемъ еще рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}}\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}}\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}=\begin{cases}0, & i\gtrless s,\\ 1, & i=s.\end{cases}$$

Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}-\frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)-$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-m+r}}+\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}-\frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)-\sum_{r=i}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-m+r}}+\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$i=1,2,\ldots n,$$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n. Вслѣдствіе неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, послѣдняя система приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial b_s},\quad\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial b_s},\quad\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-m+r}}=-\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s},$$

$$k=1,2,\ldots n-m,\qquad r=1,2,\ldots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n.

Какъ извѣстно изъ теоріи касательныхъ преобразованій, система уравненій (1) и (5) остается также въ инволюціи, если каноническія перемѣнныя подраздѣлить на два класса, изъ которыхъ каждый соотвѣтствуетъ одной изъ двухъ слѣдующихъ строкъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_{n-m},\ -p_{n-m+1},\ -p_{n-m+2}, \ldots -p_n,$$

$$p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m},\quad x_{n-m+1},\quad x_{n-m+2}, \ldots \quad x_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что послѣднія написанныя уравненія, служащія для опредѣленія функцій θ_s, образуютъ интегрируемую систему. Это заключеніе, независимо отъ теоріи касательныхъ преобразованій, слѣдуетъ также непосредственно изъ самаго факта существованія функцій θ_s, доказаннаго выше для соотвѣтствующихъ имъ значеній функцій f_s. Такимъ образомъ искомыя функціи опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dx_1 + \ldots + \frac{\partial p_{n-m}}{\partial b_s} dx_{n-m} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial b_s} dp_{n-m+1} - \ldots - \frac{\partial x_n}{\partial b_s} dp_n \right),$$
$$s = 1,\ 2, \ldots n,$$

гдѣ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины.

Легко представить послѣднія выраженія при помощи одной функціи. Въ самомъ дѣлѣ, проинтегрируемъ точный дифференціалъ

$$dz = p dt + p_1 dx_1 + \ldots + p_{n-m} dx_{n-m} - x_{n-m+1} dp_{n-m+1} - \ldots - x_n dp_n,$$

гдѣ $p,\ p_1, \ldots p_{n-m},\ x_{n-m+1}, \ldots x_n$ обозначаютъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (1) и (5). Напишемъ интегралъ послѣдняго дифференціала въ слѣдующемъ видѣ

$$z = U(t,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-m},\ p_{n-m+1}, \ldots p_n,\ b_1,\ b_2, \ldots b_n) + b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ функціи θ_s выражаются слѣдующимъ образомъ

$$\theta_s = \frac{\partial U}{\partial b_s},\quad s = 1,\ 2, \ldots n.$$

Поэтому искомыя интегральныя уравненія канонической системы (2) становятся

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} = a_s,\quad s = 1,\ 2, \ldots n,$$

гдѣ $a_1,\ a_2, \ldots a_n$ обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую каноническую систему третьяго порядка

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$i=1,2,3,$$

соотвѣтствующую частному дифференціальному уравненію

$$p+H=0,$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H=\frac{x_2x_3-x_1}{t}p_1+\frac{x_1x_3}{t}\frac{p_1^2}{p_2}-\frac{x_3^2}{t}\frac{p_1p_3}{p_2}.$$

Разсматриваемая каноническая система имѣетъ три интеграла въ инволюціи

$$\frac{tp_2}{p_1}=b_1,\quad t(1-\frac{p_2}{x_3p_1})=b_2,\quad \frac{tp_2^2}{x_3p_1}=b_3.$$

Послѣдніе, совмѣстно съ нашимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, опредѣляютъ значенія перемѣнныхъ p, p_1, p_2, x_3 слѣдующимъ образомъ

$$p=-\frac{b_1^2p_3-b_3(b_1x_2+b_2x_1)}{b_1(t-b_2)^2},$$

$$p_1=\frac{b_3t}{b_1(t-b_2)},\quad p_2=\frac{b_3}{t-b_2},\quad x_3=\frac{b_1}{t-b_2}.$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, функція U получаетъ значеніе

$$U=\frac{b_3(b_1x_2+tx_1)-b_1^2p_3}{b_1(t-b_2)}+b.$$

Поэтому слѣдующія три уравненія

$$\frac{\partial U}{\partial b_1}=a_1,\quad \frac{\partial U}{\partial b_2}=a_2,\quad \frac{\partial U}{\partial b_3}=a_3$$

опредѣляютъ искомые три интеграла интегрируемой канонической системы

$$-(x_1p_1+x_3p_3)\frac{p_1}{tp_2}=a_1,$$

$$(x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3)\frac{x_3p_1}{tp_2}=a_2,$$

$$(x_1p_1+x_2p_2)\frac{x_3p_1}{tp_2^2}=a_3.$$

Если принять за исходные интегралы нашей канонической системы первые два данные интеграла и послѣднiй изъ трехъ только что полученныхъ, которые образуютъ совмѣстно систему трехъ уравненiй въ инволюцiи, разрѣшимыхъ относительно перемѣнныхъ p_1, x_2, x_3, то соотвѣтствующее значенiе *характеристической функцiи* становится

$$U' = \left(\frac{1}{b_1} tx_1 - a_3 t + b_2 a_3\right) p_2 - \frac{b_1 p_3}{t - b_2}.$$

Въ такомъ случаѣ три искомые интеграла опредѣляются уравненiями

$$\frac{\partial U'}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial U'}{\partial b_2} = a_2, \quad \frac{\partial U'}{\partial a_3} = b_3,$$

которыя представляютъ остальные три приведенные уже выше интеграла изслѣдуемой канонической системы.

4. Всѣ приведенныя доказательства распространяются весьма легко на системы уравненiй съ частными производными и на соотвѣтствующiя дифференцiальныя уравненiя характеристикъ.

Начнемъ съ разсмотрѣнiя слѣдующей нормальной системы m дифференцiальныхъ уравненiй

$$\left.\begin{array}{c} p_i + H_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m, \quad (m < n). \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Составляемъ соотвѣтствующую послѣднимъ каноническую систему уравненiй въ полныхъ дифференцiалахъ

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i, \\ dp_{m+k} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+k}} dx_i, \\ k = 1, 2, \ldots n - m. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Пусть полный интегралъ системы (10) представляется равенствомъ

$$z = V(x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}) + b,$$

гдѣ b_1, $b_2 \ldots$, b_{n-m}, b обозначаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, \quad b_2, \quad \ldots b_{n-m}}\right) \gtrless 0. \qquad (12)$$

Какъ легко видѣть, производныя уравненія

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$
$$k = 1, 2, \ldots n - m,$$

опредѣляютъ $n - m$ различныхъ интеграловъ канонической системы (11). Ея остальные $n - m$ интеграловъ получаются слѣдующимъ образомъ.

Дифференцируя по всѣмъ величинамъ $b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$ тождества

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + H_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots m,$$

получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots m, \quad s = 1, 2, \ldots n - m.$$

Умножая послѣднія уравненія соотвѣтственно на dx_i и складывая результаты, соотвѣтствующіе всѣмъ различнымъ значкамъ i, отъ 1 до m, получаемъ $n - m$ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i = 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots n - m.$$

При помощи послѣднихъ тождествъ, первыя $n - m$ уравненій (11) преобразовываются въ слѣдующія дифференціальныя уравненія

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} dx_{m+k} = 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots n - m,$$

лѣвыя части которыхъ представляютъ точные дифференціалы

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$s=1,\ 2,\dots n-m.$$

Интегрируя послѣднія, находимъ искомыя интегральныя уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial b_s}=a_s,\quad s=1,\ 2,\dots n-m,$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\dots a_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Полученныя уравненія разрѣшимы относительно $n-m$ перемѣнныхъ $x_{m+1},\ x_{m+2},\dots x_n$, вслѣдствіе неравенства (12), и опредѣляютъ такимъ образомъ систему $n-m$ новыхъ различныхъ интеграловъ канонической системы (11), отличныхъ отъ прежнихъ, указанныхъ выше интеграловъ.

Распространимъ послѣднее доказательство на замкнутую систему уравненій, зависящихъ явно отъ функціональной перемѣнной величины z,

$$\left.\begin{array}{c} p_i+H_i(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\dots p_n)=0,\\ i=1,\ 2,\dots m,\quad (m<n), \end{array}\right\}\qquad(13)$$

которыя удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ [1])

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_i}-\frac{\partial H_h}{\partial z}H_i-\frac{\partial H_i}{\partial x_h}+\frac{\partial H_i}{\partial z}H_h+[H_k,\ H_h]=0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и i, отъ 1 до m.

Составляемъ соотвѣтствующую обобщенную каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{array}{c} dx_{m+k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}dx_i,\\[2ex] dp_{m+k}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{dH_i}{dx_{m+k}}dx_i,\\[1ex] k=1,\ 2,\dots n-m,\\[2ex] dz=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n-m}p_{m+r}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}}-H_i\right)dx_i. \end{array}\right\}\qquad(14)$$

---

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 48.

Пусть полный интегралъ системы (13) представляется уравненіемъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots x_n, b, b_1, b_2, \dots b_{n-m}), \tag{15}$$

гдѣ $b, b_1, b_2, \dots b_{n-m}$ обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, при чемъ

$$D\begin{pmatrix} V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \\ b, \quad b_1, \quad b_2, \dots b_{n-m} \end{pmatrix} \gtrless 0. \tag{16}$$

Очевидно, что совокупность уравненій (15)-аго и его первыхъ производныхъ уравненій по $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ опредѣляетъ $n-m+1$ различныхъ интеграловъ системы (14). Для разысканія остальныхъ $n-m$ интеграловъ, дифференцируемъ по всѣмъ величинамъ $b, b_1, b_2, \dots b_{n-m}$ тождества, которыя получаются изъ данныхъ уравненій (13), вслѣдствіе подстановки въ нихъ рѣшенія (15). Такимъ образомъ получается рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} + \frac{\partial H_i}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots n-m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x_i} + \frac{\partial H_i}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x_{m+n}} = 0,$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до n.

Предположимъ, что, внутри разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ величинъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе. Исключая изъ предыдущихъ тождествъ первой строки производную $\frac{\partial H_i}{\partial z}$, въ силу послѣдняго тождества, и раздѣляя полученный результатъ на $\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2$, приходимъ къ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right) + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots m, \qquad s = 1, 2, \dots n-m.$$

Умножая соотвѣтственно на dx_i тождества, соотвѣтствующія значку i, и складывая ихъ, получаемъ, въ силу $n-m$ первыхъ уравненій (14), систему слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) dx_{m+k} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n-m.$$

Полученныя уравненія приводятся къ слѣдующему виду уравненій въ точныхъ дифференціалахъ

$$d \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n-m.$$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ интегральныя уравненія, опредѣляющія искомые интегралы обобщенной канонической системы (14),

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} = a_s, \text{ или } \frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s \frac{\partial V}{\partial b},$$

$$s = 1, 2, \ldots n-m.$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{n-m}$ обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Какъ хорошо извѣстно [1]), полученныя уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$, въ силу неравенства (16), и, слѣдовательно, опредѣляемые ими интегралы системы (14) различны, а также отличны отъ прежнихъ $n-m+1$ интеграловъ, такъ какъ не зависятъ отъ перемѣнныхъ p_{m+k}.

Возьмемъ, наконецъ, систему m дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи, не зависящихъ отъ z и представленныхъ въ общемъ видѣ

$$\left. \begin{array}{c} F_h(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m. \end{array} \right\} \quad (17)$$

[1]) См. мое сочиненіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899. p.p. 160—161).

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, такъ что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\varDelta \equiv D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots p_m}\right) \gtrless 0.$$

Составляемъ соотвѣтствующую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (см. стр. 148)

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} dx_i, \\ dp_r &= -\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^r}{\Delta} dx_i, \\ k=1, 2, \ldots n-m, &\quad r=1, 2, \ldots n, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

гдѣ Δ_{ik}, Δ_i^r обозначаютъ прежнія значенія опредѣлителей (см. ст. 147), съ тою только разницею, что здѣсь функціи F_k не зависятъ отъ z.

Предположимъ извѣстнымъ полный интегралъ данныхъ уравненій (17)-ыхъ

$$z = V(x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}) + b,$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$, b обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ удовлетворяется условіе

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots b_{n-m}}\right) \gtrless 0.$$

Само собою разумѣется, что уравненія

$$F_k(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C_k,$$
$$k=1, 2, \ldots m,$$
$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$
$$k=1, 2, \ldots n-m,$$

опредѣляютъ n различныхъ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18), причемъ $C_1, C_2, \ldots C_m$ обозначаютъ m различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Что касается остальныхъ $n-m$ интеграловъ послѣдней системы (18), то они вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Мы имѣемъ тождества

$$F_h\left(x_1,\ x_2,\dots x_n,\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\dots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0,$$

$$h=1,\ 2,\dots m.$$

Дифференцируя ихъ послѣдовательно по $b_1,\ b_2,\dots b_{n-m}$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\,\partial b_s}=0,$$

$$h=1,\ 2,\dots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя $\triangle$, разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i},\quad i=1,\ 2,\dots m,$$

и пользуясь прежними значеніями опредѣлителей $\triangle_{ik}$, преобразовываемъ наши тождества въ слѣдующія новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\triangle_{ik}}{\triangle}\,\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_{m+k}}=0,$$

$$i=1,\ 2,\dots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Умножая послѣднія тождества соотвѣтственно на dx_i и складывая результаты, получаемъ, въ силу первыхъ $n-m$ уравненій (18), слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i}\,dx_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\partial x_{m+k}}\,dx_{m+k}=0,$$

или

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right)=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Поэтому становится очевиднымъ, что остальные искомые $n-m$ интеграловъ системы (18) опредѣляются слѣдующими $n-m$ различными уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots n-m,$$

гдѣ $a_1, a_2, \dots a_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ [1]).

Доказанныя предложенія легко распространяются также на системы частныхъ дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи общаго вида, заключающихъ явно неизвѣстную функцію z.

Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, систему m уравненій въ инволюціи, зависящихъ отъ неизвѣстной функціи z,

$$\left. \begin{array}{c} F_h(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \dots m, \end{array} \right\} \tag{19}$$

для которыхъ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Delta \equiv D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_m}{p_1, p_2, \dots p_m}\right) \gtrless 0.$$

Соотвѣтствующая система въ полныхъ дифференціалахъ представляется совокупностью прежнихъ уравненій (18) и слѣдующаго дополнительнаго

$$dz = -\sum_{i=1}^{m}\left(p_i + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}p_{m+k}\right), \tag{20}$$

при чемъ опредѣлители Δ, Δ_{ik} и Δ_i^r отличаются, въ настоящемъ случаѣ. отъ предыдущихъ ихъ значеній тѣмъ, что функціи F_h зависятъ здѣсь отъ перемѣнной z.

Пусть полный интегралъ системы (19) представляется уравненіемъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots x_n, b, b_1, b_2, \dots b_{n-m}), \tag{21}$$

гдѣ $b, b_1, b_2, \dots b_{n-m}$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины, и кромѣ того существуетъ условіе

$$D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots b_{n-m}}\right) \gtrless 0.$$

---

[1]) Этотъ результатъ былъ опубликованъ мною въ замѣткѣ: *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles (Comptes rendus, 24 juillet 1899).*

Совокупность уравненія (21) и n слѣдующихъ

$$F_h(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) = C_h,$$
$$h = 1, 2, \dots n - m,$$

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$
$$k = 1, 2, \dots n - m,$$

опредѣляетъ $n + 1$ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18) и (20), гдѣ $C_1, C_2, \dots C_m$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Остальные $n - m$ интеграловъ послѣдней системы вычисляются на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Составляемъ тождества, которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m,

$$\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} b_s} = 0,$$
$$s = 1, 2 \dots n - m,$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b} = 0,$$

Предполагая, что, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе, получаемъ аналогично предыдущему (см. стр. 171) новыя тождества для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n - m$,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right) = 0,$$
$$h = 1, 2, \dots m.$$

Такъ какъ опредѣлитель Δ отличенъ отъ нуля, то, разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right), \quad i = 1, 2, \dots m,$$

и пользуясь прежними значеніями опредѣлителей Δ_{ik}, получаемъ тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Совершенно аналогично предыдущему умножаемъ послѣднія тождества соотвѣтственно на dx_i и складываемъ полученные результаты. При помощи полученныхъ такимъ образомъ тождествъ, дифференціальныя уравненія, соотвѣтствующія первымъ $n-m$ уравненіямъ (18), преобразовываются въ слѣдующія

$$d\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Такимъ образомъ искомые интегралы опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s}-a_s\frac{\partial V}{\partial b}=0,$$

$$s=1,2,\ldots n-m,$$

гдѣ a_1, $a_2,\ldots a_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Подобно тому какъ мы только что распространили на системы уравненій съ частными производными первое изъ изложенныхъ доказательствъ теоремы Якоби, такъ совершенно аналогично возможно обобщить приведенное нами доказательство предложеній Ліувилля. Это обобщеніе не представляетъ никакихъ затрудненій, когда разсматриваемыя уравненія явно не зависятъ отъ функціональной перемѣнной z. Что касается случая, когда перемѣнная z входитъ въ данныя уравненія, тогда равенства, выражающія каноническія свойства интеграловъ, соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, представляются въ болѣе сложномъ видѣ. Для выраженія этихъ свойствъ въ разсматриваемомъ случаѣ оказывается необходимымъ составить выраженіе полнаго интеграла соотвѣтствующихъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій. То же самое замѣчаніе относится къ случаю Ліувилля, когда данные интегралы въ инволюціи разрѣшаются относительно каноническихъ перемѣнныхъ съ различными значками и различныхъ классовъ. Этотъ случай

очевидно приводится къ первому, при помощи касательныхъ преобразованій. Мы приходимъ такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ къ необходимости перейти къ тѣмъ же первоначальнымъ, исходнымъ условіямъ, на которыхъ основывались въ первомъ изъ данныхъ нами доказательствъ. Какъ намъ кажется, послѣднее, по простотѣ своей, повидимому не оставляетъ желать ничего лучшаго. Мы не станемъ входить въ виду этого въ дальнѣйшія подробности относительно доказательствъ изслѣдуемыхъ предложеній и перейдемъ къ разсмотрѣнію полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

5. Какъ видно изъ изложенныхъ выше соображеній, слѣдуетъ по справедливости приписать Ліувиллю честь первенства, воспользоваться идеей интегральныхъ собраній С. Ли [1]). Дѣйствительно, въ своей упомянутой выше статьѣ: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique...*, Ліувилль предусмотрѣлъ случай полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, представляющихъ систему интеграловъ въ инволюціи канонической системы, которые неразрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. При этомъ Ліувилль, и затѣмъ Лафонъ, разрѣшали представляющій здѣсь вопросъ въ самомъ общемъ видѣ, т. е. не ограничивались предположеніемъ, подобно С. Ли, что данные интегралы въ инволюціи не должны разрѣшаться относительно какихъ либо другихъ перемѣнныхъ кромѣ тѣхъ, относительно которыхъ эти интегралы разрѣшимы, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ. Такимъ образомъ Ліувилль предрѣшилъ вопросъ объ усовершенствованіи, внесенномъ С. Ли въ способъ интегрированія Якоби-Майера, еще за долго до его созданія и до развитія общей теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Только этимъ послѣднимъ обстоятельствомъ и возможно объяснить тотъ фактъ, что значеніе результатовъ Ліувилля не было оцѣнено раньше и что потребовался долгій промежутокъ времени, съ 50-ыхъ до 70-хъ годовъ прошлаго столѣтія, т. е. двадтатилѣтній періодъ въ развитіи теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, пока С. Ли не пришелъ къ аналогичнымъ результатамъ. Если я не ошибаюсь, то въ литературѣ разсматриваемой области математическаго анализа только здѣсь, на этихъ страницахъ моего изслѣдованія, приводятся впервые настоящія историко-критическія соображенія, устанавливающія сравнительную оцѣнку трудовъ Ліувилля и С. Ли. Этому послѣднему факту я также нахожу истолкованіе и объясняю его тѣмъ, что С. Ли облекалъ въ столь сложную форму изложеніе своихъ результатовъ, что ихъ практическое значеніе, сущность и взаимная связь съ трудами предыдущихъ изслѣдователей ускользаютъ отъ вниманія читателя.

---

[1]) См. мое сообщеніе: *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville* (Comptes rendus. 17 août 1903)

Чтобы восполнить отмѣченный пробѣлъ и установить преемственную зависимость между классической теоріей уравненій съ частными производными и изслѣдованіями С. Ли, мы продолжимъ на послѣдующихъ страницахъ изученіе полныхъ интеграловъ С. Ли.

Начнемъ съ разсмотрѣнія вопроса о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, на основаніи извѣстнаго полнаго интеграла С. Ли соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій и перейдемъ затѣмъ къ задачѣ о переходѣ отъ полнаго интеграла С. Ли къ полному интегралу Лагранжа.

Если производныя уравненія данной системы, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, находятся *въ инволюціи*, то въ такомъ случаѣ поставленный нами вопросъ разрѣшается на основаніи изложенной выше теоріи касательныхъ преобразованій. Дѣйствительно, приводя полное интегральное собраніе С. Ли, соотвѣтствующее данному полному интегралу, къ совокупности $n+1$ уравненій въ инволюціи, при помощи соображеній, аналогичныхъ изложеннымъ на страницахъ 54—57, легко затѣмъ получить искомый общій интегралъ, какъ это показано у Goursat: *Leçons sur l'intégration... (n⁰ 108, p. p. 276—277)*. Составивъ общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, мы получаемъ затѣмъ извѣстнымъ образомъ полный интегралъ Лагранжа соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій, разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Такимъ образомъ оба намѣченные вопроса разрѣшаются при помощи алгебраическихъ исключеній. Ходъ послѣднихъ вычисленій однако упрощается и распространяется также на замкнутыя системы уравненій, если принять во вниманіе свойства полныхъ интеграловъ С. Ли, аналогичныя свойствамъ полныхъ интеграловъ Лагранжа, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и приступаемъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots x_n, p_2, p_3, \dots p_n) = 0. \qquad (22)$$

Составляемъ соотвѣтствующую ему каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx_{r+1}}{dx_1} = \dfrac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, \quad \dfrac{dp_{r+1}}{dx_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_{r+1}}; \\ r=1,\, 2, \dots n-1. \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Предположимъ, что данное уравненіе (22) имѣетъ полное рѣшеніе С. Ли q-аго класса, которое представляется слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} & z=\varphi(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-1})+b\ , \\ & x_{n-q+i}=\varphi_i(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}), \\ & p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i}, \\ & i=1,\ 2,\dots q,\quad k=1,\ 2,\dots n-q, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

при чемъ $b_1,\ b_2,\dots b_n$ обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, и пусть имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta=D\begin{pmatrix}\varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_q,\ \psi_2,\ \dots\psi_{n-q} \\ b_1,\ b_2,\dots b_q,\ b_{q+1},\dots b_{n-1}\end{pmatrix}, \tag{25}$$

гдѣ обозначенія ψ имѣютъ прежнія указанныя выше значенія

$$\psi_k\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i}.$$

Легко показать, что общій интегралъ канонической системы (23) опредѣляется совокупностью уравненій

$$\left.\begin{aligned} & x_{n-q+i}=\varphi_i(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}), \\ & i=1,\ 2,\dots q, \\ & p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i}, \\ & k=2,\ 3,\dots n-q, \\ & \frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}=a_s, \\ & s=1,\ 2,\dots n-1, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\dots a_{n-1}$ представляютъ $n-1$ новыхъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Во-первыхъ, нетрудно убѣдиться, что послѣднія $n-1$ уравненій (26) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ

$$x_2,\ x_3,\dots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2},\dots p_n. \tag{27}$$

Въ самомъ дѣлѣ, вводимъ обозначенія

$$\theta_s \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i}$$

и составляемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$\Delta' \equiv D\left(\frac{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-q-1}, \theta_{n-q}, \ldots \theta_{n-1}}{x_2, x_3, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, \ldots p_n}\right).$$

Въ силу значеній функцій θ_s и ψ_k, становится очевиднымъ, что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s}, \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}, \tag{28}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$, значеній k, отъ 1 до $n-q$ и значеній i, отъ 1 до q. Поэтому опредѣлитель Δ' принимаетъ слѣдующее значеніе

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_1} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \ldots & -\frac{\partial \varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_2} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \ldots & -\frac{\partial \varphi_q}{\partial b_2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Послѣ перестановки столбцовъ въ послѣднемъ опредѣлителѣ, легко видѣть, что онъ выражается слѣдующимъ образомъ черезъ опредѣлитель Δ

$$\Delta' = (-1)^{(n-q)q} \Delta.$$

Поэтому, въ силу неравенства (25), разсматриваемый опредѣлитель Δ' также отличенъ отъ нуля

$$\Delta' \gtrless 0.$$

Слѣдовательно, послѣднія $n-1$ уравненія (26) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ (27), и, стало-быть, система уравненій (26) опредѣляетъ значенія всѣхъ перемѣнныхъ величинъ

Томъ IX, № 4 и 5.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

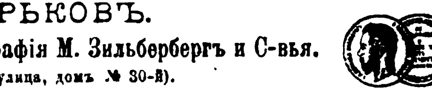
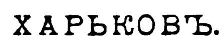
Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 6.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

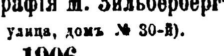
ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 6.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1906.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ.*

$$x_2,\ x_3, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n \tag{29}$$

въ функціяхъ независимой перемѣнной x_1 и $2(n-1)$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ

$$b_1,\ b_2, \ldots b_{n-1},\ a_1,\ a_2, \ldots a_{n-1}.$$

Наша задача приводится такимъ образомъ къ доказательству, что послѣднія значенія представляютъ общій интегралъ канонической системы (23). Убѣдиться въ этомъ легко различными способами. Мы начнемъ съ изложенія доказательства, аналогичнаго такъ называемому первому способу Якоби, въ классической теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Функціональныя значенія перемѣнныхъ (29), опредѣляемыя системой уравненій (26), будучи подставлены въ эти послѣднія уравненія, обращаютъ ихъ въ тождества. Полученныя такимъ образомъ тождества дифференцируемъ по x_1 и приходимъ къ новымъ тождествамъ, которыя, въ силу равенствъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\sigma \partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\sigma \partial x_k} p_{n-q+i} \equiv \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\sigma \partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\sigma \partial b_s} p_{n-q+i} \equiv \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial b_s},$$

принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{r+1}} \frac{dx_{r+1}}{dx_1},\\
&\frac{dp_k}{dx_1} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_k} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1},\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial b_s} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} = 0,\\
&i=1,2,\ldots q, \quad k=2,3,\ldots n-q, \quad s=1,2,\ldots n-1.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Съ другой стороны уравненія, соотвѣтствующія первымъ двумъ строкамъ системы (26), и уравненіе $p_1 = \psi_1$ утождествляютъ данное уравненіе (22), разсматриваемое какъ производное уравненіе С. Ли, и мы имѣемъ поэтому слѣдующее тождество

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1 + H(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_q,\ \psi_2,\ \psi_3, \ldots \psi_{n-q},\\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n) = 0,\end{array}\right\} \quad (31)$$

справедливое для всѣхъ значеній перемѣнныхъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n$$

и произвольныхъ постоянныхъ величинъ $b_1,\ b_2, \ldots b_{n-1}$. Поэтому дифференцируя написанное тождество по всѣмъ послѣднимъ величинамъ и принимая во вниманіе слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\sigma}, \quad \sigma = 1,\ 2, \ldots n-q,$$

получаемъ въ результатѣ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial H}{\partial x_k} + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \sum\limits_{r=1}^{n-q-1} \dfrac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \dfrac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} = 0,\\[2ex] -\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} - \sum\limits_{r=1}^{n-q-1} \dfrac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} = 0,\\[2ex] \dfrac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum\limits_{r=1}^{n-q-1} \dfrac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \dfrac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} = 0,\\[2ex] k = 2,\ 3, \ldots n-q, \quad i = 1,\ 2, \ldots q, \quad s = 1,\ 2, \ldots n-1.\end{array}\right\} \quad (32)$$

Сопоставляя тождества системъ (30) и (32), соотвѣтствующія однимъ и тѣмъ же значкамъ $i,\ k,\ s$, легко приходимъ къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} = \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right),$$

$$i = 1,\ 2, \ldots q,$$

$$\frac{dp_k}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\left(\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k}\left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right) = 0,$$

$$k = 2,\ 3, \ldots n-q,$$

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}\left(\frac{dp_{n-q-i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s}\left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right) = 0,$$

$$s = 1,\ 2, \ldots n-1.$$

Въ силу неравенства (25), изъ послѣднихъ $n-1$ тождествъ вытекаютъ слѣдующія тождества

$$\frac{dx_{r+1}}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}},\quad \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},$$
$$r=1,2,\ldots n-q-1,\quad i=1,2,\ldots q.$$

На основаніи послѣднихъ, предыдущія двѣ системы тождествъ даютъ остальныя искомыя тождества

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}},\quad \frac{dp_k}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_k},$$
$$i=1,2,\ldots q,\quad k=2,3,\ldots n-q.$$

Такимъ образомъ полученныя тождества показываютъ, что значенія перемѣнныхъ (29), опредѣляемыя уравненіями (26), утождествляютъ каноническую систему (23) и представляютъ, стало-быть, ея общій интегралъ.

Легко дать еще другое новое, отличное отъ предыдущаго доказательство разсматриваемаго предложенія, приводящееся къ тому, чтобы показать, что разсматриваемая нами система уравненій (26) опредѣляетъ всѣ $2n-2$ интеграловъ каноническихъ уравненій (23). Въ силу неравенства (25), $n-1$ уравненій первой и второй строки системы (26) разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, и мы получаемъ такимъ образомъ $n-1$ слѣдующихъ интеграловъ уравненій (23)

$$\left.\begin{array}{c} F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n)=b_s, \\ s=1,2,\ldots n-1. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Эти уравненія представляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи, какъ это слѣдуетъ изъ общихъ свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, разсмотрѣнныхъ во второй главѣ. Поэтому скобки Пуассона, составленныя изъ всѣхъ функцій $F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$ попарно, уничтожаются тождественно, т. е. *существуетъ рядъ тождествъ*

$$(F_s, F_\sigma)=0, \tag{34}$$

для всѣхъ различныхъ значеній s *и* σ, *отъ* 1 *до* $n-1$.

Внося функціональныя значенія b_s, опредѣляемыя уравненіями (33), въ послѣднія $n-1$ равенствъ (26), получаемъ уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n)=a_s, \\ s=1,2,\ldots n-1. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Мы приводимъ доказательство разсматриваемаго предложенія къ тому, чтобы показать, что послѣднія уравненія представляютъ $n-1$ остальныхъ интеграловъ системы (23), отличныхъ отъ интеграловъ (33).

Такъ какъ уравненія (33) и (35) являются преобразованіемъ системы (26), разрѣшимой относительно перемѣнныхъ (29), то само собою разумѣется, что уравненія (35) представляютъ систему $n-1$ различныхъ равенствъ, отличныхъ отъ (33)-хъ. Кромѣ того легко видѣть, что функціи f_s представляютъ интегралы линейнаго уравненія съ частными производными функціи f, соотвѣтствующаго обыкновеннымъ уравненіямъ (23),

$$(p_1 + H,\ f) = 0, \tag{36}$$

гдѣ послѣднія скобки Пуассона распространяются на всѣ перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_n;\ p_1, p_2, \ldots p_n$.

Дѣйствительно, замѣчая, что функціи f_s имѣютъ значенія

$$f_s \equiv \theta_s(x_1,\ x_1, \ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1}, \ldots p_n,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-1}),$$

приводимъ выраженія скобокъ Пуассона

$$(p_1 + H,\ f_s)$$

къ слѣдующему виду

$$(p_1 + H,\ f_s) \equiv \frac{\partial\theta_s}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\partial\theta_s}{\partial b_r}(p_1 + H,\ F_r)\,.$$

Такъ какъ функціи F_r представляютъ интегралы уравненія (36), то имѣютъ мѣсто тождества

$$(p_1 + H,\ F_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній r, отъ 1 до $n-1$. Поэтому предыдущія равенства становятся

$$(p_1 + H,\ f_s) \equiv \frac{\partial\theta_s}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}}$$

и, на основаніи тождествъ (28), принимаютъ слѣдующее значеніе

$$(p_1+H,\ f_s)\equiv\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s}+\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\psi_k}{\partial b_s}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}.$$

Легко видѣть, что правыя части послѣднихъ равенствъ представляютъ тождественный нуль. Дѣйствительно, такъ какъ уравненія (24) представляютъ полный интегралъ С. Ли даннаго уравненія (22), то существуетъ тождество

$$\psi_1+H(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_q,\ \psi_2,\ \psi_3,\dots\psi_{n-q},$$
$$p_{n-q+1},\dots p_n)=0.$$

Дифференцируя послѣднее по b_s, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ (представленныхъ послѣднею строкою системы (32))

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial b_s}+\sum\limits_{i=1}^{q}\dfrac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}+\sum\limits_{k=2}^{n-q}\dfrac{\partial H}{\partial p_k}\dfrac{\partial\psi_k}{\partial b_s}=0,\\ s=1,\ 2,\dots n-1.\end{array}\right\}\qquad(37)$$

Поэтому предыдущія равенства принимаютъ видъ

$$(p_1+H,\ f_s)=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$, и показываютъ, что функціи $f_1,\ f_2,\dots f_{n-1}$ служатъ интегралами линейнаго уравненія (36), т. е. уравненія (35) представляютъ $n-1$ интеграловъ канонической системы (23) и, вмѣстѣ съ уравненіями (33), представляютъ полную систему ея $2n-2$ различныхъ интеграловъ.

Мы приведемъ еще одно, третье по счету, и самое простое доказательство разсматриваемаго предложенія, представляющее распространеніе на полные интегралы С. Ли даннаго нами доказательства теоремы Якоби-Ліувилля, въ началѣ настоящей главы.

Съ этою цѣлью возвращаемся къ тождествамъ (37), представляющимъ непосредственное слѣдствіе существованія полнаго интегральнаго собранія С. Ли (24) даннаго уравненія (22). Въ силу слѣдующихъ изъ уравненій канонической системы (23)

$$\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},\quad \frac{dx_k}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_k};$$
$$i=1,\ 2,\dots q,\qquad k=2,\ 3,\dots n-q,$$

тождества (37) приводятъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}+\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\psi_k}{\partial b_s}\frac{dx_k}{dx_1}=0,$$

$$s=1,\,2,\ldots n-1.$$

Принимая во вниманіе отмѣченныя выше равенства

$$\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial b_s}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\sigma\,\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\sigma\,\partial b_s}p_{n-q+i},$$

мы преобразовываемъ послѣднія уравненія къ такому виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_1\,\partial b_s}p_{n-q+i}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n-q}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial b_s\,\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial b_s\,\partial x_k}p_{n-q+i}\right)\frac{dx_k}{dx_1}=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Легко видѣть, что лѣвыя части написанныхъ уравненій представляютъ точные дифференціалы, такъ что изслѣдуемыя уравненія становятся въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}\right)=0,$$

$$s=1,\,2,\ldots n-1.$$

Итакъ *искомыя интегральныя уравненія имѣютъ значенія*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}=a_s,$$

$$s=1,\,2,\ldots n-1.$$

гдѣ $a_1,\,a_2,\ldots a_{n-1}$ *обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.*

6. Какъ извѣстно, каноническія системы дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ обладаютъ такъ называемыми каноническими системами интеграловъ [1]). Легко показать, что уравненія (26) опредѣляютъ такую *каноническую систему интеграловъ*

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899, p. 435).

уравненій (23), совершенно аналогично Гамильтонъ-Якобіевской теоріи, т. е. что *интегралы (33) и (35) системы (23) являются каноническими, удовлетворяя условіямъ (34) и еще слѣдующимъ*

$$\left.\begin{aligned} &(F_r, f_s) \equiv \begin{cases} 0, & s \gtrless r, \\ 1, & s = r, \end{cases} \\ &(f_r, f_s) \equiv 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

для всѣхъ значеній указателей r и s, *отъ* 1 *до* $n-1$.

Чтобы убѣдиться въ существованіи послѣднихъ равенствъ, составляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_\sigma} (F_r, F_\sigma),$$

которыя, въ силу условій (34), приводятся къ виду

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}. \tag{39}$$

Послѣднее равенство, на основаніи тождества (28), преобразовывается въ слѣдующее

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}.$$

Въ виду того, что уравненія (33) представляютъ преобразованіе первыхъ $n-1$ уравненій (26), то результатъ подстановки опредѣляемыхъ ими значеній перемѣнныхъ

$$x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_{n-q},$$

въ уравненія (33), представляетъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\left.\begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_{n-q}, \\ p_{n-q+1}, \ldots p_n) = b_r; \\ r = 1, 2, \ldots n-1. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Дифференцируя послѣднія по любой изъ величинъ b_s, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & s \gtrless r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній r и s, отъ 1 до $n-1$. Поэтому, вслѣдствіе полученныхъ тождествъ, предыдущія выраженія скобокъ (F_r, f_s) даютъ первый рядъ искомыхъ нами условій (38)

$$(F_r, f_s) = \begin{cases} 0, & s \gtrless r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

Наконецъ, для разысканія значенія скобокъ (f_r, f_s), составляемъ слѣдующее выраженіе

$$(f_r, f_s) \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} (F_u, \theta_s') + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (\theta_r', F_v) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-2} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_u, F_v),$$

гдѣ значки при θ_s и θ_r, въ первыхъ двухъ суммахъ, обозначаютъ, что функціи θ_s, θ_r, при составленіи скобокъ Пуассона, дифференцируются только по тѣмъ перемѣннымъ x и p, которыя входятъ въ нихъ непосредственно. Поэтому мы имѣемъ

$$(F_u, \theta_s') \equiv \sum_{k=2}^{q} \frac{\partial F_u}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}},$$

$$(\theta_r', F_v) \equiv \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_r}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_r}{\partial x_k}.$$

Первое изъ этихъ выраженій имѣетъ видъ правой части равенства (39), второе же отличается отъ послѣдняго обратнымъ знакомъ. Поэтому, на основаніи предыдущихъ вычисленій, заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} (F_u, \theta_s') &= \begin{cases} 0, & u \gtrless s, \\ 1, & u = s, \end{cases} \\ (\theta_r', F_v) &= \begin{cases} 0, & v \gtrless r, \\ -1, & v = r. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Въ силу послѣднихъ равенствъ и условій (34), выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$(f_r, f_s) \equiv \frac{\partial \theta_r}{\partial b_s} - \frac{\partial \theta_s}{\partial b_r}.$$

Такъ какъ выраженія производныхъ, въ правой части послѣдняго равенства, имѣютъ соотвѣтственно значенія

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial b_s} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_r \partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_r \partial b_s} p_{n-q+i},$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial b_r} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_s \partial b_r} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_r} p_{n-q+i},$$

то мы приходимъ къ остальнымъ искомымъ условіямъ (38)

$$(f_r, f_s) \equiv 0,$$

которыя справедливы для всѣхъ значеній r и s, отъ 1 до $n-1$.

Въ дополненіе къ выведеннымъ равенствамъ прибавимъ еще слѣдующія.

На основаніи уравненій (33), первое уравненіе (24) приводится къ слѣдующему виду

$$z - F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = b_n, \tag{42}$$

гдѣ функція F имѣетъ значеніе

$$F \equiv \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}).$$

Такъ какъ уравненія (24) образуютъ замкнутую систему, то представляющія ихъ преобразованіе уравненія (22), (33) и (42) составляютъ также замкнутую систему, при чемъ, кромѣ условій (34) и (38), имѣютъ мѣсто еще слѣдующія равенства

$$\left.\begin{aligned} [p_1 + H, z - F] = 0, \\ [F_s, z - F] = 0, \\ s = 1, 2, \ldots n-1. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Въ виду того, что лѣвыя части послѣднихъ $n-1$ равенствъ не зависятъ отъ величинъ p_1, b_1, $b_2, \ldots b_n$, то эти равенства не могутъ быть слѣдствіемъ разсматриваемыхъ уравненій и, стало-быть, удовлетворяются

тождественно, тогда какъ первое равенство (43) является слѣдствіемъ даннаго уравненія (22).

Вычислимъ, наконецъ, значеніе скобокъ Вейлера

$$[z-F, f_s]\equiv[z, f_s]-[F, f_s].$$

Очевидно существуютъ слѣдующія равенства

$$[z, f_s]\equiv-\sum_{i=1}^{q}p_{n-q+i}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}}-\sum_{\sigma=2}^{n}p_\sigma\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\frac{\partial F_v}{\partial p_\sigma},$$

$$[F, f_s]\equiv\sum_{u=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial b_u}(F_u, \theta_s')+\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}(\varphi', F_v)+$$

$$\sum_{u=1}^{n-1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial b_u}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}(F_u, F_v).$$

Принимая во вниманіе условія (34), (41), значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(\varphi', F_v)\equiv-\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial F_v}{\partial p_k};$$

и тождества (28), приходимъ къ слѣдующему выраженію разсматриваемыхъ скобокъ Вейлера

$$[z-F, f_s]\equiv\sum_{i=1}^{q}p_{n-q+i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}+$$

$$+\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\left(\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial F_v}{\partial p_k}-\sum_{\sigma=2}^{n}p_\sigma\frac{\partial F_v}{\partial p_\sigma}\right).$$

Легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ, находящееся въ послѣдней строкѣ, на основаніи уравненій послѣдней строки системы (24), приводится къ слѣдующему виду

$$\sum_{i=1}^{q}p_{n-q+i}\left(\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_v}{\partial p_k}-\frac{\partial F_v}{\partial p_{n-q+i}}\right). \tag{44}$$

Возвращаясь къ тождествамъ (40) и дифференцируя ихъ по перемѣннымъ p_{n-q+i}, мы получаемъ новыя тождества

$$\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} + \frac{\partial F_r}{\partial p_{n-q+i}} = 0.$$

Поэтому выраженіе (44) уничтожается тождественно. Такъ какъ во всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ величины b_s замѣнены ихъ функціональными значеніями F_s, то очевидно, что искомыя зависимости имѣютъ слѣдующій видъ

$$[z - F, f_s] = -f_s, \tag{45}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$.

7. Воспользуемся выведенными каноническими свойствами (34), (38), (43) и (45) интеграловъ (33) и (35) канонической системы (23), для рѣшенія вопроса о переходѣ отъ полнаго интеграла С. Ли (24) даннаго уравненія (22) къ его полному интегралу Лагранжа. Благодаря каноническимъ свойствамъ разсматриваемыхъ интеграловъ, является возможность обойти необходимость составленія общаго интеграла системы (23), для рѣшенія поставленной задачи. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (25), существуетъ, по меньшей мѣрѣ, одна пара его сопряженныхъ миноровъ, соотвѣтственно порядковъ q и $n-q-1$, которые отличны отъ нуля. Не нарушая общности разсужденій, мы можемъ предположить, что слѣдующіе два опредѣлителя отличны отъ нуля

$$\Delta_1 \equiv D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q}{b_1, b_2, \dots b_q}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \cdot & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_q} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_q} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_q} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

$$\Delta_2 \equiv D\left(\frac{\psi_2, \psi_3, \dots \psi_{n-q}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \dots b_{n-1}}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{q+1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{q+1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{q+1}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{q+2}} & \cdot\cdot & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{q+2}} \\ \cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Если послѣднія условія имѣютъ мѣсто, то легко доказать, что система n уравненій въ инволюціи, опредѣляющихъ, при помощи квадратуры, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), разсматриваемаго какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, представляется совокупностью уравненія (22) и $n-1$ слѣдующихъ

$$\left.\begin{array}{c} F_{q+k}(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = b_{q+k}, \\ k=1,2,\ldots n-q-1, \\ f_r(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = a_r, \\ r=1,2,\ldots q. \end{array}\right\} \qquad (45)$$

Такъ какъ указатели $q+k$ и r имѣютъ различныя значенія, то очевидно, что послѣдніе интегралы находятся въ инволюціи. Кромѣ того легко убѣдиться, что система интеграловъ (45) разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_n$. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (45) равносильны слѣдующимъ уравненіямъ, которыя представляютъ ихъ преобразованіе и составляются такимъ образомъ.

Прежде всего замѣтимъ, что въ силу условія $\Delta_1 \gtrless 0$, первыя q уравненій системы (26) разрѣшаются относительно величинъ $b_1, b_2, \ldots b_q$ и опредѣляютъ ихъ значенія

$$\left.\begin{array}{c} b_i = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{n-1}), \\ i=1,2,\ldots q. \end{array}\right\} \qquad (46)$$

Поэтому, въ силу неравенства нулю опредѣлителя (25), первыя $n-q-1$ уравненій (45) получаются изъ уравненій

$$p_k - \psi_k = 0, \quad k = 2, 3, \ldots n-q,$$

путемъ исключенія изъ нихъ значеній $b_1, b_2, \ldots b_q$, опредѣляемыхъ предыдущими равенствами (46). Слѣдовательно, $n-q-1$ первыхъ уравненій (45) равнозначны уравненіямъ

$$p_k = (\psi_k), \quad k = 2, 3, \ldots n-q, \qquad (47)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ указанной подстановки. Что касается остальныхъ уравненій (45), т. е. q послѣднихъ, то они равносильны уравненіямъ

$$\left.\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial b_r}\right) - \sum\limits_{i=1}^{q} \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial b_r}\right) p_{n-q+i} = a_r, \\ r=1,2,\ldots q, \end{array}\right\} \qquad (48)$$

гдѣ, какъ и раньше, скобки отмѣчаютъ результатъ подстановки значеній $b_1, b_2, \ldots b_q$, опредѣляемыхъ уравненіями (46). Послѣдняя система (48) линейна относительно перемѣнныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n$; опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при послѣднихъ перемѣнныхъ, представляетъ выраженіе (Δ_1), гдѣ скобки имѣютъ прежнее значеніе. Такъ какъ послѣдній опредѣлитель неравенъ нулю, то, слѣдовательно, уравненія (48) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p_{n-q+i}. Внося значенія послѣднихъ въ уравненія (47), мы получаемъ изъ нихъ выраженія остальныхъ перемѣнныхъ p. Такимъ образомъ получаются выраженія всѣхъ перемѣнныхъ

$$p_2, p_3, \ldots p_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+1}, \ldots p_n$$

въ функціяхъ величинъ

$$x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_q, b_{q+1}, \ldots b_n.$$

Присоединяя сюда значеніе перемѣнной p_1, опредѣляемой въ видѣ функціи тѣхъ же самыхъ величинъ, при помощи даннаго уравненія (22), мы приводимъ къ квадратурѣ вопросъ о разысканіи полнаго интеграла Лагранжа послѣдняго уравненія, разсматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными.

Однако, благодаря выведеннымъ выше условіямъ (43) и (44), легко получить искомый интегралъ, при помощи алгебраическихъ исключеній, воспользовавшись уравненіемъ (42), и обойтись такимъ образомъ безъ операціи интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, составляемъ выраженіе

$$\Phi \equiv z - F + \sum_{i=1}^{q} f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Вейлера

$$[p_1 + H, \Phi] \equiv [p_1 + H, z - F] + \sum_{i=1}^{q} \Big[f_i (p_1 + H, F_i) + F_i (p_1 + H, f_i) \Big],$$

$$[\Phi, F_{q+k}] \equiv [z - F, F_{q+k}] + \sum_{i=1}^{q} \Big[f_i (F_i, F_{q+k}) + F_i (f_i, F_{q+k}) \Big],$$

$$[\Phi, f_r] \equiv [z - F, f_r] + \sum_{i=1}^{q} \Big[f_i (F_i, f_r) + F_i (f_i, f_r) \Big],$$

соотвѣтствующихъ значеніямъ k, отъ 1 до $n-q-1$, и значеніямъ r, отъ 1 до q. Какъ легко видѣть, послѣднія выраженія уничтожаются на основаніи условій (34), (38), (43) и (44), и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$[p_1+H, \Phi]=0,$$

$$[\Phi, F_{q+k}]=0, [\Phi, f_r]=0,$$

$$k=1, 2, \ldots n-q-1, \quad r=1, 2, \ldots q.$$

Такъ какъ равенства (43) удовлетворяются на основанiи уравненiя (22), то отсюда слѣдуетъ, что совокупность уравненiй (22), (45) и слѣдующаго

$$z=F-\sum_{i=1}^{q} f_i F_i + b, \tag{49}$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину, образуетъ замкнутую систему $n+1$ уравненiй, разрѣшимыхъ относительно перемѣнныхъ z, p_1, $p_2, \ldots p_n$. Поэтому опредѣляемое послѣдними уравненiями значенiе перемѣнной z, функцiей перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_n$ и n произвольныхъ постоянныхъ b_1, $b_2, \ldots b_{n-1}$, b, представляетъ искомый полный интегралъ Лагранжа уравненiя (22), разсматриваемаго какъ дифференцiальное уравненiе съ частными производными. Другими словами послѣднiй интегралъ получается какъ результатъ подстановки въ уравненiе (49) значенiй величинъ p_2, $p_3, \ldots p_n$, опредѣляемыхъ уравненiями (45). Очевидно, что въ результатѣ послѣдней подстановки функцiи f_1, $f_2, \ldots f_q$, $F_{q+1}, \ldots F_{n-1}$ тождественно обращаются соотвѣтственно въ a_1, $a_2, \ldots a_q$, b_{q+1}, $b_{q+2}, \ldots b_{n-1}$, и мы получаемъ

$$\left.\begin{aligned} z=\varphi\,[x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, (F_1), (F_2), \ldots (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{n-1}]-\\ -\sum_{i=1}^{q} a_i (F_i)+b, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

гдѣ скобки, въ выраженiяхъ (F_i), обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненiе [1])

$$p_1+\frac{(x_2 p_2-x_4 p_4)\, x_4 p_2}{x_1\, p_3}+\frac{(x_3 x_4-x_2)\, p_2}{x_1}=0. \tag{51}$$

Это уравненiе имѣетъ полное интегральное собранiе С. Ли второго класса, представленное совокупностью уравненiй

$$z=b_4, \tag{52}$$

[1]) Послѣднее уравненiе, но только въ другихъ обозначенiяхъ, служило примѣромъ также въ $n^0 3$ настоящей главы.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= b_2(x_1 - b_1) - \frac{x_1 x_2}{b_3}, \\ x_4 &= \frac{b_3}{x_1 - b_1}, \\ p_1 &= \left(\frac{x_2}{b_3} - b_2\right)p_3 + \frac{b_3}{(x_1 - b_1)^2}p_4, \\ p_2 &= \frac{x_1}{b_3}p_3, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

при чемъ, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \psi_2}{b_1, b_2, b_3}\right) \equiv \frac{x_1 p_3}{b_3(x_1 - b_1)} \gtrless 0.$$

Поэтому общій интегралъ канонической системы, соотвѣтствующей данному уравненію (51), опредѣляется совокупностью второго, третьяго и послѣдняго уравненія системы (52) и слѣдующими тремя уравненіями

$$\left.\begin{aligned} b_2 p_3 - \frac{b_3}{(x_1 - b_1)^2} p_4 &= a_1, \\ -(x_1 - b_1)p_3 \qquad &= a_2, \\ -\frac{x_1 x_2}{b_3^2} p_3 - \frac{1}{x_1 - b_1} p_4 &= a_3, \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

гдѣ a_1, a_2 и a_3 обозначаютъ три новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Чтобы составить полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (51), замѣчаемъ, что слѣдующихъ два сопряженныхъ минора разсматриваемаго опредѣлителя неравны нулю:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial b_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial b_2} \end{vmatrix} \equiv -\frac{b_3}{x_1 - b_1} \gtrless 0,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial b_3} \equiv -\frac{x_1 p_3}{b_3^2} \gtrless 0.$$

Поэтому второе и третье уравненія системы (52) разрѣшаются относительно величинъ b_1, b_2 и даютъ ихъ слѣдующія значенія

$$b_1 = x_1 - \frac{b_3}{x_4},$$

$$b_2 = \frac{x_4}{b_3}\left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right).$$

Въ силу этихъ значеній b_1 и b_2, первое и второе уравненія (53) опредѣляютъ значенія p_3 и p_4

$$p_3 = -\frac{a_2 x_4}{b_5}, \quad p_4 = -\left[\frac{a_1 b_3}{x_4^2} + \frac{a_2}{b_3}\left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right)\right].$$

Наконецъ, послѣднія два уравненія системы (52) даютъ выраженія

$$p_1 = -\left(a_1 + \frac{a_2 x_2 x_4}{b_3^2}\right), \quad p_2 = -\frac{a_2}{b_3^2} x_1 x_4.$$

Поэтому искомый полный интегралъ находится при помощи интегрированія точнаго дифференціала

$$dz = -a_1\, dx_1 - a_1 b_3 \frac{dx_4}{x_4^2} - \frac{a_2}{b_3^2}\left[x_4 (x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) + x_1 x_2\, dx_4\right] -$$

$$-\frac{a_2}{b_3}(x_4\, dx_3 + x_3\, dx_4),$$

или

$$dz = -a_1\, dx_1 - a_1 b_3 \frac{dx_4}{x_4^2} - \frac{a_2}{b_3^2}\, d(x_1 x_2 x_4) - \frac{a_2}{b_3}\, d(x_3 x_4).$$

Отсюда, при помощи квадратуры, получаемъ

$$z = a_1\left(\frac{b_3}{x_4} - x_1\right) - \frac{a_2}{b_3} x_4\left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right) + b,$$

гдѣ a_1, a_2, b_3 и b представляютъ четыре произвольныхъ постоянныхъ величины.

Прилагая къ настоящему случаю формулу (50), легко составить искомый полный интегралъ даннаго уравненія (51), исключительно исходя изъ

уравненій (52) и (53). Дѣйствительно, въ настоящемъ случаѣ формула (50) становится

$$z = -a_1 (F_1) - a_2 (F_2) + b,$$

и функціи F_1, F_2 имѣютъ слѣдующія значенія

$$F_1 \equiv x_1 \left(1 - \frac{p_3}{x_4 p_2}\right), \quad F_2 \equiv (x_2 p_2 + x_3 p_3) \frac{x_4 p_2}{x_1 p_3^2}.$$

Подставляя сюда найденныя выше значенія перемѣнныхъ p_2, p_3 и p_4, въ функціяхъ всѣхъ перемѣнныхъ x и постоянныхъ a_1, a_2, b_3, получаемъ

$$(F_1) \equiv x_1 - \frac{b_3}{x_4}, \quad (F_2) \equiv \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right) \frac{x_4}{b_3}.$$

Итакъ, искомый полный интегралъ выражается въ прежнемъ видѣ

$$z = a_1 \left(\frac{b_3}{x_4} - x_1\right) - \frac{a_2}{b_3} x_4 \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right) + b.$$

8. На послѣдующихъ строкахъ имѣется въ виду отмѣтить еще два доказательства предложенія, приведеннаго въ n^0 5-мъ настоящей главы, которыя отличны отъ прежнихъ трехъ доказательствъ.

Такъ какъ полный интегралъ С. Ли (26) приводитъ къ $n-1$ интеграламъ въ инволюціи (33) канонической системы (23), которые разрѣшаются относительно перемѣнныхъ p_2, $p_3, \ldots p_{n-q}$, x_{n-q+1}, $x_{n-q+2}, \ldots x_n$ (и неразрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса), то всѣ разсужденія, которыми мы пользовались выше (см. n^0 3 настоящей главы) для доказательства теоремы Ліувилля, примѣняются также и въ настоящемъ случаѣ. Поэтому, сохраняя наши обозначенія, получаемъ, примѣнительно къ разсматриваемымъ условіямъ, слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{gathered} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} = -\frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s}, \\ k = 1, 2, \ldots n-q, \quad i = 1, 2, \ldots q, \end{gathered}\right\} \tag{54}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Очевидно, что послѣднія уравненія образуютъ интегрируемую систему. Кромѣ того такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ мѣсто полный интегралъ С. Ли (24), то поэтому существуютъ равенства

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \quad x_{n-q+i} = \varphi_i,$$

для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній k, отъ 1 до $n-q$, и значеній i, отъ 1 до q. Вслѣдствіе этого заключаемъ, что уравненія (54) приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k\, \partial b_s} p_{n-q+i}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s},$$

$$k = 1, 2, \ldots n-q, \qquad i = 1, 2, \ldots q,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Отсюда искомыя функціи θ_s опредѣляются при помощи квадратуръ

$$\theta_s = \int \left[\sum_{k=1}^{n-q} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k\, \partial b_s} p_{n-q+i} \right) dx_k - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} dp_{n-q+i} \right].$$

$$s = 1, 2, \ldots n-1,$$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины. Такъ какъ предыдущія уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\theta_s = \int d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right),$$

$$s = 1, 2, \ldots n-1,$$

то мы получаемъ прежній результатъ

$$\theta_s = \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i},$$

$$s = 1, 2, \ldots n-1.$$

Къ тому же самому заключенію мы приходимъ также, прилагая въ настоящемъ случаѣ теорему Якоби-Ліувилля, изложенную въ концѣ n^0 3-ьяго настоящей главы. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (23) представимъ въ видѣ слѣдующей новой канонической системы

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1}=\dfrac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, & \dfrac{\partial(-p_{n-q+i})}{dx_1}=\dfrac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},\\[2ex] \dfrac{dp_{r+1}}{dx_1}=-\dfrac{\partial H}{dx_{r+1}}, & \dfrac{dx_{n-q+i}}{dx_1}=-\dfrac{\partial H}{\partial(-p_{n-q+i})},\\[1ex] r=1,2,\ldots n-q-1, & i=1,2,\ldots q.\end{array}\right\}\tag{55}$$

Пусть извѣстна для послѣдней системы совокупность n—1 различныхъ интеграловъ въ инволюціи, которые разрѣшаются относительно всѣхъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса

$$p_2,\ p_3,\ldots p_{n-q},\ x_{n-q+1},\ x_{n-q+2},\ldots x_n.$$

Поэтому представляя интегралъ точнаго дифференціала

$$dz=\sum_{k=1}^{n-q}p_k\,dx_k+\sum_{i=1}^{q}-x_{n-q+i}\,dp_{n-q+i}$$

въ слѣдующемъ видѣ

$$z=U(x_1,\ x_2,\ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ldots p_n,\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-1})+b,\tag{56}$$

гдѣ b—новая произвольная постоянная величина, мы выражаемъ общій интегралъ канонической системы (55) при помощи уравненій

$$\left.\begin{array}{c}p_{r+1}=\dfrac{\partial U}{\partial x_{r+1}},\quad x_{n-q+i}=-\dfrac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}},\\ r=1,2,\ldots n-q-1,\qquad i=1,2,\ldots q,\\[1ex] \dfrac{\partial U}{\partial b_s}=a_s,\\ s=1,2,\ldots n-1,\end{array}\right\}\tag{57}$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ n—1 различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Предполагая, что интегралъ (56) удовлетворяетъ условію

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial U}{\partial x_3},\ldots\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-q}},\ \dfrac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}},\ldots\dfrac{\partial U}{\partial p_n}}{b_1,\ b_2,\ldots b_{n-q-1},\ b_{n-q},\ldots b_{n-1}}\right)\gtrless 0,\tag{58}$$

заключаемъ, что послѣднія n—1 уравненій (57) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ величинъ

$$x_2, x_3, \dots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots p_n .$$

Подставляя вмѣсто функціи U значеніе ея, выраженное при помощи интеграла, получаемъ

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \int \left(\sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} dx_k + \sum_{i=1}^{q} - \frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s} dp_{n-q+i} \right) .$$

Если разсматриваемая нами система интеграловъ въ инволюціи представляется уравненіями (33), которыя получаются изъ системы (24), то очевидно, что аналогично предыдущему, послѣднее равенство становится

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \int d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right) ,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} ,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Такимъ образомъ оказывается, что *изслѣдованныя нами уравненія*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} = a_s ,$$

$$s = 1, 2, \dots n-1 ,$$

тождественны послѣднимъ $n-1$ уравненіямъ (57) и заключаются, стало-быть, какъ частный случай въ общихъ формулахъ, соотвѣтствующихъ предположеніямъ Ліувилля, по отношенію къ которымъ условія, опредѣляющія полное интегральное собраніе С. Ли, являются лишь частнымъ случаемъ.

Какъ извѣстно, уравненія (57) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ и, для случая С. Ли, обращаются тождественно въ уравненія (26), какъ это легко видѣть, благодаря только что выведенному заключенію. Поэтому приведенное нами выше предложеніе, что уравненія (26) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ системы (23), является также частнымъ случаемъ общей теоріи каноническихъ уравненій.

Чтобы закончить разсмотрѣніе вопроса о составленіи общаго интеграла каноническихъ уравненій, исходя изъ полнаго интеграла С. Ли соотвѣтствующаго производнаго уравненія, слѣдуетъ отмѣтить, что выведенное выше выраженіе (50) полнаго интеграла Лагранжа уравненія (22), разсматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными, представляетъ обобщеніе упомянутыхъ выше результатовъ Майера, Дарбу и Бертрана. Легко видѣть, что выраженія полнаго интеграла уравненія (22), полученныя послѣдними геометрами, заключаются въ формулѣ (50) въ томъ частномъ случаѣ, когда начальныя значенія перемѣнныхъ принимаются за произвольныя постоянныя величины въ общемъ интегралѣ канонической системы (23).

9. Мы имѣемъ въ виду далѣе распространить только что полученные результаты на общій интегралъ каноническихъ уравненій (23) въ самомъ общемъ предположеніи Ліувилля.

Пусть данные $n-1$ интеграловъ въ инволюціи каноническихъ системъ (23), или (55) разрѣшаются относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса по отношенію какъ къ первой такъ и ко второй канонической системѣ. Предположимъ, что, въ виду простоты вычисленій, мы разрѣшили разсматриваемые интегралы относительно перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ общій интегралъ обѣихъ разсматриваемыхъ каноническихъ системъ одновременно представляется уравненіями (57).

Очевидно, что, въ силу условія (58), уравненія (57) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ $x_2, x_3, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n$. Поэтому интегрированіе уравненія

$$dz = \left(p_1 + \sum_{r=1}^{n-1} p_{r+1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right) dx_1$$

совершается при помощи квадратуры, и затѣмъ полный интегралъ уравненія (22) опредѣляется на основаніи теоріи характеристикъ.

Наша задача, къ рѣшенію которой мы теперь переходимъ, состоитъ въ доказательствѣ, что достаточно уравненій (56) и (57) для составленія полнаго интеграла Лагранжа уравненія (22), при помощи алгебраическихъ преобразованій, не совершая указаннаго выше новаго интегрированія.

Въ самомъ дѣлѣ, необходимо отличны отъ нуля, по меньшей мѣрѣ, значенія одной пары сопряженныхъ миноровъ, порядковъ q-аго и $n-q-1$-аго, опредѣлителя первой части неравенства (58). Поэтому, не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1' &\equiv D\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{n-1}}\right) \gtrless 0, \\ \Delta_2' &\equiv D\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \ldots \frac{\partial U}{\partial p_n}}{b_1, b_2, \ldots b_q}\right) \gtrless 0.\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Въ силу второго изъ этихъ неравенствъ, послѣднія q уравненій первой строки системы (57) даютъ

$$b_i = \Phi_i\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{n-q+1}, \ldots p_n, b_{q+1}, b_{b+2}, \ldots b_{n-1}),$$
$$i = 1, 2, \ldots q.$$

Внося послѣднія значенія $b_1, b_2, \ldots b_q$ въ $n-q-1$ первыя уравненія первой строки и въ q первыя уравненія второй строки системы (57), получаемъ равенства

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right), \quad k = 2, 3, \ldots n-q, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial b_r}\right) &= a_r, \quad r = 1, 2, \ldots q,\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Легко показать, что послѣднія уравненія (60) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ представляютъ собой преобразованіе интеграловъ въ инволюціи канонической системы (23).

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ въ слѣдующемъ видѣ полную систему интеграловъ системы (55), которые опредѣляются уравненіями (57).

$$\left.\begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) &= b_s, \\ f_s(x_1, x_2, \ldots x_n\; p_2, p_3, \ldots p_n) &= a_s, \\ s = 1, 2, \ldots n-1. \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Какъ хорошо извѣстно, послѣдніе интегралы образуютъ каноническую систему, по отношенію къ уравненіемъ (55). Въ виду того, что существуютъ зависимости

$$\sum_{u=1}^{n}\left(\frac{\partial F_s}{\partial p_u}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_u} - \frac{\partial F_s}{\partial x_u}\frac{\partial f_\sigma}{\partial p_u}\right) \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1}\left(\frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial F_s}{\partial x_{r+1}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial p_{r+1}}\right) +$$
$$+\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{\partial F_s}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial(-p_{n-q+i})} - \frac{\partial F_s}{\partial(-p_{n-q+i})}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-q+i}}\right],$$

становится очевиднымъ, что уравненія (61) образуютъ каноническую систему интеграловъ также по отношенію къ исходной канонической системѣ (23). Слѣдовательно, уравненія (60) равнозначны $n-1$ уравненіямъ

$$\left.\begin{array}{c} F_{q+k}(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_2,\ldots p_n)=b_{q+k}, \\ k=1,\ 2,\ldots n-q-1, \\ f_r(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_2,\ldots p_n)=a_r, \\ r=1,\ 2,\ldots q, \end{array}\right\} \qquad (62)$$

и опредѣляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи по отношенію къ канонической системѣ (23).

Такъ какъ исходные $n-1$ интеграловъ, согласно со сдѣланнымъ предположеніемъ, могутъ также разрѣшаться относительно перемѣнныхъ $p_2,\ p_3,\ldots p_n$, то отсюда слѣдуетъ, что уравненія (62) вообще могутъ и не разрѣшаться относительно послѣднихъ перемѣнныхъ.

Не останавливаясь сейчасъ на этомъ замѣчаніи, такъ какъ намъ придется разобрать его подробно, воспользуемся первыми $n-1$ интегралами (61), чтобы представить уравненіе (56) въ слѣдующемъ видѣ

$$z-F(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_2,\ p_3,\ldots p_n)=b,$$

при чемъ имѣетъ мѣсто тождество

$$F\equiv U(x_1,\ x_2,\ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ldots p_n,\ F_1,\ F_2,\ldots F_{n-1}).$$

Само собою разумѣется, что, составляя скобки Вейлера, по отношенію къ канонической системѣ (55), т. е. подраздѣляя каноническія перемѣнныя на слѣдующіе два класса, соотвѣтствующіе обѣимъ строкамъ

$$\begin{array}{llll} x_1,\ x_2,\ldots x_{n-q}, & -p_{n-q+1}, & -p_{n-q+2},\ldots & -p_n, \\ p_1,\ p_2,\ldots p_{n-q}, & x_{n-q+1}, & x_{n-q+2},\ldots & x_n, \end{array}$$

получаемъ слѣдующія равенства

$$\left.\begin{array}{c} [p_1+H,\ z-F]=0, \\ [F_s,\ z-F]=0,\quad s=1,\ 2,\ldots n-1. \end{array}\right\} \qquad (63)$$

Вычислимъ, наконецъ, въ этомъ же предположеніи, значеніе скобокъ

$$[f_s,\ z-F]\equiv[f_s,\ z]-(f_s,\ F).$$

Вводимъ слѣдующія обозначенія

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \theta_s, \tag{64}$$

благодаря которымъ получаемъ тождества

$$f_s \equiv \theta_s \left(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}\right);$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Поэтому имѣемъ

$$[f_s, z] \equiv \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} [F_v, z],$$

$$(f_s, F) \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial b_u} (\theta'_s, F_u) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_v, U') + \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_u} \frac{\partial U}{\partial b_v} (F_u, F_v).$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ перемѣнныя

$$x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, -p_{n-q+1}, \ldots -p_n$$

являются каноническими перваго класса, то выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$[F_v, z] \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} x_{n-q+i},$$

$$(\theta'_s, F_u) \equiv -\sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \theta'_s}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}},$$

$$(F_v, U') \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Въ виду того, что имѣютъ мѣсто тождества

$$F_u \left(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \ldots -\frac{\partial U}{\partial p_n},\right.$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}, p_{n-q+1}, \ldots p_n\right) \equiv b_u,$$

$$u = 1, 2, \ldots n-1,$$

то, дифференцируя ихъ по всѣмъ b_v, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-q+i}\partial b_s}+\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}}\frac{\partial^2 U}{\partial x_{r+1}\partial b_s}\equiv\begin{cases}0, & s\gtrless u,\\ 1, & s=u.\end{cases}$$

Поэтому, въ силу введенныхъ обозначеній (64), заключаемъ, что

$$(\theta'_s,\ F_u)\equiv\begin{cases}0, & s\gtrless u,\\ -1, & s=u.\end{cases}$$

Кромѣ того принимая во вниманіе, что

$$(F_u,\ F_r)=0,$$

приводимъ вычисляемыя нами скобки Вейлера къ слѣдующему виду

$$[f_s,\ z-F]\equiv\frac{\partial U}{\partial b_s}+\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\left(\sum_{r=1}^{n-q-1}p_{r+1}\frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}}+\sum_{i=1}^{q}x_{n-q+i}\frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}}\right)-$$

$$-\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\left(\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial U}{\partial x_{r+1}}\frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}\frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}}\right).$$

Въ силу тождествъ, въ которыя обращаются первыя $n-1$ уравненій (57), когда въ нихъ подставить значенія $b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}$, опредѣляемыя этими же уравненіями, выраженія суммъ обѣихъ послѣднихъ строчекъ равны; стало-быть, разность ихъ уничтожается, и мы получаемъ въ результатѣ равенства

$$[f_s,\ z-F]\equiv f_s,\quad s=1,\ 2,\dots n. \tag{65}$$

Равенства (63) и (65) заключаютъ скобки Вейлера, составленныя относительно канонической системы (55).

Однако легко воспользоваться этими зависимостями, чтобы составить замкнутую систему $n+1$ уравненій по отношенію къ канонической системѣ (23). Въ силу условій (63) и (65), мы имѣемъ слѣдующія равенства

$$\left.\begin{aligned}
&p_1+\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}p_{r+1}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}x_{n-q+i}-(p_1+H,\ F)=0,\\
&\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}}p_{r+1}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F_s}{\partial p_{n-q+i}}x_{n-q+i}-(F_s,\ F)=0,\\
&\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial f_s}{\partial p_{r+1}}p_{r+1}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f_s}{\partial p_{n-q+i}}x_{n-p+i}-(f_s,\ F)=f_s,\\
&\qquad s=1,\ 2,\dots n-1,
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

при чемъ скобки Пуассона $(p_1+H,\ F)$, $(F_s,\ F)$ и $(f_s,\ F)$ составлены здѣсь по отношенію къ канонической системѣ (23), т. е. въ предположеніи, что перемѣнныя величины раздѣляются на два класса, соотвѣтствующіе двумъ строкамъ

$$\left.\begin{matrix} x_2,\ x_3,\ldots x_n, \\ p_2,\ p_3,\ldots p_n. \end{matrix}\right\} \qquad (67)$$

Составляемъ, наконецъ, слѣдующее выраженіе

$$\Phi \equiv z - F - \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} p_{n-q+i} + \sum_{i=1}^{q} f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія скобокъ Вейлера, въ канонической системѣ перемѣнныхъ (67),

$$[p_1+H,\ \Phi] \equiv [p_1+H,\ z - \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (p_1+H,\ F) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} [f_i(p_1+H,\ F_i) + F_i(p_1+H,\ f_i)],$$

$$[F_{q+k},\ \Phi] \equiv [F_{q+k},\ z - \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (F_{q+k},\ F) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} [f_i(F_{q+k},\ F_i) + F_i(F_{q+k},\ f_i)],$$

$$[f_r,\ \Phi] \equiv [f_r,\ z - \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (f_r,\ F) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} [f_i(f_r,\ F_i) + F_i(f_r,\ f_i)],$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-q-1$, и для значеній r, отъ 1 до q. Такъ какъ интегралы (61) образуютъ каноническую систему одновременно по отношенію къ каноническимъ системамъ какъ (23) такъ и (55), то, для разсматриваемыхъ сейчасъ формулъ, имѣютъ мѣсто равенства

$$(F_{q+k},\ F_i) \equiv 0, \quad (f_r,\ f_i) \equiv 0,$$

$$(F_s,\ f_\sigma) \equiv \begin{cases} 0, & s \gtrless \sigma, \\ 1, & s = \sigma. \end{cases}$$

Кромѣ того, принимая въ расчетъ уравненія (66), мы приходимъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$[p_1 + H, \Phi] = 0, \quad [F_{q+k}, \Phi] = 0, \quad [f_r, \Phi] = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots n-q-1, \qquad r = 1, 2, \ldots q.$$

Отсюда заключаемъ, что совокупность $n+1$ уравненій (22)-го (62)-ыхъ и слѣдующаго

$$z = F + \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} p_{n-q+i} - \sum_{i=1}^{q} f_i F_i + b_n$$

образуетъ замкнутую систему, при чемъ b_n представляетъ новую произвольную постоянную величину.

Здѣсь слѣдуетъ однако различать два случая, когда классъ представляемаго послѣдней системой полнаго интегральнаго собранія равенъ нулю, или отличенъ отъ него, въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли уравненія (62) относительно перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_n$, или нѣтъ. Разсматриваемая въ первомъ случаѣ система уравненій, путемъ исключенія всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, приводитъ къ слѣдующему полному интегралу Лагранжа уравненія (22)

$$z = U[x_1, \ldots x_{n-q}, (p_{n-q+1}), \ldots (p_n); (F_1), \ldots (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{n-1}] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i}(p_{n-q+i}) - \sum_{i=1}^{q} a_i (F_i) + b_n,$$

гдѣ круглыми скобками обозначенъ результатъ подстановки въ выраженія, заключенныя въ скобки, значеній исключаемыхъ перемѣнныхъ.

Если же уравненія (62) неразрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p, то эта система (62) опредѣляетъ полный интегралъ С. Ли уравненія (22), разсматриваемаго какъ *производное* уравненіе С. Ли. Чтобы получить отсюда, при помощи алгебраическихъ исключеній, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), разсматривая его какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, остается воспользоваться результатами, доказанными въ $n^0$7-омъ настоящей главы.

Изложенныя соображенія, относительно составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа одного дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка, распространяются безъ труда на какія угодно системы совокупныхъ уравненій какъ независящихъ явно отъ неизвѣстной функціи z, такъ и заключающихъ послѣднюю функціональную перемѣнную. Это заключеніе ясно слѣдуетъ изъ всего изложенія настоящей главы. Поэтому мы не станемъ останавливаться на доказательствѣ указанныхъ здѣсь обобщеній и ограничимся только слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Только что разрѣшенная задача позволяетъ составлять полный интегралъ Лагранжа, на основаніи извѣстнаго полнаго интеграла С. Ли,

или даетъ возможность, для составленія полнаго интеграла Лагранжа, переходить отъ одного полнаго интегральнаго собранія нулевого класса къ другому для того, чтобы обойти тѣ или другія трудности вычисленій, которыя могутъ встрѣчаться при составленіи интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Разсматриваемая задача находится въ тѣсной связи съ такъ называемымъ *усовершенствованіемъ С. Ли* способа Якоби-Майера интегрированія частныхъ уравненій [1]), съ той только разницей, что С. Ли прилагаетъ свою теорію къ своимъ *производнымъ* уравненіямъ, тогда какъ соображенія, изложенныя на послѣднихъ страницахъ, имѣютъ главною цѣлью интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Какъ мы раньше указывали [2]), рѣшеніе Майера послѣдняго вопроса было ошибочнымъ; что же касается моего предложеннаго раньше рѣшенія [3]), то оно требуетъ одной квадратурой больше, чѣмъ только что изложенное рѣшеніе, которое основывается исключительно на алгебраическихъ преобразованіяхъ [4]).

10. Воспользуемся полученными результатами, чтобы показать, какія видоизмѣненія, благодаря имъ, могутъ быть внесены въ извѣстный способъ Якоби-Майера интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Пусть имѣемъ *замкнутую* систему m слѣдующихъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ p_1,\ p_2, \dots p_n) = 0, \\ i=1,\ 2, \dots m, \end{array}\right\} \qquad (68)$$

которыя, предположимъ, разрѣшимы относительно m какихъ либо частныхъ производныхъ. Для интегрированія данныхъ уравненій, намъ достаточно однако разрѣшить ихъ относительно m какихъ либо изъ перемѣнныхъ съ различными значками. Пусть, напримѣръ, данныя уравненія разрѣшаются относительно перемѣнныхъ

---

[1]) *S. Lie, Mathematische Annalen, Bd. VIII, S. 215.*

[2]) См. мои сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer (Comptes rendus, 26 juin 1899).*

[3]) См.: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 103 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer (Comptes rendus, 3 juillet 1899).*

[4]) Послѣдніе результаты были опубликованы мною въ двухъ статьяхъ: *Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange (Comptes rendus, 10 août 1903)* и *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (Comptes rendus, 17 août 1903).*

$$p_1,\ p_2, \ldots p_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2}, \ldots x_m.$$

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій *въ инволюціи*

$$\left.\begin{aligned} p_i &= H_i(x_1,\ x_2, \ldots x_k,\ x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_n,\ p_{k+1}, \ldots p_n), \\ & i=1,\ 2, \ldots k, \\ x_{k+j} &= L_j(x_1,\ x_2, \ldots x_k,\ x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_n,\ p_{k+1}, \ldots p_n), \\ & j=1,\ 2, \ldots m-k. \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Для опредѣленія искомаго полнаго интеграла данныхъ уравненій начнемъ съ разысканія уравненія

$$F_{m+1}(x_1,\ x_2, \ldots x_k,\ x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_n,\ p_{k+1}, \ldots p_n) = b_1, \qquad (70)$$

которое должно находиться въ инволюціи съ системой (69), при чемъ b_1 представляетъ произвольную постоянную величину. Для этого должны удовлетворяться условія

$$(p_i - H_i,\ F_{m+1}) = 0, \quad (x_{k+j} - L_j,\ F_{m+1}) = 0,$$
$$i=1,\ 2, \ldots k, \qquad j=1,\ 2, \ldots m-k.$$

Поэтому функція F_{m+1} должна служить интеграломъ слѣдующей якобіевской системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи f величинъ $x_1,\ x_2, \ldots x_k,\ x_{m+1}, \ldots x_n,\ p_{k+1}, \ldots p_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial p_{m+r}}\right) = 0,$$
$$i=1,\ 2, \ldots k,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_{k+j}} + \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial p_{m+r}}\right) = 0,$$
$$j=1,\ 2, \ldots m-k.$$

Такимъ образомъ уравненіе (70) представляетъ интегралъ канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_{m+r} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}}dx_i - \sum_{j=1}^{m-k}\frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}}dp_{k+j},$$
$$dp_{m+r} = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}}dx_i + \sum_{j=1}^{m-k}\frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}}dp_{k+j},$$
$$r=1,\ 2, \ldots n-m.$$

Слѣдовательно, искомый интегралъ (70) опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка $2(m-n)$. Присоединяя уравненіе (70) къ исходной системѣ уравненій, получаемъ новую замкнутую систему $m+1$ уравненія, съ которой поступаемъ аналогично тому, какъ поступали съ первоначальной системой. Продолжая указанныя дѣйствія, мы приходимъ, какъ въ способѣ Якоби-Майера и при помощи равнаго съ нимъ числа эквивалентныхъ операцій интегрированія, къ системѣ n уравненій въ инволюціи слѣдующаго общаго вида

$$p_i = H_i'(x_1, x_2, \ldots x_q, p_{q+1}, \ldots p_n, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}),$$
$$i = 1, 2, \ldots q.$$

$$x_{q+j} = L_j'(x_1, x_2, \ldots x_q, p_{q+1}, \ldots p_n, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}),$$
$$j = 1, 2, \ldots n-q,$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Затѣмъ, при помощи одной квадратуры, получается уравненіе, выражающее въ общемъ случаѣ перемѣнную z функціей остальныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$ и еще одной новой произвольной постоянной b. Мы приходимъ такимъ образомъ къ полному интегральному собранію данной системы уравненій (68), изъ котораго получается ихъ полный интегралъ Лагранжа, при помощи алгебраическихъ исключеній, какъ только что показано на предыдущихъ страницахъ.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_3 p_3) x_3 p_2}{x_1 p_4} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \tag{71}$$

Слѣдующія два уравненія

$$\frac{x_1 p_4}{p_2} = b_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_4}{x_3 p_2}\right) = b_2$$

образують, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (71), систему трехъ уравненій въ инволюціи, при чемъ b_1 и b_2 обозначаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины. Эти уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$p_1 - \frac{b_1}{(x_1 - b_2)^2} p_3 + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} p_4 = 0,$$

$$p_2 - \frac{x_1 p_4}{b_1} = 0,$$

$$x_3 - \frac{b_1}{x_1 - b_2} = 0.$$

Соотвѣтствующая якобіевская система линейныхъ уравненій съ частными производными функціи

$$f(x_1,\ x_2,\ x_4,\ p_3,\ p_4)$$

становится

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{p_4}{x_1 - b_2} \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Поэтому задача приводится къ интегрированію слѣдующей канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_4 = \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} dx_1 - \frac{x_1}{b_1} dx_2,$$

$$dp_4 = -\frac{p_4}{x_1 - b_2} dx_1.$$

Каждое изъ написанныхъ уравненій интегрируется при помощи квадратуры. Если возьмемъ интегралъ перваго изъ послѣднихъ уравненій

$$\frac{b_1 x_4 - x_1 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} = b_3,$$

гдѣ b_3—новая произвольная постоянная величина, то, совершивъ еще одну квадратуру, получаемъ полный интегралъ С. Ли второго класса даннаго уравненія (71), представленный слѣдующими тремя уравненіями

$$z = b_4,$$

$$x_3 = \frac{b_1}{x_1 - b_2},$$

$$x_4 = \frac{1}{b_1} x_1 x_2 + b_3 (x_1 - b_2),$$

гдѣ b_4—новая произвольная постоянная величина. Прилагая въ настоящемъ случаѣ теорію, изложенную въ предыдущемъ $n^0$7-омъ, получаемъ полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (71) въ слѣдующемъ видѣ

$$z = a_2 \left(\frac{b_1}{x_3} - x_1 \right) - \frac{a_3}{b_1} x_3 \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_1} \right) + b,$$

гдѣ a_2, a_3, b_1 и b обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

ГЛАВА VIII.

Задача С. Ли.

1. Разрѣшенный С. Ли вопросъ, извѣстный въ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными подъ названіемъ *задачи С. Ли*, является однимъ изъ цѣнныхъ вкладовъ С. Ли въ научную область интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Благодаря ему обнаруживается практическое значеніе, которое представляетъ каждый интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для интегрированія соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Какъ извѣстно, до С. Ли, послѣдній вопросъ оставался открытымъ, и всякій единичный интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, который не находится въ инволюціи съ ихъ остальными интегралами, не могъ быть использованъ при интегрированіи разсматриваемыхъ уравненій въ тѣхъ случаяхъ, когда общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ оставался неизвѣстнымъ. Кромѣ того разсматриваемая теорія даетъ новые случаи интегрированія при помощи квадратуръ уравненій каноническихъ и съ частными производными (см. мою статью: *Sur le problème de S. Lie*, *Comptes rendus*, *24 août 1903*). Такимъ образомъ рѣшеніе задачи С. Ли является существеннымъ дополненіемъ и дальнѣйшимъ развитіемъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

С. Ли дважды возвращался въ своихъ изслѣдованіяхъ къ рѣшенію разсматриваемой задачи [1]), при чемъ во второмъ изложеніи значительно усовершенствовалъ свою теорію. Рѣшеніе С. Ли, воспроизведенное во всѣхъ его существенныхъ чертахъ въ сочиненіяхъ Гурса и Э. Вебера [2]), основано на столь сложныхъ началахъ, что популяризація самой теоріи и примѣненіе ея для практическихъ цѣлей совершались до сихъ поръ въ самыхъ ограниченныхъ размѣрахъ [3]).

---

[1]) Mathematische Annalen Bd. VIII, S. 248, Bd. XI. S. 464.

[2]) *Gaursat. E.*—Leçons sur l'intégration... p. 304.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 541.

[3]) Едва-ли не единственное приложеніе разсматриваемой теоріи сдѣлано А. Майеромъ въ его мемуарѣ: *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie* (Mathematische Annalen, Bd. XVII, S. 332).

Основываясь на приведенныхъ соображеніяхъ относительно значенія разсматриваемой теоріи, мы изложимъ ее ниже съ точки зрѣнія развитія Якоби-Гамильтоновскаго способа интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ VII главѣ моего цитированнаго уже выше сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными*, приведено рѣшеніе занимающей насъ задачи въ тѣхъ предѣлахъ, въ которыхъ разсматриваетъ ее С. Ли въ VIII томѣ Mathematische Annalen. Дальнѣйшее развитіе указаннаго рѣшенія опубликовано мною, въ краткихъ чертахъ, въ статьѣ: *Sur le problème de S. Lie* (Comptes rendus, 24 août 1903) и будетъ изложено подробно на послѣдующихъ страницахъ.

Необходимо, наконецъ, отмѣтить, что поставленная С. Ли задача уже раньше намѣчалась Якоби въ его трудахъ и разсматривалась имъ при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ и условіяхъ, которыя соотвѣтствовали современному той эпохѣ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными общаго вида и въ частности линейныхъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, Якоби вводилъ въ свои изслѣдованія разсмотрѣніе *функціональныхъ группъ интеграловъ* дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣтствующихъ даннымъ частнымъ уравненіямъ. Но онъ не пользовался при этомъ терминомъ *функціональная группа интеграловъ*, введеннымъ только С. Ли, и не извлекъ изъ разсмотрѣнія интеграловъ въ общемъ случаѣ всѣхъ тѣхъ преимуществъ для интегрированія данныхъ уравненій, которыя открылъ С. Ли [1]). Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ указать на одинъ частный случай относительно дифференціальныхъ уравненій движенія системъ точекъ, допускающихъ три *интеграла площадей*, когда Якоби пришелъ къ тѣмъ же результатамъ, которые вытекаютъ изъ разсматриваемой общей теоріи С. Ли [2]). Наконецъ, Якоби отмѣтилъ нѣсколько частныхъ случаевъ въ своей общей теоріи, которые показываютъ его стремленія къ тому, чтобы использовать извѣстные интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для уменьшенія трудностей интегрированія соотвѣтствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными [3]).

---

[1]) *Jacobi.—Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.* (Gesammelte Werke. Bd. V, S. 151).

[2]) *Jacobi.*—Nova methodus... S. 153—163.

[3]) *Jacobi.—Vorlesungen über Dynamik. Zweite Ausgabe,* 1884. *S.* 263.

Imschenetzky. V. G.—Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 1869. p.p. 68—69.

2. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными въ *инволюціи*

$$F_i(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots m. \tag{1}$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ величинъ $p_1, p_2, \dots p_m$, такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_m}{p_1, p_2, \dots p_m}\right) \gtrless 0. \tag{2}$$

Составляемъ систему линейныхъ уравненій въ *инволюціи*, соотвѣтствующую даннымъ уравненіямъ (1)

$$(F_i, f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots m. \tag{3}$$

Предположимъ, наконецъ, что извѣстны $m + r$ $(r < 2n - 2m)$ слѣдующихъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій

$$F_1, F_2, \dots F_m, f_1, f_2, \dots f_r, \tag{4}$$

которые образуютъ *функціональную группу*, т. е. скобки Пуассона, составленныя изъ каждой пары интеграловъ (4), не представляютъ новыхъ интеграловъ системы (3), отличныхъ отъ интеграловъ (4)-ыхъ.

Какъ извѣстно, линейныя уравненія

$$U_k(f) \equiv (f_k, f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots r, \tag{5}$$

образуютъ замкнутую систему совмѣстно съ уравненіями (3) [1]. Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы составить изъ послѣднихъ уравненій (5) такую замкнутую систему линейныхъ уравненій, которая имѣла бы интегралами функціи (4). Уравненія искомой системы должны имѣть слѣдующій видъ

$$V(f) \equiv \sum_{k=1}^{r} \Pi_k(F_1, F_2, \dots f_r)\, U_k(f) = 0,$$

гдѣ Π_k представляютъ неизвѣстныя функціи.

---

[1]) *Goursat, E.*—Leçons sur l'intégration... p. 308.

Само собою разумѣется, что функціи $F_1, F_2, \dots F_m$ утождествляютъ всѣ уравненія предыдущаго вида. Чтобы удовлетворить поставленному условію относительно остальныхъ функцій (4), необходимо опредѣлить значенія всѣхъ Π_k такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{ks}\, \Pi_k = 0, \\ s = 1, 2, \dots r,\end{array}\right\} \qquad (6)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\alpha_{ks} \equiv (f_k, f_s).$$

Такъ какъ уравненія (6) линейны и однородны относительно неизвѣстныхъ величинъ Π_k, то, чтобы послѣднія имѣли значенія, отличныя отъ нулей, необходимо долженъ обращаться въ нуль слѣдующій опредѣлитель

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{r1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{r2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{1r} & \alpha_{2r} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Предположимъ, что уничтожается не только послѣдній опредѣлитель S, но также и всѣ его миноры, отъ перваго до q—1-аго порядка включительно, такъ что первый миноръ, не обращающійся въ нуль, представляетъ опредѣлитель $r-q$-аго порядка. Въ виду того, что порядокъ, въ которомъ мы размѣщаемъ интегралы (4), вполнѣ произволенъ и зависитъ отъ нашего усмотрѣнія, то мы можемъ, не нарушая общности разсужденій, обозначить извѣстные интегралы (4) такъ, чтобы первый неуничтожающійся миноръ опредѣлителя (7) представлялся слѣдующимъ опредѣлителемъ

$$D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{r-q,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{r-q,2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{1,r-q} & \alpha_{2,r-q} & \dots & \alpha_{r-q,r-q} \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ послѣдній опредѣлитель косой симметрическій и, по условію, неравенъ нулю, то, стало-быть, порядокъ его является четнымъ числомъ, какъ это хорошо извѣстно изъ теоріи опредѣлителей. Называя его, напримѣръ, черезъ 2ρ, мы получаемъ такимъ образомъ, что

$$r - q \equiv 2\varrho, \tag{8}$$

т. е. ***разность $r - q$ является четнымъ числомъ.***

Возвращаясь къ уравненіямъ (6), мы получаемъ изъ нихъ

$$\Pi_k = -\sum_{j=1}^{q} \frac{D_{kj}}{D} \Pi_{2\varrho+j},$$
$$k = 1, 2, \ldots 2\varrho,$$

гдѣ D_{kj} обозначаетъ значеніе, которое принимаетъ опредѣлитель D, при замѣнѣ его элементовъ k-аго столбца соотвѣтственно величинами

$$a_{2\varrho+j,\,1},\ a_{2\varrho+j,\,2}, \ldots a_{2\varrho+j,\,2\varrho}.$$

Благодаря вычисленнымъ значеніямъ Π_k, выраженіе $V(f)$ становится

$$V(f) \equiv \sum_{j=1}^{q} \Pi_{2\varrho+j} V_j(f),$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$V_j(f) \equiv U_{2\varrho+j}(f) - \sum_{k=1}^{2\varrho} \frac{D_{kj}}{D} U_k(f),$$
$$j = 1, 2, \ldots q.$$

Вслѣдствіе произвольности всѣхъ величинъ $\Pi_{2\varrho+j}$, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ j, отъ 1 до q, становится очевиднымъ, что всѣ выраженія $V_j(f)$ обладаютъ свойствами, аналогичными выраженіямъ $V(f)$, т. е. уничтожаются для всѣхъ значеній (4) функціи f. Поэтому мы получаемъ систему q уравненій

$$V_j(f) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots q. \tag{9}$$

интегралами которой служатъ функціи (4).

Само собою разумѣется, что уравненія (3) и (9) образуютъ *замкнутую* систему, такъ какъ существуютъ общіе всѣмъ имъ интегралы (4). Кромѣ того изъ самаго строенія разсматриваемыхъ уравненій видно, что всѣ они различны между собой. Мы получаемъ такимъ образомъ, при помощи алгебраическихъ вычисленій, замкнутую систему $m+q$ различныхъ уравненій (3) и (9), для которой извѣстны $m+r$ различныхъ интеграловъ (4).

Очевидно, что задача интегрированія исходной системы уравненій (1) упрощается, въ смыслѣ пониженія порядка интегрированій, если

опредѣлять новые интегралы системы (3), отличные отъ (4)-ыхъ, какъ интегралы замкнутой системы, образованной совокупностью уравненій (3) и (9).

Такъ какъ извѣстны $m+r$ интеграловъ послѣдней системы, то ея новый интегралъ опредѣляется при помощи операціи интегрированія, порядокъ которой выражается числомъ

$$2n-2m-q-r.$$

Послѣднее, въ силу зависимости (8), является четнымъ и равно числу

$$2n-2m-2q-2\varrho\,.$$

Назовемъ черезъ f_{r+1} полученный такимъ образомъ интегралъ разсматриваемой системы. Послѣдній интегралъ, въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, образуетъ, совмѣстно съ (41)-ыми, функціональную группу, которая очевидно имѣетъ по меньшей мѣрѣ одной *существенной функціей* [1]) больше сравнительно съ прежней группой, такъ какъ разность между числомъ всѣхъ функцій группы $m+r+1$ и числомъ прежнихъ *существенныхъ функцій* $m+q$ является нечетнымъ $2\varrho+1$, что невозможно въ силу изложенныхъ выше соображеній. Предположимъ, что разсматриваемая группа имѣетъ только одной *существенной функціей* больше сравнительно съ предыдущей. Въ такомъ случаѣ мы составляемъ еще одно уравненіе

$$V_{q+1}(f)=0,$$

образующее, совмѣстно съ предыдущими, замкнутую систему $m+q+1$ уравненій, для которой извѣстны очевидно $m+r+1$ интеграловъ. Поэтому новый интегралъ, который обозначимъ черезъ f_{r+2}, опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка

$$2n-2m-2q-2\varrho-2\,.$$

Продолжая поступать аналогичнымъ образомъ и далѣе, приходимъ въ результатѣ, при самомъ неблагопріятномъ случаѣ, послѣ $n-m-q-\varrho$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ

$$2n-2m-2q-2\varrho,\quad 2n-2m-2q-2\varrho-2,\ldots 4,\ 2,$$

къ $n-m-q-\varrho$ различнымъ новымъ интеграламъ системы (3)

---

[1]) *Существенными (ausgezeichnete, distinguée)* функціями группы называются такія, которыя находятся въ инволюціи какъ между собой, такъ и съ каждой изъ функцій группы въ отдѣльности (см. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...*, *глава VIII*).

$$f_{r+1},\ f_{r+2},\dots f_{n-m+\rho},$$

(въ силу зависимости (8), число $n-m-q-\rho+r$ равняется $n-m+\rho$).

Такимъ образомъ въ результатѣ получается слѣдующая замкнутая система $n-\rho$ линейныхъ уравненій

$$(F_i,\ f)=0,\quad i=1,\ 2,\dots m,$$
$$V_j(f)=0,\quad j=1,\ 2,\dots q,\ q+1,\dots n-m-\rho,$$

для которой извѣстна полная система ея $n+\rho$ различныхъ интеграловъ

$$F_1,\ F_2,\dots F_m,\ f_1,\ f_2,\dots f_r,\ f_{r+1},\dots f_{n-m+\rho}. \tag{10}$$

3. Согласно съ изложеннымъ, послѣдняя группа интеграловъ (10) имѣетъ $n-\rho$ *существенныхъ функцій*, въ числѣ которыхъ находятся m первыхъ интеграловъ (10).

Остальныя $n-m-\rho$ существенныхъ функцій, которыя мы обозначимъ черезъ

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\dots \Phi_q,\ \Phi_{q+1},\dots \Phi_{n-m-\rho} \tag{11}$$

могутъ быть вычислены, при помощи $n-m-\rho$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія порядковъ

$$n-m-\rho,\ n-m-\rho-1,\dots q,\ q-1,\dots 2,\ 1.$$

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) очевидно привелась бы къ одной только квадратурѣ, если бы эти послѣднія функціи были извѣстны. Квадратура эта состоитъ въ разысканіи послѣдняго интеграла системы линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}&[F_i,\ f]=0,\quad i=1,\ 2,\dots m,\\&[\Phi_j,\ f]=0,\quad j=1,\ 2,\dots q,\ q+1,\dots n-m-\rho,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

гдѣ функція f разсматривается какъ зависящая отъ всѣхъ прежнихъ перемѣнныхъ x, p и отъ новой перемѣнной z.

Интегралами послѣдней системы служатъ очевидно всѣ функціи (10). Приравнявъ m первыя изъ нихъ нулю, а всѣ остальныя произвольнымъ постояннымъ, получаемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned}&F_i(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n)=0,\\&\qquad i=1,\ 2,\dots m,\\&f_k(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n)=b_k,\\&\qquad k=1,\ 2,\dots r,\ r+1,\dots n-m+\rho,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

гдѣ всѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Послѣдняя система представляетъ $n+\varrho$ интегральныхъ уравненій системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующихъ линейнымъ уравненіямъ (12). Послѣдній ея интегралъ получается интегрированіемъ точнаго дифференціала, въ который обращается уравненіе

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s, \tag{14}$$

на основаніи интегральныхъ уравненій (13) (ср. стр. 148). Такимъ образомъ послѣдній искомый интегралъ системы (12) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z - F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n). \tag{15}$$

Однако для рѣшенія разсматриваемой задачи интегрированія данныхъ уравненій (1), нѣтъ надобности вычислять функціи (11), но достаточно замѣтить, что всѣ уравненія $V_j(f)=0$ равнозначны слѣдующимъ линейнымъ уравненіямъ [1])

$$(\Phi_j, f) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots q, \ q+1, \ldots n - m - \varrho. \tag{16}$$

Это замѣчаніе является существеннымъ въ томъ отношеніи, что мы имѣемъ теперь теоретическое основаніе утверждать, что *уравненіе (14), въ силу системы уравненій (13), обращается въ точный дифференціалъ, интегрированіемъ котораго опредѣляется функція (15).*

4. Доказанныхъ предложеній достаточно, чтобы показать, что интегрированіе уравненій (1), на основаніи полученныхъ данныхъ, совершается при помощи операцій дифференцированія и алгебраическихъ исключеній.

Въ самомъ дѣлѣ, соотвѣтствующая даннымъ уравненіямъ (1) нормальная система линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c}[F_i, f] = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m,\end{array}\right\} \tag{17}$$

имѣетъ $n+\varrho+1$ различныхъ интеграловъ (10) и (15). Легко показать, что остальные $n-m-\varrho$ интеграловъ этой системы (17) опредѣляются при помощи дифференцированія, и тогда очевидно, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) разрѣшается на основаніи теоріи характеристикъ.

---

[1]) См. *Объ интегрированіи уравненій...*, глава VII.

Чтобы составить эти послѣднiе недостающiе интегралы, приравниваемъ интегралъ (15) произвольной постоянной величинѣ b. Не нарушая общности разсужденiй, можемъ предположить, что полученное такимъ образомъ уравненiе и уравненiя (13)-ыя разрѣшаются относительно перемѣнныхъ

$$z,\ x_{n-\rho+1},\ x_{n-\rho+2},\ldots x_n,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n$$

и выражаютъ слѣдующимъ образомъ ихъ значенiя въ функцiяхъ остальныхъ перемѣнныхъ и всѣхъ $n-m+\rho+1$ произвольныхъ постоянныхъ

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-\rho}, b_1, b_2, \ldots b_{n-m+\rho}) + b, \\ x_{n-\rho+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-\rho}, b_1, b_2, \ldots b_{n-m+\rho}), \\ p_s &= \psi_s(x_1, x_2, \ldots x_{n-\rho}, b_1, b_2, \ldots b_{n-m+\rho}), \\ & i=1,2,\ldots\rho, \qquad s=1,2,\ldots n. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Вслѣдствiе того, что результатъ исключенiя всѣхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \ldots b_{n-m+\rho}$, изъ $n+\rho$ послѣднихъ уравненiй (18), приводитъ къ данной системѣ (1), разрѣшающейся относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_m$, въ силу условiя (2), то должно имѣть мѣсто слѣдующее неравенство

$$D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots \varphi_\rho,\ \psi_{m+1},\ \psi_{m+2},\ldots \psi_n}{b_1,\ b_2,\ldots b_\rho,\ b_{\rho+1},\ b_{\rho+2},\ldots b_{n-m+\rho}}\right) \gtrless 0.$$

Напишемъ въ явной формѣ значенiе опредѣлителя лѣвой части послѣдняго неравенства

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial\psi_{m+1}}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial b_1} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial\psi_n}{\partial b_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_2} \cdots \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial\psi_{m+1}}{\partial b_2} \cdots \frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial b_2} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2} \cdots \frac{\partial\psi_n}{\partial b_2} \\ \cdot \ \cdots \ \cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot \\ \cdot \ \cdots \ \cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}} \cdots \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial\psi_{m+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} \cdots \frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} \cdots \frac{\partial\psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{vmatrix} \qquad (19)$$

Такъ какъ равенство (14) утождествляется, на основанiи уравненiй (18), то должны имѣть мѣсто тождества

$$\left.\begin{array}{c}\psi_s \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_s} - \sum\limits_{i=1}^{\rho} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}\psi_{n-\rho+i}, \\ s=1,\,2,\ldots m,\; m+1,\ldots n-\rho.\end{array}\right\} \tag{20}$$

Отсюда выводятся слѣдующія тождества

$$\frac{\partial\psi_{m+j}}{\partial b_k} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{m+j}\,\partial b_k} - \sum_{i=1}^{\rho}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_{m+j}\,\partial b_k}\psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{m+j}}\,\frac{\partial\psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k}\right),$$
$$j=1,\,2,\ldots n-m-\rho,$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-m+\rho$. Подставляемъ послѣднія значенія производныхъ $\dfrac{\partial\psi_{m+j}}{\partial b_k}$, вмѣсто элементовъ всѣхъ столбцовъ опредѣлителя (19), отъ $\rho+1$-аго до $n-m$-аго столбца включительно. Въ этихъ послѣднихъ выраженіяхъ элементовъ отбрасываемъ всѣ члены вида

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{m+j}}\cdot\frac{\partial\psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k},$$

какъ пропорціональные элементамъ послѣднихъ ρ столбцовъ опредѣлителя (19), и прибавляемъ взамѣнъ ихъ члены, которые пропорціональны элементамъ первыхъ ρ столбцовъ разсматриваемаго опредѣлителя

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_k}\cdot\frac{\partial\psi_{n-\rho+i}}{\partial x_{m+j}}.$$

Благодаря послѣднимъ преобразованіямъ, предыдущій опредѣлитель представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_1} & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_{n-\rho}} & \dfrac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial b_1} \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_2} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_2} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_{n-\rho}} & \dfrac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial b_2} \\
. & \ldots & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
. & \ldots & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dfrac{\partial\theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial\theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{n-\rho}} & \dfrac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}}
\end{vmatrix},$$

гдѣ обозначенія θ_k имѣютъ слѣдующія значенія

$$\theta_k \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_k}\psi_{n-\rho+i},$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-m+\rho$.

Вслѣдствіе неравенства нулю послѣдняго опредѣлителя, не долженъ равняться нулю по меньшей мѣрѣ одинъ изъ его миноровъ $n-m-\rho$-аго порядка, который составленъ изъ элементовъ $\rho+1$, $\rho+2,\ldots n-m$-аго столбцовъ разсматриваемаго опредѣлителя. Пусть, напримѣръ, слѣдующій опредѣлитель-миноръ

$$D\left(\frac{\theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots\theta_{n-m-\rho}}{x_{m+1},\quad x_{m+2},\ldots\quad x_{n-\rho}}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Отсюда слѣдуетъ, что уравненія

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_j}\psi_{n-\rho+i} = a_j, \\ j=1,2,\ldots n-m-\rho,\end{array}\right\} \tag{21}$$

различны и разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ

$$x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots x_{n-\rho},$$

при чемъ a_1, $a_2,\ldots a_{n-m-\rho}$ представляютъ $n-m-\rho$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко доказать, что уравненія (21) представляютъ недостающія $n-m-\rho$ интегральныхъ уравненій системы въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующей линейнымъ уравненіямъ (17). Въ самомъ дѣлѣ, исключаемъ изъ выраженій θ_j значенія b_1, $b_2,\ldots b_{n-m+\rho}$, опредѣляемыя уравненіями (18). Обозначимъ полученные результаты соотвѣтственно черезъ

$$F_{m+1},\ F_{m+2},\ldots F_{n-\rho}. \tag{22}$$

Такъ какъ въ результатѣ произведенной подстановки функціи ψ_s принимаютъ тождественно значенія p_s, то функціи F_{m+j} выражаются слѣдующимъ образомъ

$$F_{m+j} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial b_j} - \sum_{i=2}^{\rho} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_1} p_{n-\rho+i},$$

при чемъ всѣ b_k замѣнены ихъ указанными выше функціональными значеніями.

Поэтому скобки Пуассона (F_σ, F_{m+j}) имѣютъ слѣдующее значеніе

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-m+\rho} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial b_k} (F_\sigma, f_k).$$

Подставляя сюда выраженія

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j \, \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j \, \partial x_s} p_{n-\rho+i},$$

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j},$$

$$(F_\sigma, f_k) \equiv 0.$$

получаемъ въ результатѣ

$$\left. \begin{aligned} (F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j \, \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j \, \partial x_s} p_{n-\rho+i} \right) + \\ + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j}. \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Съ другой стороны мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\rho, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n) \equiv 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots m.$$

Дифференцируя послѣднія тождества по $b_1, b_2, \ldots b_{n-m-\rho}$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv 0, \\ \sigma = 1, 2, \ldots m, \qquad j = 1, 2, \ldots n - m - \rho. \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Вслѣдствіе равенствъ (20), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_j} \psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \right),$$

$$s = 1, 2, \ldots n-\rho,$$

для всѣхъ значеній j, отъ 1 до $n-m-\rho$. Поэтому, послѣ подстановки значеній всѣхъ b_k, изъ уравненій (18), въ обѣ системы предыдущихъ равенствъ, тождества (24) становятся

$$\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} p_{n-\rho+i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \right) \right] + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-\rho+i}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \equiv 0,$$

$$\sigma = 1, \ldots m, \qquad j = 1, 2, \ldots n-m-\rho.$$

Поэтому выраженія скобокъ Пуассона (23) **принимаютъ слѣдующій видъ**

$$\left.\begin{array}{c}(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \sum\limits_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-\rho+i}} - \sum\limits_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \right), \\ \sigma = 1, \ldots m, \qquad j = 1, \ldots n-m-\rho.\end{array}\right\} \tag{25}$$

5. Прежде чѣмъ вести дальше наши разсужденія **необходимо остановиться** на нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ теоріи **дифференціальныхъ** уравненій.

Пусть имѣемъ слѣдующую замкнутую систему m различныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_{k=1}^{n} X_i^k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m,\end{array}\right\} \tag{26}$$

удовлетворяющихъ условію

$$\begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \ldots & X_1^m \\ X_2^1 & X_2^2 & \ldots & X_2^m \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ X_m^1 & X_m^2 & \ldots & X_m^m \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

при чемъ коэффиціенты X_i^k представляютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Предположимъ, что функціи

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-m}$$

представляютъ полную систему $n-m$ различныхъ интеграловъ уравненій (26), такъ что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{n} X_i^k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = 0, \\ i=1, 2, \ldots m, \quad s=1, 2, \ldots n-m.\end{array}\right\} \tag{27}$$

Вслѣдствіе предыдущаго неравенства, послѣдніе интегралы должны удовлетворять условію

$$D\left(\frac{f_1, \quad f_2, \ldots f_{n-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n}\right) \gtrless 0. \tag{28}$$

Поэтому слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_s(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ s=1, 2, \ldots n-m, \end{array}\right\} \tag{29}$$

представляютъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующихъ линейной системѣ (26), и опредѣляютъ значенія перемѣнныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n,$$

какъ функціи остальныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Въ силу послѣднихъ значеній, уравненія (29) обращаются въ тождества и даютъ мѣсто новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0,$$
$$h=1, 2, \ldots m.$$

Умножая послѣднія тождества соотвѣтственно на X_i^h и складывая полученные результаты, получаемъ новый рядъ тождествъ

$$\sum_{h=1}^{m} X_i^h \frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{m} X_i^h \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0;$$
$$i=1, 2, \ldots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Послѣднія, въ силу равенствъ (27), приводятся къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \left(\sum_{h=1}^{m} X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} \right) = 0,$$

$$s=1,\,2,\ldots n-m, \qquad i=1,\,2,\ldots m.$$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства (28), получаются искомыя нами тождества

$$\left. \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{h=1}^{m} X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} = 0, \\ i=1,\,2,\ldots m, \qquad r=1,\,2,\ldots n-m, \end{array} \right\} \tag{30}$$

которымъ должно удовлетворять каждое рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтсвующихъ данной системѣ линейныхъ уравненій (26).

6. Послѣ сдѣланнаго отступленія, возвращаемся къ формуламъ (25). Совокупность уравненій (18) представляетъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующихъ замкнутой системѣ линейныхъ уравненій (12), которую представимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} p_s \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma=1,\,2,\ldots m,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(A_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s} + B_j^s \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + C_j \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$j=1,\,2,\ldots q,\; q+1,\ldots n-m-\rho.$$

Поэтому тождества (30) въ настоящемъ случаѣ, благодаря обозначеніямъ уравненій (18), становятся

$$\sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-\rho+i}} = 0,$$

$$i=1,\,2,\ldots \rho, \qquad \sigma=1,\,2,\ldots m,$$

и т. д.

Для нашихъ цѣлей достаточно равенствъ написанной первой строки. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи послѣднихъ, скобки Пуассона (25) обращаются тождественно въ нуль, и мы получаемъ искомыя тождества

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \dots m, \quad j = 1, 2, \dots n-m-\rho.$$

Такимъ образомъ функціи (22) представляютъ $n-m-\rho$ искомыхъ интеграловъ системы линейныхъ уравненій (17). Поэтому полный интегралъ данной системы уравненій въ инволюціи (1) опредѣляется совокупностью уравненій (18) и (21), при помощи операцій алгебраическихъ исключеній, на основаніи *теоріи характеристикъ*. При этомъ произвольными постоянными служатъ всѣ $2n-2m$ слѣдующихъ величинъ

$$b_1, b_2, \dots b_{n-m+\rho}, b, a_1, a_2 \dots a_{n-m-\rho}. \tag{31}$$

Если послѣднія не удовлетворяютъ указаннымъ въ теоріи характеристикъ условіямъ, то необходимо принять начальныя значенія слѣдующихъ перемѣнныхъ величинъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, \quad z - \sum_{j=1}^{n-m} x_{m+j} p_{m+j}, \quad p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n$$

произвольными постоянными величинами, вмѣсто постоянныхъ (31).

Относительно предыдущихъ вычисленій слѣдуетъ замѣтить, что при послѣдовательномъ разысканіи интеграловъ уравненій (3), мы предполагали всегда самый неблагопріятный случай, когда, при каждомъ новомъ интегрированіи, число интеграловъ, соотвѣтствующихъ функціональныхъ группъ увеличивается только на единицу. Но если бы скобки Пуассона, составленныя изъ каждаго вновь полученнаго интеграла съ прежними, приводили къ новымъ интеграламъ разсматриваемыхъ уравненій, тогда, само собою разумѣется, что число указанныхъ операцій интегрированія и порядокъ ихъ соотвѣтственно уменьшаются.

Наконецъ, если какой-либо изъ найденныхъ интеграловъ системы (3) находится въ инволюціи со всѣми остальными, то приравнивая его произвольной постоянной величинѣ и присоединяя полученное такимъ образомъ уравненіе къ исходнымъ (1), мы избѣгаемъ необходимости составлять одно изъ вспомогательныхъ уравненій вида $V(f)=0$ и тѣмъ упрощаемъ вычисленія.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему результату:

Пусть даны m уравненій въ инволюціи (1); предположимъ, что ихъ дифференціальныя уравненія характеристикъ имѣютъ $m+r$ различныхъ интеграловъ (4), образующихъ функціональную группу съ $m+q$ существенными функціями. Въ такомъ случаѣ разность $r-q$ является нѣкоторымъ четнымъ числомъ 2ρ, и задача интегрированія уравненій (1) разрѣшается.

въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, при помощи $n-m-\varrho-q$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ

$$2(n-m-\varrho-q),\ 2(n-m-\varrho-q-1),\ldots 4,\ 2,$$

одной квадратуры и при помощи алгебраическихъ исключеній.

Проинтегрируемъ, напримѣръ, слѣдующее дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$F_1 \equiv x_1 p_1 - e^{x_2} p_2 (p_3 - p_4) = 0. \tag{32}$$

Соотвѣтствующее линейное уравненіе

$$(F_1,\ f) = 0 \tag{33}$$

имѣетъ, кромѣ интеграла F_1, еще слѣдующихъ три интеграла

$$f_1 \equiv p_3,\quad f_2 \equiv x_3 p_4 + x_4 p_3 - p_2,\quad f_3 \equiv p_4,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(f_1,\ f_2) \equiv f_3,\quad (f_1,\ f_3) \equiv 0,\quad (f_2,\ f_3) \equiv f_1.$$

Значеніе соотвѣтствующаго опредѣлителя S

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 & 0 \\ f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & -f_1 & 0 \end{vmatrix}$$

равняется нулю. Первый неуничтожающійся миноръ послѣдняго опредѣлителя принадлежитъ первому порядку

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 \\ f_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv f_3^2.$$

Поэтому существуетъ одно линейное уравненіе

$$(f_3,\ f) - \frac{f_1}{f_3}(f_1,\ f) = 0, \tag{34}$$

образующее замкнутую систему съ уравненіемъ (33). Послѣдняя система линейныхъ уравненій (33) и (34) имѣетъ слѣдующій интегралъ

$$F_2 \equiv x_1 p_1,$$

находящійся въ инволюціи съ извѣстными интегралами f_1, f_2, f_3.

Составляемъ поэтому слѣдующую систему уравненій

$$F_1 = 0, \quad F_2 = C_1,$$

$$f_1 = b_1, \quad f_2 = b_2, \quad f_3 = b_3,$$

гдѣ C_1, b_1, b_2, b_3 обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Послѣдняя система уравненій даетъ

$$\left.\begin{array}{c} p_1 = \dfrac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \dfrac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3}, \quad p_3 = b_1, \ p_4 = b_3, \\ x_4 = \dfrac{1}{b_1}\left(\dfrac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3} + b_2 - b_3 x_3\right). \end{array}\right\} \tag{35}$$

Въ силу послѣднихъ зависимостей, дифференціальное уравненіе

$$dz = \sum_{s=1}^{4} p_s dx_s$$

даетъ, при помощи квадратуры, интегралъ

$$z = \left(b_1 - \frac{b_3^2}{b_1}\right) x_3 - \frac{C_1}{b_1} e^{-x_2} + C_1 \lg x_1 + b, \tag{36}$$

гдѣ b—новая произвольная постоянная величина.

Итакъ составляемъ систему двухъ уравненій

$$F_1 = 0, \quad F_2 = C_1. \tag{37}$$

Система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующая линейнымъ уравненіямъ

$$[F_1, f] = 0, \quad [F_2, f] = 0,$$

имѣетъ рѣшеніе, представленное совокупностью уравненій (35), (36) и слѣдующаго

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_3} \varphi_4 = a_3,$$

выраженнаго въ прежнихъ обозначеніемъ. Въ настоящемъ случаѣ последнее уравненіе становится

$$-\frac{b_3}{b_1}\left[x_3+\frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)}\right]=a_3.$$

Поэтому совокупность этого уравненія съ (35)-ыми и (36)-ымъ опредѣляетъ слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{array}{c} z=-\dfrac{2C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)}+C_1\, lg\, x_1+b', \\[2ex] x_3=-\dfrac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)^2}-\dfrac{b_1 a_3}{b_3}, \quad x_4=\dfrac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)^2}+\dfrac{b_2}{b_1}+a_3, \\[2ex] p_1=\dfrac{C_1}{x_1}, \quad p_2=\dfrac{C_1 e^{-x_2}}{b_1-b_3}, \quad p_3=b_1, \quad p_4=b_3, \end{array}\right\} \qquad (38)$$

гдѣ b' обозначаетъ новую произвольную постоянную величину, связанную слѣдующимъ образомъ съ постоянной b,

$$b'=b+\frac{a_3}{b_3}(b_3^2-b_1^2).$$

Вводимъ, вмѣсто обозначенія произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, b_3, a_3 и b', величины

$$x_3^0,\ x_4^0,\ a,\ p_3^0,\ p_4^0,$$

представляющія начальныя значенія перемѣнныхъ

$$x_3,\ x_4,\ z-x_3\,p_3-x_4\,p_4,\ p_3,\ p_4,$$

соотвѣтствующія начальнымъ значеніямъ x_1^0 и x_2^0 независимыхъ перемѣнныхъ x_1 и x_2.

Въ такомъ случаѣ уравненія (38) преобразовываются въ слѣдующія

$$z=\frac{2C_1\left(e^{-x_2^0}-e^{-x_2}\right)}{p_3^0-p_4^0}+C_1\, lg\,\frac{x_1}{x_1^0}+a+x_3^0\, p_3^0+x_4^0\, p_4^0,$$

$$x=\frac{C_1\left(e^{-x_2^0}-e^{-x_2}\right)}{(p_3^0-p_4^0)^2}+x_3^0, \quad x_4=\frac{C_1\left(e^{-x_2}-e^{-x_2^0}\right)}{(p_3^0-p_4^0)^2}+x_4^0,$$

$$p_1 = \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{p_3^0 - p_4^0}, \quad p_3 = p_3^0, \ p_4 = p_4^0.$$

Исключая x_3^0 и x_4^0, изъ первыхъ трехъ уравненій сейчасъ написанной системы, получаемъ полный интегралъ системы уравненій (37)

$$z = \frac{C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{p_3^0 - p_4^0} + C_1 \lg \frac{x_1}{x_1^0} + p_3^0 \, x_3 + p_4^0 \, x_4 + a.$$

при чемъ p_3^0, p_4^0 и a являются тремя различными произвольными постоянными величинами.

Принимая въ послѣдней формулѣ C_1 также за произвольную постоянную величину, мы выражаемъ этимъ же самымъ уравненіемъ искомый полный интегралъ даннаго уравненія (32), при чемъ C_1, p_3^0, p_4^0, a представляютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 1 Марта 1902 года.

1. Прочитанъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Произведены выборы проф. Тулузскаго университета E. Cosserat. Избранъ единогласно.

3. *В. А. Стекловъ* доложилъ статью A. Kneser'a: „Die Iacobi'sche Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung".

4. *М. А. Тихомандрицкій* отъ имени Д. Д. Мордухай-Болтовскаго сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ обобщеніи теоремы Абеля".

Экстренное засѣданіе 10 Мая 1902 года.

1. Прочитанъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. В. А. Стекловъ сообщилъ, что В. П. Ермаковъ и К. А. Поссе благодарятъ за избраніе ихъ въ почетные члены, а А. П. Котельниковъ за избраніе его въ члены-корреспонденты Общества.

3. Г. предсѣдательствующій сообщилъ, что университетъ въ Христіаніи приглашаетъ Математическое Общество принять участіе въ чествованіи столѣтія со дня рожденія Абеля. Постановлено послать отъ имени Общества адресъ.

4. Избранъ единогласно въ почетные члены Общества академикъ А. М. Ляпуновъ (безъ баллотировки).

Засѣданіе 12 Марта 1904 года.

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Предсѣдатель прочелъ письмо Д. И. Менделѣева съ выраженіемъ благодарности по поводу поздравленія въ день 75-лѣтняго юбилея.

3. По предложенію В. А. Стеклова постановлено предложить Краковской Академіи Наукъ обмѣнъ изданіями, при чемъ Общество просило В. А. Стеклова вступить въ переписку по этому поводу.

4. Доложена просьба слушательницъ С.-Петербургскихъ Женскихъ Курсовъ о высылкѣ изданій Общества для читальни; постановлено выслать 2-ую серію „Сообщеній" Общества.

5. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе задачи Крелля".

6. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О комплексахъ прямыхъ".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА.

3 *Октября 1904 года.*

1. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности Общества за 1903—1904 акад. годъ.

2. Предсѣдатель доложилъ о смерти почетнаго члена Общества акад. Ѳ. А. Бредихина и предложилъ почтить память его вставаніемъ.

3. Предсѣдатель сдѣлалъ нѣкоторыя замѣчанія по поводу отчета о средствахъ Общества въ 1903—1904 году; при этомъ выяснилось, что остатокъ въ 1019 руб. 30 коп. объясняется тѣмъ, что ко времени составленія отчета не была произведена расплата съ типографіей Зильберберга за печатаніе „Сообщеній" Общества; послѣ этой расплаты, предстоящей въ ближайшемъ будущемъ, остатокъ уменьшится приблизительно рублей на 500.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета Общества на 1904—1905 академ. годъ; избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя: проф. В. П. Алексѣевскій и проф. А. П. Грузинцевъ, секретаремъ привать-доцентъ А. П. Пшеборскій.

5. По примѣру прежнихъ лѣтъ произведена добровольная подписка.

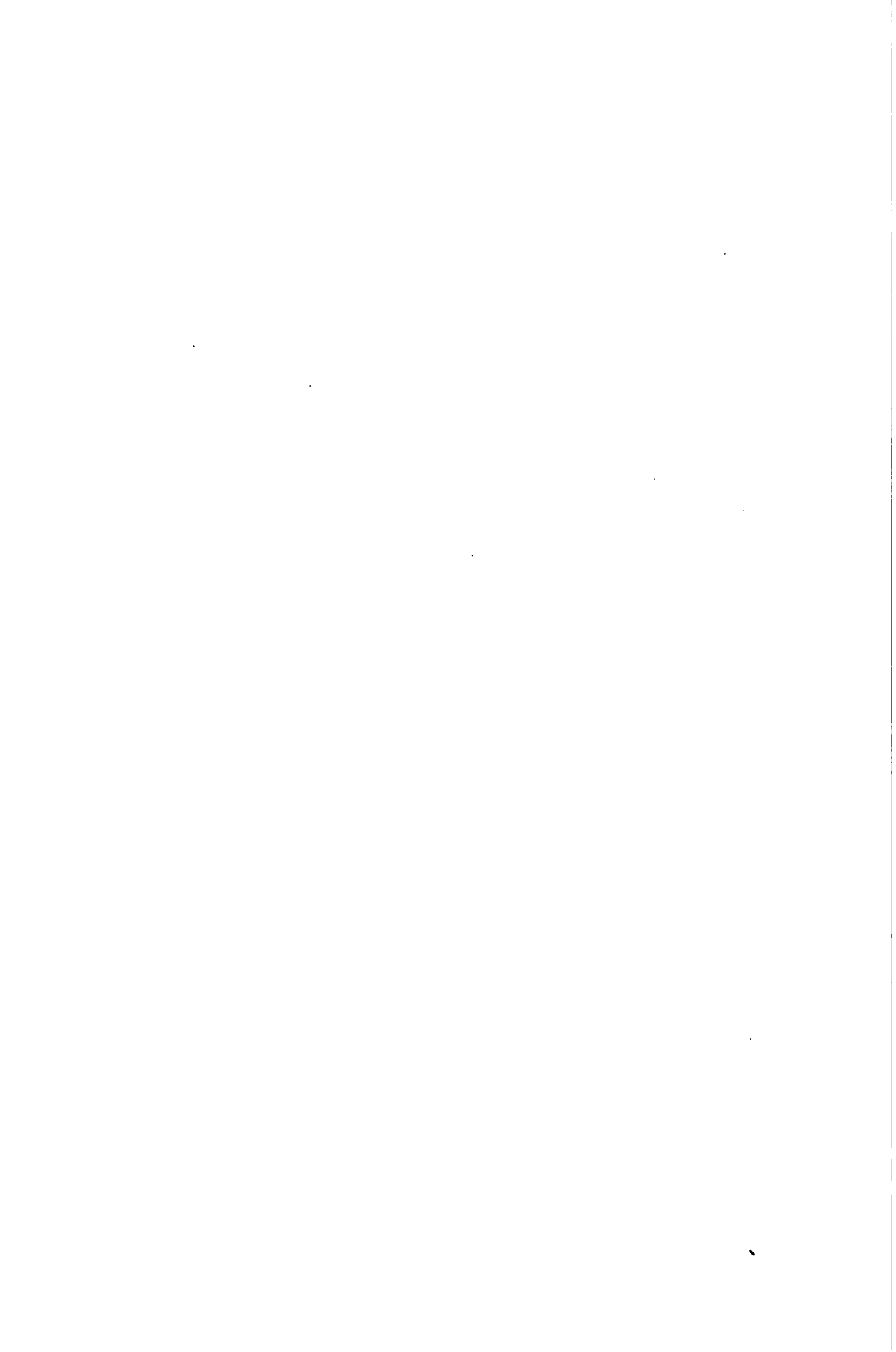
Засѣданіе 12 Ноября 1904 года.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.

3. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной формулѣ анализа“.

4. *Д. М. Синцовъ* доложилъ сообщеніе В. П. Ермакова: „Объ интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка“.





Томъ IX, № 6.

СОДЕРЖАНІЕ.

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.





